MICRO ECONOMIA A·P·L·I·C·A·D·A

MAURINHO LUIZ DOS SANTOS
VIVIANI SILVA LÍRIO
WILSON DA CRUZ VIEIRA

Microeconomia Aplicada

(editores)
Maurinho Luiz dos Santos
Viviani Silva Lírio
Wilson da Cruz Vieira

Viçosa - MG
2009

Impresso no Brasil

Capa: Agnaldo Pacheco
Revisão Linguistica: Nelson Coeli
Editoração Eletrônica: Maria das Graças L. S. Freitas

Ficha Catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

M626
2009

Microeconomia aplicada / editores: Maurinho Luiz dos Santos, Wilson da Cruz Vieira, Viviani Silva Lírio. – Visconde do Rio Branco, MG : Suprema, 2009.
649p. : il. ; 24cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-60249-28-2

1. Microeconomia. 2. Otimização matemática. 3. Comportamento do consumidor. 4. Produção (Teoria econômica). 5. Custo. 6. Inovações tecnológicas. 7. Mercados. 8. Concorrência. 9. Equilíbrio econômico. 10. Teoria dos jogos. I. Santos, Maurinho Luiz dos. II. Vieira, Wilson da Cruz. III. Lírio, Viviani Silva.

CDD 22.ed. 338.521

DEDICATÓRIA

Este livro é dedicado a Anita Maitan (In memorian), uma mulher semi-analfabeta que, com apenas trinta e um anos ficou viúva com sete filhos. Vivendo no campo, em uma casa simples, sem água, luz, gás e nenhum outro item de conforto, conseguiu dar a todos eles o único bem inalienável, a educação. Na sua extrema simplicidade, essa atitude demonstra que ela acreditava que a liberdade plena do indivíduo só é obtida pelo conhecimento.

Sumário

Parte V – Equilíbrio Geral

Parte VI – Externalidades, Bens Públicos e Assimetria da Informação

Parte VII – Teoria dos Jogos

APRESENTAÇÃO

Este livro apresenta uma abordagem quantitativa e aplicada da teoria microeconômica. Entre seus principais méritos, destacam-se seu forte caráter didático e a diversidade dos tópicos abordados. Ele reflete, em grande parte, as atividades acadêmicas de professores e estudantes do Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Viçosa.

A obra contém 18 capítulos, que estão organizados em sete partes. A parte I (Fundamentos Matemáticos) é constituída por dois capítulos . No primeiro, são abordadas as técnicas matemáticas de otimização estática e suas aplicações em economia e, no segundo, são apresentadas técnicas de otimização dinâmica. Grande parte dos capítulos posteriores faz uso dessas técnicas.

A parte II (Teoria do Consumidor) é constituída por quatro capítulos (3 a 6). Como o título desta parte do livro sugere, a teoria do comportamento do consumidor é analisada e discutida em detalhes. O primeiro capítulo aborda as funções de utilidade e demanda do consumidor e o segundo apresenta a teoria da dualidade. Os dois últimos capítulos (5 e 6) abordam, respectivamente, as aplicações da teoria da demanda e a incerteza e risco nas decisões econômicas.

Os próximos quatros capítulos (7 a 10) compõem a parte III (Teoria da Firma). As seqüências de capítulos abordam os seguintes tópicos: teoria da produção, teoria dos custos, inovação tecnológica e mercado produto-produto. Na parte IV (Mercados) são abordados, respectivamente, os mercados em competição perfeita e aqueles em competição imperfeita.

A parte V (Equilíbrio Geral) é composta por dois capítulos (13 e 14). No primeiro, aborda-se a teoria da troca, com uma introdução aos conceitos de equilíbrio geral, e, no segundo, o equilíbrio na produção e nos mercados. Os capítulos 15 (Externalidades), 16 (Bens públicos) e 17 (Assimetria de informação) compõem a parte VI (Externalidades, Bens Públicos e Assimetria). Finalmente, a parte VII (Teoria dos Jogos) é

composta de um único capítulo (18), que trata de jogos estáticos e dinâmicos com informação completa.

Essas partes em que o livro foi estruturado (exceto a primeira) representam os grandes temas da teoria microeconômica que são usualmente abordados, de maneira formalizada e aprofundada, em cursos de pós-graduação em economia distribuídos pelo mundo. Tem-se, portanto, como público principal deste livro os estudantes e professores de cursos de pós-graduação em economia do País. Capítulos específicos do livro podem ser usados também em cursos de graduação em economia, desde que os estudantes tenham o preparo necessário para compreendê-los.

Viçosa (MG)
Os Editores

Capítulo 1

Otimização estática em economia

Wilson da Cruz Vieira[1]

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos matemáticos básicos e técnicas de otimização estática que serão utilizados ao longo deste livro. Inicia-se com conceitos como os de conjunto e de função. O conceito de função é fundamental em análise econômica, pois praticamente todas as relações econômicas são expressas na forma de funções ou equações. Em situações gerais que envolvem simultaneamente várias funções ou equações, necessita-se de conceitos relacionados a matrizes.

Estreitamente ligados ao conceito de função estão os de limite, continuidade e derivada. Com base no conceito de derivada, derivam-se as condições de primeira e segunda ordens para encontrar extremos relativos de funções ou utilizar o conceito para realizar, por exemplo, análises de estática comparativa. Um extremo relativo é um ponto que maximiza ou minimiza uma função; na análise econômica, esse ponto pode representar, por exemplo, o lucro máximo de uma firma.

1.1. Conjuntos e funções

1.1.1. Conjuntos

Um **conjunto** é qualquer coleção de objetos distintos. Estes objetos podem ser físicos (cesta de bens, por exemplo) ou abstratos (conjuntos numéricos, por exemplo). Um conjunto pode ser descrito mediante a **enumeração** de seus elementos ou através de uma **regra**. Como exemplo, considere o seguinte conjunto: $A = \{a, b, c\}$. Note-se

---

[1] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: wvieira@ufv.br.

que, para descrevê-lo, enumerou-se (em conjuntos, a ordem dos elementos não é importante) seus elementos, ou seja, "a", "b" e "c".

Usualmente, os conjuntos são representados por letras maiúsculas e seus elementos dispostos entre colchetes. Podem-se estabelecer as seguintes relações entre um conjunto e seus elementos: $b \in A$ [lê-se: "b pertence a A", "b é um elemento de A" ou "b é um membro de A"] ou $d \notin A$ (no caso, "d não é um elemento de A").

Quando não é possível enumerar todos os elementos de um conjunto, uma forma alternativa para descrevê-lo é através de uma regra. Seja, por exemplo, o seguinte conjunto formado pelos números naturais: $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Embora não seja possível colocar todos os seus elementos entre colchetes, ele é enumerável; na verdade, ele é um conjunto infinito (tem infinitos elementos) enumerável. Note-se também que, da forma como os elementos estão dispostos, não há dúvida sobre que elementos compõem esse conjunto. Por outro lado, o conjunto formado pelos números reais[1] compreendidos entre 1 e 5, ou seja, $[1, 5]$, ou, de forma alternativa, $1 \leq x \leq 5$, não pode ser descrito por enumeração de seus elementos. Sabe-se que, entre seus elementos, 1 e 5 são o menor e o maior valor, respectivamente, mas, qual é o elemento (número) que vem depois de 1?. Nesse caso, a melhor forma para descrever esse conjunto é através de uma regra. Assim, pode-se descrever esse conjunto da seguinte forma: $D = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 5\}$, ou seja, D é o conjunto formado por todos os elementos "x" pertencentes aos reais tal que (o símbolo "|" significa "tal que") "x" está compreendido entre 1 e 5. Note-se que esse é um conjunto infinito não-enumerável.

Definido o que é um conjunto e como descrevê-lo, podem-se estabelecer operações ou relações entre eles. Antes de prosseguir, convém definir um conjunto especial, o **conjunto vazio**, denotado por $\varnothing$, como o conjunto que não possui nenhum elemento. Pode-se definir a seguinte relação entre o conjunto vazio e qualquer outro conjunto não-vazio: $\varnothing \subset A$ ou $A \supset \varnothing$. Essas relações são equivalentes e informam que o conjunto vazio é um "subconjunto" (está contido) do conjunto A ou o

[1] Os conjuntos numéricos, entre os quais os reais, são definidos mais adiante nesta seção.

conjunto A "contém" o conjunto vazio. Para dois conjuntos quaisquer não-vazios, B e D, diz-se que B é um subconjunto de D se $b \in D$ para todo $b \in B$. Dois conjuntos, A e B, são iguais se e somente se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de A. Quando dois conjuntos não-vazios não possuem elementos em comum, eles são chamados de **disjuntos**.

Para dois conjuntos quaisquer, A e B, podem-se realizar as seguintes operações:

a) **União** de conjuntos: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

b) **Interseção** de conjuntos: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. Note-se que a interseção de dois conjuntos disjuntos é o conjunto vazio.

c) O **complemento** de A em B é o conjunto: $B \backslash A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$, e o complemento de B em A é o conjunto: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. O complemento de A em U (conjunto universo) é o conjunto $U \backslash A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$, ou seja, todos os elementos pertencentes a U e que não pertencem a A. Quando não está claramente definido, o conjunto universo é o conjunto formado por todos os elementos no contexto da análise que está sendo realizada.

d) **Produto cartesiano**: Seja $x \in X$, $y \in Y$ e (x, y) um **par ordenado.** Então $(x, y) \in X \times Y$, e o conjunto X x Y, formado por todos os pares ordenados (x, y), é chamado de produto cartesiano. Note-se que, diferentemente dos conjuntos, a ordem dos componentes de um par ordenado é importante, ou seja, $(x, y) \neq (y, x)$, a não ser que $x = y$.

As operações com conjuntos de (a) a (c) podem ser ilustradas utilizando-se os seguintes diagramas de Venn (Figura 1.1):

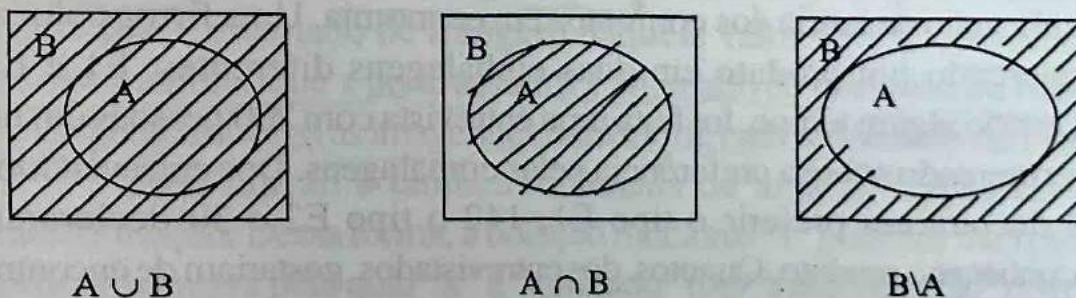



Figura 1.1 - Diagramas de Venn

Se a A, B e C são conjuntos arbitrários quaisquer, derivam-se as seguintes leis relacionadas com uniões e interseções:

a) **Lei comutativa:** $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) **Lei associativa:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

c) **Lei distributiva:**

c1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Antes de passar à discussão de funções, na próxima seção, convém descrever os conjuntos numéricos e as relações entre eles.

a) **Naturais:** $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

b) **Inteiros:** $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

c) **Racionais:** $Q = \{a/b \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

d) **Irracionais:** $2^{1/2}, 3^{1/2}, ...$

e) **Reais:** $R = \{x \mid x \text{ é racional ou irracional}\}$

e) **Complexos:** $C = \{a + bi \mid a \in R, b \in R, i = (-1)^{1/2}\}$, em que "a" é a parte real e "bi" é a parte imaginária.

Note-se que: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. Exceto quando dito explicitamente, o conjunto universo relacionado a conceitos, exemplos e aplicações no restante deste capítulo e na maior parte deste livro é o conjunto dos números reais.

Um generalização do produto cartesiano, a partir do conjunto dos reais, é dado por $R^n = R \times R \times ... \times R = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in R, i = 1, 2, 3, ..., n\}$, em que x_i é a i-ésima coordenada de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma n-upla ordenada.

Considere-se o seguinte exemplo, retirado de Silva et al. (1999), de aplicação da teoria dos conjuntos em economia. Uma firma colocou no mercado um produto em duas embalagens diferentes: E1 e E2. Decorrido algum tempo, foi feita uma entrevista com 200 pessoas em um supermercado sobre a preferência pelas embalagens. Dos entrevistados, 120 declararam preferir o tipo E1, 142 o tipo E2 e 30 declararam desconhecer o produto. Quantos, dos entrevistados, gostariam de encontrar o produto nas duas embalagens? Seja E1 o conjunto dos que preferem esse tipo de embalagem e E2 o conjunto dos que preferem o outro tipo. Note-se que E1 = 120, E2 = 142 e $E1 \cap E2 = 92$. Logo, a resposta

procurada é 92.

Seja o seguinte exemplo, retirado de Chiang (1982), para o leitor responder. O modelo de mercado de um produto Q é representado pelos conjuntos $D = \{(P,Q) \mid Q = 4 - P^2\}$ e $S = \{(P,Q) \mid Q = 4P - 1\}$, em que D e S definem os conjuntos de pontos contidos nas curvas de demanda e oferta, respectivamente. Encontrar o conjunto interseção $D \cap S = (P^e, Q^e)$, em que P^e e Q^e representam, respectivamente, o preço e a quantidade de equilíbrio de mercado. [Nota: No cômputo do equilíbrio, considerar apenas valores não-negativos para preços e quantidades]. [Resposta: $(P^e, Q^e) = (1, 3)$].

1.1.2. Funções

Uma **relação** de um conjunto A em um conjunto B é um subconjunto de um produto cartesiano A x B, em que para cada elemento de A pode existir mais de um elemento correspondente em B. Se nessa relação houver apenas um valor correspondente de B para cada elemento A, ela é chamada de **função.** Nos dois exemplos de relações a seguir, note-se que apenas o primeiro caso (R_1) é uma função.

$R_1 = \{(x, y) \mid y = 3x\}$
$R_2 = \{(x, y) \mid y \leq 3x\}$

Uma função, na sua forma genérica, é representada usualmente por: $y = f(x)$ [lê-se: "y é uma função de x"]. Nessa notação, "x" é chamado de argumento ou variável independente da função; e "y" é chamado de valor da função ou variável dependente. O valor de y no qual o valor de x é aplicado é chamado de **imagem** daquele valor de x. O conjunto de todos os valores que x pode assumir é chamado de **domínio da função**, e o conjunto de todas as imagens é chamado de **contradomínio da função.**

Uma função é também chamada de uma aplicação ou uma transformação. Dessa forma, a notação funcional "f" pode ser interpretada como uma regra pela qual "x" é "aplicado" (ou "transformado") em "y". Portanto, pode-se escrever:

$$f: x \rightarrow y$$

em que "f" especifica uma regra de transformação e "x → y" indica a aplicação.

Dentre o conjunto de funções, as mais usuais em economia são as polinômias (linear, quadrática e cúbica), racionais (hipérbole regular) e não-algébricas (logarítmicas, exponenciais e trigonométricas). A função linear pode ser utilizada para representar, por exemplo, uma função investimento, uma função de custo fixo ou uma restrição orçamentária; a função quadrática, uma função de produção ou uma função de utilidade; a função cúbica, uma função de custo; a hipérbole regular, uma isoquanta ou uma isocusto; a função logarítmica, uma função utilidade; a exponencial é freqüentemente utilizada na composição de juros ou cálculo de valores presentes; e as trigonométricas, especialmente funções seno e co-seno, aparecem com freqüência na análise dinâmica de trajetórias no tempo de variáveis econômicas.

Na Figura 1.2 representam-se, graficamente, algumas dessas funções.

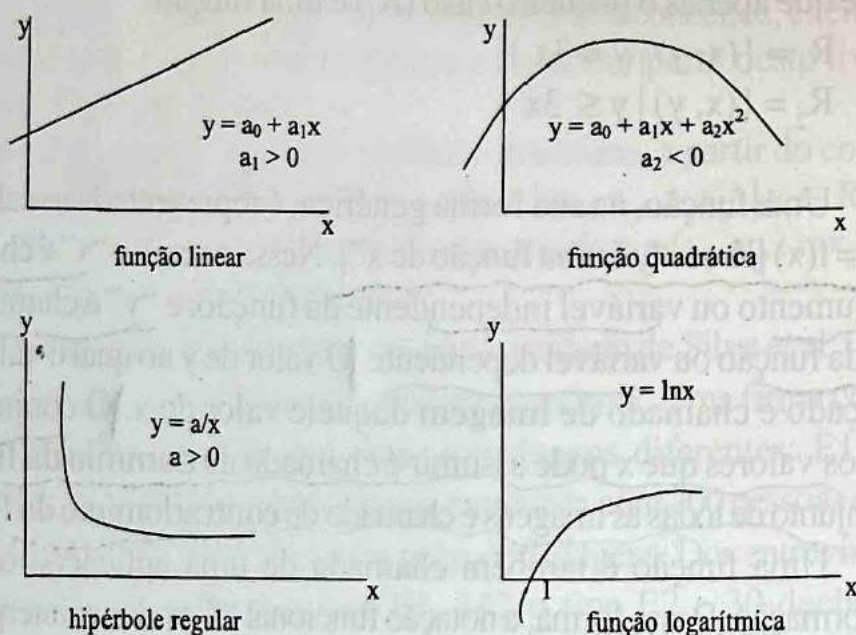



Figura 1.2 - Representação gráfica de funções

Na função linear, tem-se um intercepto positivo ($a_0>0$) e uma inclinação positiva ($a_1>0$) (Figura 1.2). Esta função pode representar, por exemplo, uma função de oferta. Na função quadrática, o intercepto é positivo ($a_0>0$) e a concavidade é para baixo ($a_2<0$). Note-se que, na hipérbole regular, o gráfico aproxima-se assintoticamente dos eixos x e y sem tocá-los. Este gráfico tem uma porção no terceiro quadrante que não foi mostrada. Como as variáveis econômicas, em geral, são não-negativas, usualmente a análise gráfica no espaço bidimensional considera apenas o primeiro quadrante. A função logarítmica, por possuir base positiva ($e>0$) (base natural "e", um número irracional, ou seja, $\log_e x = \ln x$)[3], é crescente. Observe também que, em $x = 1$, $y = 0$. Esta função tem como domínio os reais positivos e, como contradomínio, os reais.

Saber se uma função é côncava ou convexa é fundamental em economia, especialmente quando se está trabalhando com otimização. Diz-se que uma função $y = f(x)$ é **côncava** em $x = a$ se, nas proximidades do ponto $(a, f(a))$, o gráfico da função fica completamente abaixo de sua tangente nesse ponto. Por outro lado, uma função $z = g(x)$ é **convexa** em $x = a$ se, nas proximidades do ponto $(a, g(a))$, o gráfico da função fica completamente acima de sua tangente nesse ponto.

Formalmente, para dois pontos, x_1 e x_2, do domínio da função $y = f(x)$, $x_1 < x_2$, ela é dita côncava se $f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$, $0 \leq \alpha \leq 1$. No caso de convexidade, basta inverter o sinal da desigualdade de "$\geq$" para "$\leq$" na expressão anterior[4]. Quando $f(x_2) \geq f(x_1)$ implicar que $f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \geq f(x_1)$, diz-se que a função $y = f(x)$ é **quasi-côncava.**

Seja a função $y = f(x)$. Se for possível inverter as posições das variáveis, ou seja, a variável dependente passa a ser a variável independente e vice-versa, tem-se o que se chama de **função inversa**, que é representada por $x = f^{-1}(y)$. Em economia, a função de demanda, em

---

[3] $e = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n \cong 2{,}718$. Ver, mais adiante, nesta seção, o conceito de limite.

[4] Os conceitos de convexidade e concavidade podem ser generalizados facilmente para funções com mais de um argumento. Quando a desigualdade é do tipo "<" ou ">", diz-se que ela é "estrita". Daí vêm, conforme o caso, os conceitos de "estritamente côncava" ou "estritamente convexa".

concorrência perfeita, é dada por Q = f(P), em que Q representa quantidade e P, preço. Curiosamente, a função de demanda é freqüentemente apresentada na sua forma inversa, ou seja, $P = f^{-1}(Q)$.

Muitas vezes, é possível encontrar uma situação em que uma variável "z" é função de outra variável "y", que, por sua vez, é função de uma terceira variável "x". Quando se expressa "z" como uma função de "x", está-se fazendo uma composição de funções, ou seja, "z" é uma **função composta** de "x". De forma mais específica, se z = f(y) e y = g(x), então z = f[g(x)].

Uma função é dita **homogênea** de grau "r" se, ao multiplicar cada um de seus argumentos por uma constante "k", o valor da função fica multiplicado por k^r, ou seja, se $f(kx_1,kx_2) = k^r f((kx_1,kx_2)$. Por exemplo, se z = f(x, y) = x/y, e caso se multiplique cada um de seus argumentos por k, obtém-se $f(kx, ky) = kx/ky = k^0 f(x, y)$, ou seja, esta função é homogênea de grau zero. Neste caso em particular, o valor da função não foi afetado pelas variações na mesma proporção nas variáveis independentes dessa função. Note-se que esta constante "k" é usualmente positiva.

Até agora, consideraram-se, basicamente, funções com um único argumento, ou seja, funções com uma única variável independente. Esses são os casos mais simples. Entretanto, na maioria das vezes, tem-se que lançar mão de funções mais complexas, isto é, funções com mais de um argumento. Por exemplo, uma função muito conhecida em economia é a Cobb-Douglas, que pode ser escrita como $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$, em que Q é quantidade por unidade de tempo, K é capital, L é trabalho e a, α e β são parâmetros. Trata-se de uma função não-linear com dois argumentos. Para se trabalhar com funções com mais de um argumento, uma forma conveniente é usar os conhecimentos de álgebra linear que serão tratados na próxima seção.

Considerem-se agora alguns exemplos de aplicações dos conceitos dados nesta seção. Para iniciar, sejam os seguintes conjuntos: $A = \{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{9 - x^2}\}$; $B = \{(x, y) \mid y = 9 - x\}$; e $C = \{(x, y) \mid y = 9/x\}$. Esses conjuntos definem relações, cujos pares

ordenados estão contidos no produto cartesiano R x R, em que R representa o conjunto dos números reais. Dessas relações, quais delas constituem funções? [Resposta: B e C]. (Em caso de dúvida, o leitor pode construir gráficos representativos dessas relações para identificar mais claramente quais delas são funções).

Seja um segundo exemplo: O custo total por dia, CT, de uma firma é uma função de sua produção diária Y: CT = 100 + 5Y. A firma tem um limite de capacidade de 100 unidades de um dado produto por dia. Qual é o contradomínio da função custo total? Note que, para Y = 100, CT = 600. Logo, o conjunto contradomínio procurado é dado por {CT | 100 ≤ CT ≤ 600}, desde que, quando Y = 0, CT = 100.

Considere agora a seguinte função: $y = x^3 - 3x^2 - 24x$. No intervalo $3 \leq x \leq 5$, ela é estritamente côncava ou estritamente convexa? [Resposta: Estritamente convexa]. (O leitor pode construir um gráfico da função para confirmar a resposta dada). Para finalizar esta seção, considere o seguinte exemplo retirado de Weber (1986): Achar $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$ para a seguinte expressão: $f(x) = g(x) = (x+1)/(x-1)$. [Resposta: $f[g(x)] = g[f(x)] = x$]. (Aqui basta fazer as substituições necessárias e realizar um pouco de álgebra para encontrar a resposta dada).

1.2. Álgebra linear

1.2.1. Álgebra matricial[5]

Uma **matriz** de dimensão m x n é um arranjo ordenado de **mn** elementos, em que "m" refere-se às linhas e "n" às colunas. Supondo-se que a matriz A tem dimensão m x n, então pode-se descrevê-la da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[5] Esta seção baseia-se em Johnston (1984).

em que a_{ij} é um elemento genérico, com "i" referindo-se à i-ésima linha e "j", à j-ésima coluna da matriz em questão.

Uma matriz pode ser multiplicada por um escalar (constante) para se obter uma nova matriz cujos elementos são obtidos pela multiplicação de cada elemento da matriz original pelo escalar. Podem-se somar (subtrair) matrizes da mesma ordem para obter uma nova matriz cujos elementos são obtidos pela soma (diferença) dos elementos correspondentes das matrizes originais. A **transposta** de uma matriz B, denotada por B' (ou B^t), é obtida pela troca entre linhas e colunas da matriz original, ou seja, a primeira linha de B torna-se a primeira coluna da transposta, a segunda linha de B torna-se a segunda coluna da transposta, e assim por diante. Se B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \text{então } B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz A satisfaz a propriedade A = A', ela é chamada de **simétrica**, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$, em que a_{ij} é um elemento de A. Note-se que essa propriedade só pode acontecer com matrizes quadradas, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de coluna, m = n. Um exemplo de matriz simétrica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

em que é fácil constatar que ela é idêntica à sua transposta. As matrizes simétricas possuem papel importante na análise econômica, que será explorado mais adiante neste capítulo e em outros contextos deste livro. Da mesma forma que se pode somar ou tomar a diferença entre matrizes, pode-se também multiplicá-las. O produto de duas matrizes, AB, é definido quando A tem dimensão "m x n" e B tem dimensão "n x p". Se AB = C, então um típico elemento de C é dado por: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Para tornar mais claro o processo de multiplicação de matrizes, considere as seguintes

matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$ Note que:

$$AB = C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

A partir desses exemplos, pode-se perceber que DA e DB não são definidos. Isso porque as dimensões dessas matrizes são incompatíveis para multiplicação, ou seja, o número de colunas de D é diferente do número de linhas de A ou B. Por outro lado, AD e BD são definidos. Nos exemplos dados, fez-se apenas a multiplicação AB = C. Para exemplificar como foram obtidos os elementos c_{ij}, considere, em particular, o elemento c_{11}. Ele foi obtido da seguinte forma: $c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$. (Note-se que n = 2). Fazendo as contas, obtém-se: 1*(-1) + 2*3 = 5. Procedimento semelhante foi utilizado para obter os demais elementos da matriz C.

A seguir apresentam-se duas matrizes quadradas importantes:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix} \text{ e } I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz R é chamada de **matriz diagonal**. Sua característica é que os elementos fora da diagonal principal são todos iguais a zero, enquanto, na diagonal principal, pelo menos um elemento é diferente de zero. A **matriz identidade** I é um caso especial de uma matriz diagonal

com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. A matriz identidade possui a seguinte propriedade IA = AI = A para quaisquer matrizes A e I de dimensões n x n. Outra propriedade importante das matrizes quadradas é o **traço**, que é a soma dos elementos da diagonal principal. No caso da matriz quadrada R, o traço é dado por $tr(R) = \sum_{i=1}^{n} r_{ii}$.

Quando uma das dimensões de uma matriz é igual a 1, tem-se o que se chama de **vetor**. Dessa forma, pode-se ter, por exemplo, um vetor-coluna C de dimensão m x 1 ou um vetor-linha L de dimensão 1 x n conforme mostrado nos exemplos a seguir:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ e } L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]$$

Além de matrizes especiais, um vetor pode também ser interpretado como um ponto num sistema de coordenadas cartesianas. Nesse caso, os componentes (elementos) do vetor são suas coordenadas. Sua interpretação geométrica é de um segmento orientado, com origem nos eixos de coordenadas e final (seta) no ponto definido por suas coordenadas. Como os componentes de um vetor podem assumir qualquer valor real, o conjunto de todos os vetores de determinado sistema de coordenadas cartesianas (por exemplo, o plano definido pelos eixos "x" e "y") forma um espaço chamado de espaço vetorial. Nesse espaço, realizam-se as mesmas operações já definidas para matrizes, como soma, diferença, multiplicação por um escalar, etc.

Duas propriedades de vetores, **dependência** ou **independência linear**, são muito importantes na análise de sistemas de equações. Diz-se que "n" vetores (V_1, V_2, ..., V_n), de um espaço vetorial "V", são linearmente dependentes (L.D.) se existirem escalares k_1, k_2, ..., k_n, não todos nulos, tais que $k_1V_1 + k_2V_2 + ... + k_nV_n = 0$. Caso contrário, diz-se que estes

vetores são linearmente independentes (L.I.). Para ilustrar essas propriedades, considere os seguintes vetores:

$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $V_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Observe que: $3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Note-se que, neste exemplo, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ e $k_3 = -1$. Logo, os vetores V_1, V_2 e V_3 são ditos linearmente dependentes (L.D.).

Essa relação de dependência (ou independência) entre vetores é útil também para se definir uma outra propriedade relacionada a matrizes. Trata-se do **rank** ou **posto** de uma matriz. Seja a matriz A de dimensão m x n. O posto desta matriz é dado pelo número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes de A. Se m < n, então o posto máximo que essa matriz pode assumir é igual a "m". Para exemplificar essa propriedade, considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Note-se que a primeira linha é o dobro da terceira linha da matriz A, ou seja, existe dependência linear entre essas duas linhas. Logo, o posto desta matriz deve ser menor do que 3. Caso se desconsidere uma das linhas em que há dependência linear, as duas linhas restantes são independentes linearmente. Portanto, o posto desta matriz é igual a 2. Observe também que o número de linhas linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes.

Por fim, para encerrar esta subseção, considere a seguinte propriedade de matrizes quadradas. Uma matriz A é dita **não-singular** se existe a matriz A^{-1} (inversa de A) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Uma matriz quadrada A de dimensão n x n não-singular tem posto "n" e, alternativamente, se A tem posto "n", ela é não-singular. Esses resultados,

assim como outros apresentados neste capítulo, são obtidos mediante prova de teoremas. Por questão de espaço, optou-se apenas por apresentar os resultados mais importantes e que são importantes do ponto de vista da análise econômica.

1.2.2. Determinantes e sistemas de equações lineares

A definição formal do **determinante** de uma matriz quadrada A, de dimensão n x n, denotado por |A|, é um tanto quanto complexa e depende de conceitos não tratados neste capítulo, como o de permutação. Em vez de apresentar o conceito de determinante de uma matriz quadrada formalmente, optou-se por mostrar como ele é calculado mediante exemplos. No caso de uma matriz quadrada 1 x 1, o determinante é o próprio elemento da matriz. No caso de matrizes 2 x 2 e 3 x 3, os determinantes são calculados, respectivamente, da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} |B| = {} & b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{32}b_{21} - \\ & - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

No caso da matriz 2x2, multiplicam-se os elementos da diagonal principal e o resultado é subtraído dos elementos multiplicados da diagonal secundária. O valor resultante é determinante da matriz A. Procedimento semelhante é utilizado no caso da matriz B, só que agora as diagonais principal e secundária não esgotam os elementos da matriz. Então, procede-se como se as duas primeiras colunas da matriz B fossem adicionadas à sua direita, o que permite individualizar três diagonais principais e três diagonais secundárias. O cálculo do determinante, no caso da matriz B, de dimensão 3x3, é como mostrado na expressão anterior.

Se a matriz quadrada possuir dimensão maior do que 3x3, precisa-

se do conceito de **co-fator** para calcular seu determinante. Um co-fator, denotado por c_{ij}, de uma matriz A, de dimensão n x n, é o determinante da matriz A, com a i-ésima linha e a j-ésima coluna eliminadas, e multiplicado pelo fator $(-1)^{i+j}$, isto é, $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Note-se que se pode calcular o co-fator de cada elemento da matriz A e formar uma matriz de co-fatores. A transposta da matriz de co-fatores de A é chamada de **matriz adjunta** de A e é denotada por Adj.A. Se $|A| \neq 0$, a matriz A é não-singular e sua inversa é calculada utilizando-se a seguinte expressão:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj.A$$

Considere o seguinte exemplo para ilustrar os cálculos de co-fatores, da matriz adjunta e da matriz inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinante de A: $|A| = 2*2 - 3*1 = 1 \neq 0$.
Co-fatores: $c_{11} = (-1)^{1+1}|2| = 2$; $c_{12} = (-1)^{1+2}|3| = -3$; $c_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1$; $c_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$.

Matriz de co-fatores: $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$

Matriz adjunta de A: $Adj.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$

Matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$

Pode-se constatar facilmente que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Para uma matriz quadrada A, de dimensão n x n, seu determinante pode ser calculado por expansão de co-fatores de qualquer linha ou qualquer coluna, utilizando uma das seguintes expressões:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$ (expansão pela i-ésima linha).

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$ (expansão pela j-ésima coluna).

Para ilustrar o cálculo do determinante usando expansão por co-fatores, considere o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Escolhendo a primeira linha para expansão, obtém-se o seguinte valor para o determinante: $|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = 1$. Note-se que os dois últimos termos da expansão são iguais a zero, pois $a_{12} = a_{13} = 0$, e o cálculo do determinante resume-se a calcular o co-fator c_{11}, pois $a_{11} = 1$. O valor deste co-fator é 1. Usando o primeiro método apresentado para cálculo do determinante de uma matriz quadrada, de dimensão 3x3, chega-se ao mesmo resultado.

Os conhecimentos já adquiridos sobre cálculos de inversas de matrizes e de determinantes podem ser utilizados para resolver sistemas de equações lineares. Para ver como isso pode ser feito, considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Caso se definam as seguintes matriz e vetores:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Pode-se reescrever o sistema de equações lineares, usando notação matricial, da seguinte forma:

$$Ax = b$$

Pré-multiplicando ambos os lados dessa equação matricial por A^{-1} (desde que a inversa exista), obtém-se: $A^{-1}Ax = A^{-1}b = Ix = A^{-1}b$, ou seja, $x = A^{-1}b$, o que é uma forma bastante conveniente para resolver sistemas de equações lineares em que o número de incógnitas é igual ao número de equações, ou seja, basta calcular a inversa da matriz de coeficientes e multiplicá-la pelo vetor "b". Uma forma alternativa para obter a solução deste sistema de equações usando apenas cálculo de determinantes é a chamada **regra de Cramer**. Segundo essa regra, os valores das incógnitas são dados por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad \text{(para todo i = 1, 2, 3, ..., n).}$$

em que $|A_i|$ é o determinante da matriz resultante da substituição da iésima coluna da matriz A pelo vetor "b" de constantes. Assim, nos casos de x_1 e x_n, por exemplo, tem-se, respectivamente:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix}}{|A|}$$

1.2.3. Formas quadráticas e raízes características

As **formas quadráticas** são expressões em mais de uma variável em que, para cada termo, cada variável aparece com um quadrado ou em um produto com outra variável. Por exemplo, a expressão $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_i x_j$ é uma forma quadrática nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, sendo "a_{ij}" escalares. Toda forma quadrática pode ser expressa como um produto matricial do tipo $x' Ax$, em que "A" é uma matriz simétrica de dimensão n x n e "x", um vetor de incógnitas de dimensão n x 1. Para exemplificar numericamente, seja a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A forma quadrática definida por essa matriz é:

$$[x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [2x_1 + x_2 \quad x_1 + x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

As formas quadráticas possuem algumas propriedades que são muito importantes quando da discussão das condições de segunda ordem para otimização de funções com mais de um argumento, o que é uma situação bem comum em economia. Se uma matriz "A", de dimensão n x n, é simétrica,

então ela é dita:

a) **Positiva definida**, se e somente se x'Ax > 0, x ≠ 0.

b) **Negativa definida**, se e somente se x'Ax < 0, x ≠ 0.

Se o sinal da forma quadrática não se encaixar em nenhum desses dois casos, diz-se que ela é indefinida. A desigualdade estrita das formas definidas, ">" ou "<", pode ser relaxada para "≥" (forma quadrática positiva semidefinida) ou para "≤" (forma quadrática negativa semidefinida). No exemplo anterior, note que a forma quadrática pode ser expressa do seguinte modo:

$$x'Ax = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$$

Claramente, essa forma quadrática é positiva definida, pois, para qualquer vetor x ≠ 0, ou seja, para quaisquer valores atribuídos a x_1 e x_2 (exceto ambos iguais a zero), o sinal dela é sempre positivo. Se a matriz simétrica possuir dimensão maior do que 2x2, freqüentemente torna-se difícil, apenas visualizando os termos da forma quadrática, afirmar, com certeza, se ela é definida positiva, definida negativa ou indefinida. Nesses casos, requer-se um método mais geral e mais fácil para identificar com precisão o sinal da forma quadrática, o que será visto a seguir.

Se A é uma matriz simétrica, de dimensão n x n, e k, um número natural, pode-se definir: a) uma submatriz principal de ordem k x k de A, denotada por "A_k", que é obtida pela remoção das últimas (n – k) linhas e (n – k) colunas de A; e b) o determinante dessa submatriz principal é chamado de **menor principal** e denotado por $|A_k|$. Para ilustrar esses conceitos, seja a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Observe que as submatrizes principais de ordens 1x1, 2x2 e 3x3 de A são, respectivamente:

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Com base nesses novos conceitos, o sinal da forma quadrática associado à matriz simétrica A, de dimensão n x n, é:

a) Positiva definida, se e somente se $|A_k| > 0$ para todo k =1, 2, ..., n.

b) Negativa definida, se e somente se $(-1)^k|A_k| > 0$ para todo k =1, 2, ..., n.

Para ilustrar o uso desse novo método para definir o sinal de uma forma quadrática, considere aquele primeiro exemplo cuja forma quadrática já foi identificada como positiva definida, ou seja, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cujas submatrizes principais são: } [2] \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os determinantes dessas submatrizes principais são dados por: $|A_1| = 2 > 0$ e $|A_2| = |A| = 1 > 0$. Logo, a forma quadrática associada a esta matriz é positiva definida, como já visto anteriormente.

Considere agora o caso de uma matriz quadrada A, de dimensão n x n. Se for possível encontrar um vetor $x \neq 0$ e um escalar "r" tal que:

$$Ax = rx$$

então o escalar "r" é chamado de **raiz característica** (ou autovalor) e o vetor "x" é chamado de **vetor característico** (ou autovetor). Essa expressão pode também ser escrita em formato mais conveniente, isto é,

$Ax - rx = 0$, ou, ainda, $(A - rI)x = 0$, em que $(A - rI)$ é chamada de **matriz característica**. Uma vez que, por suposição, $x \neq 0$, o determinante de $(A - rI)$ deve se igualar a zero para satisfazer a equação matricial. Para obter todas as raízes características, deve-se resolver a equação $|A - rI| = 0$. Como ilustração, considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas raízes características são obtidas da seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

A qual, aplicando-se a regra de cálculo do determinante, gera a seguinte equação quadrática: $(2 - r)(1 - r) - 1 = 0$, ou, ainda, $r^2 - 3r + 1 = 0$, cuja solução são duas raízes reais distintas e positivas: ($r_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ e $r_2 = (3 - \sqrt{5})/2$). Note-se que, ao contrário de uma matriz não-simétrica, cujos autovalores podem ser reais ou complexos, as raízes características de uma matriz simétrica são todas reais. Quando se substitui o valor de uma das raízes características na equação matricial $(A - rI)x = 0$, obtém-se, neste caso, um sistema de equações formado por uma única equação (na verdade, há duas equações, só que elas são linearmente dependentes) e duas incógnitas (x_1 e x_2), ou seja, há infinitas soluções. Para forçar uma única solução para o autovetor, pode-se, segundo Chiang (1982), normalizar, ou seja, fazer com que x_1 e x_2 satisfaçam à equação $\Sigma(x_i)^2 = 1$.

As raízes características e formas quadráticas estão relacionadas da seguinte forma, ou seja, a forma quadrática $x'Ax$ é:

a) Positiva definida, se e somente se $r_i > 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

b) Negativa definida, se e somente se $r_i < 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

No último exemplo, como as raízes características são positivas, a forma quadrática associada à matriz A é positiva definida, o que corrobora

o resultado dos dois outros procedimentos utilizados anteriormente. Esse conceito de raízes características será explorado na análise dinâmica em economia (capítulo 2), associado com a resolução de sistemas de equações diferenciais.

Para encerrar esta seção, serão considerados alguns exemplos. De início, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Pede-se: a) Para que valores de "a" e "b" a inversa A^{-1} existe? [Resposta: Apenas se os valores de a e b forem diferentes de zero]; b) Encontre a inversa A^{-1}. [Resposta: Se a, b ≠ 0, a inversa é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$].

Considere agora o seguinte sistema de equações representativo de dois bens substitutos: $\begin{matrix} 5P_1 - 2P_2 = 15 \\ P_1 - 0{,}4P_2 = 3 \end{matrix}$. Esse sistema possui uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução? [Resposta: infinitas soluções]. (Este resultado decorre do fato de existir dependência linear entre as equações).

1.3. Cálculo

Nesta seção, serão abordados inicialmente conceitos relativos a **limite, continuidade e derivada**. Em seguida, apresentam-se diversas regras de diferenciação que serão úteis na análise de otimização estática em economia.

Para a definição de limite, suponha que o valor da função y = f(x), definida no intervalo a < x < b, aproxima-se do limite "L" quando x aproxima-se de x_0, denotado por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se, para qualquer número positivo ε, existe um número positivo δ tal que os valores da função f(x) estão na "vizinhança" de L enquanto x está na "vizinhança" de x_0, $x \neq x_0$, ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$ (CHIANG, 1982). Para ilustrar esse conceito, considere a Figura 1.3.

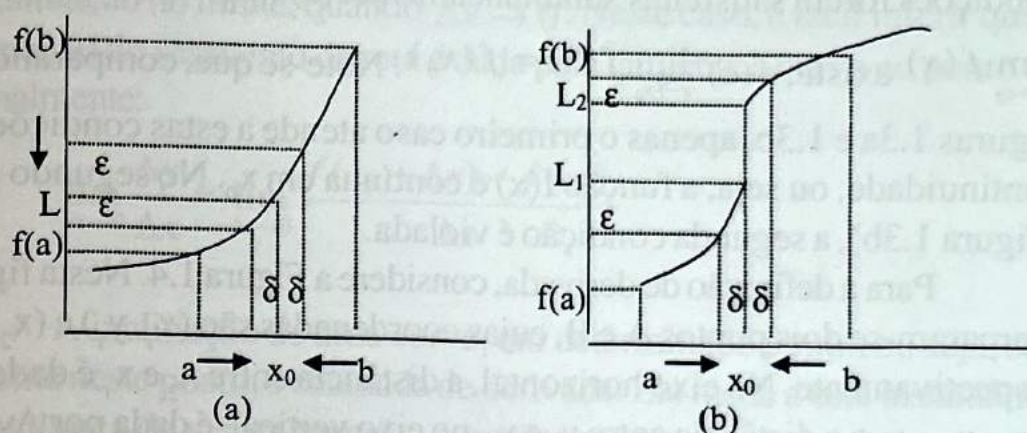



Figura 1.3 - Ilustração do conceito de limite

Caso seja feita uma aproximação de x_0, no domínio da função f(x), pela esquerda (a partir de "a") ou pela direita (a partir de "b") (ver as setas indicadas na Figura 1.3), o valor da função tenderá para L no caso da Figura 1.3a, ou seja, o valor da função estará no intervalo $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$. Por outro lado, na Figura 1.3b, quando os valores de x aproximam-se de x_0 pela esquerda (a partir de "a"), o valor da função tenderá para L_1, e, quando se aproximam de x_0 pela direita (a partir de "b"), o valor da função tenderá para L_2, $L_1 \neq L_2$; em outras palavras, no caso da Figura 1.3b, o limite da esquerda é diferente do limite da direta. Neste caso, diz-se que a função não possui limite quando x tende para x_0.

O conceito de limite está intimamente ligado aos significados das palavras "aproximação" ou "vizinhança", ou seja, a rigor, uma função, para ter um limite quando x tende para x_0, não precisa necessariamente estar definida em $x = x_0$. Observe também que, no conceito de limite, a expressão "'qualquer' número positivo ε existe um número positivo δ", ou seja, pode-se escolher ε de tal forma que x esteja arbitrariamente próximo de x_0 e, em seguida, checar a segunda parte da expressão, quer dizer, a existência de δ (valor positivo) para que seja certificada a existência do limite.

Pode-se, agora, a partir do conceito de limite, definir continuidade.

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é contínua em x_0 se e somente se três condições forem satisfeitas simultaneamente: (a) $f(x_0)$ está definido; (b) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe; e (c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Note-se que, comparando as Figuras 1.3a e 1.3b, apenas o primeiro caso atende a estas condições de continuidade, ou seja, a função $f(x)$ é contínua em x_0. No segundo caso (Figura 1.3b), a segunda condição é violada.

Para a definição de derivada, considere a Figura 1.4. Nesta figura, marcaram-se dois pontos A e B, cujas coordenadas são (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente. No eixo horizontal, a distância entre x_2 e x_1 é dada por $\Delta x = x_2 - x_1$ e a distância entre y_2 e y_1, no eixo vertical, é dada por $Ay = y_2 - y_1$. A inclinação do segmento de reta que une os pontos A e B é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

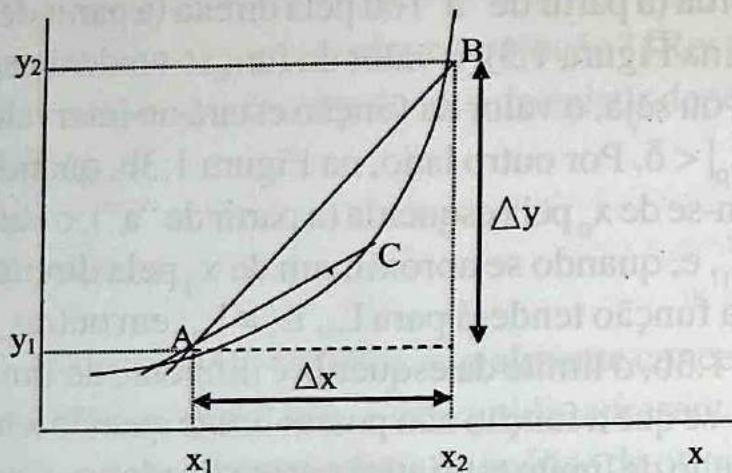



Figura 1.4 - Ilustração do conceito de derivada

Considere, agora, o segmento de reta que une os pontos A e C. Note que, neste caso, ao calcular a inclinação desse novo segmento, há uma diminuição da magnitude de Δx. Pode-se imaginar um novo ponto, mais próximo de A, e também avaliar sua inclinação. Caso se prossiga com esse experimento, ou seja, buscando pontos mais próximos de A, as

magnitudes de Δx vão ficando cada vez menores. Pode-se considerar uma situação no limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$. Neste caso, é fácil inferir que a inclinação do segmento de reta é dada pela tangente à curva no ponto A. Formalmente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

A inclinação de uma curva, em determinado ponto, ou seja, sua tangente neste ponto, é chamada de derivada. Ela mede a taxa instantânea de mudança de y com respeito a mudanças x e desempenha um papel fundamental na análise econômica. Por exemplo, freqüentemente, em economia, está-se interessado no(s) efeito(s) da mudança em determinada variável sobre outra(s) ou em identificar seu ponto de máximo ou mínimo, situação em que o conceito de derivada é muito útil.

Em um contexto geral, diz-se que uma função f(x) é **diferenciável** se o limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe para todos os valores de “x” no domínio da função. Para ser mais preciso, uma função f(x) é diferenciável em um ponto se ela é contínua e a tangente à curva nesse ponto é única. O simples fato de a função ser contínua não garante que ela seja diferenciável no ponto sob consideração. Por exemplo, se em determinado ponto do domínio da função há uma mudança brusca no gráfico da função, a tangente à curva nesse ponto pode não ser única. Na verdade, para que a tangente seja única, as mudanças na curva definida pelo gráfico da função devem ser suaves.

Os seguintes símbolos são utilizados para derivada: $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, y' e $\frac{d}{dx}[f(x)]$. Para ilustrar o cálculo da derivada (em qualquer ponto de seu domínio), considere a função y = 2x + 1. Utilizando o conceito de derivada, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + 1 - 2x - 1}{\Delta x}$$

Simplificando os termos do numerador, obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

Utilizar o conceito de derivada sempre que for fazer seu cálculo é trabalhoso e pouco eficiente. Em razão disso, dependendo do tipo da função, há regras específicas para o cálculo de sua derivada. Segundo Roberts e Schulze (1973), considerando que y = f(x) é uma função diferenciável, então, se:

a) f(x) = k (uma constante), f'(x) = 0.
b) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
c) $f(x) = kx^n$, $f'(x) = knx^{n-1}$.
d) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.
e) $f(x) = e^{kx}$, $f'(x) = ke^{kx}$.
f) $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = x^{-1}\log_a e$.
g) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = x^{-1}$.
h) f(x) = senx, f'(x) = cosx.
i) f(x) = cosx, f'(x) = -senx.

Suponha agora que f(x) e g(x) são duas funções diferenciáveis de "x". Então, as seguintes regras se aplicam:

j) Regra da soma-diferença:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

k) Regra do quociente:

$$\frac{d}{dx}[f(x)/g(x)] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

l) Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Outras regras de diferenciação úteis são:

m) Regra da função inversa. Se x = $f^{-1}(y)$ é uma função inversa, então sua derivada é dada por:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(dy/dx)}$$

n) Regra da cadeia. Se z = f(y) e y, por sua vez, é função de x, y = g(x), então a derivada da função composta z = f[g(x)] é dada por:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Para ilustrar a regra da cadeia, considere que $z = 5y^{-1} + 2y$ e $y = 3x^2$. Note que $\frac{dz}{dy} = -5y^{-2} + 2$ e $\frac{dy}{dx} = 6x$. Logo, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (-5y^{-2} + 2)6x$. Lembrando que $y = 3x^2$, a derivada procurada torna-se: $\frac{dz}{dx} = -\frac{10}{3}x^{-3} + 12x$.

As regras de diferenciação apresentadas podem ser generalizadas em vários aspectos. No caso das regras da soma-diferença, do quociente e produto, podem-se considerar mais de duas funções. Com base na regra da cadeia, pode-se também generalizar as regras das funções exponencial e logarítmica. No caso da função exponencial, suponha, por exemplo, que $y = e^{f(t)}$. Fazendo $u = f(t)$ e usando a regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[e^{f(t)}] = \frac{d}{dt}[e^{u}] = \frac{d}{du}e^{u}\frac{du}{dt} = e^{u}\frac{du}{dt} = e^{f(t)}f'(t)$$

No caso da função logarítmica, suponha, por exemplo, que $y = \ln f(t)$. Usando o procedimento anterior, faz-se $v = f(t)$ e aplica-se a regra da cadeia, ou seja:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}[\ln f(t)] = \frac{d}{dt}[\ln v] = \frac{d}{dv}\ln v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{f(t)} f'(t)$$

Outro tipo de generalização importante decorre do fato de que a própria derivada é também uma função e, por causa disso, pode também ser derivada novamente. Nesse caso, pode-se ter a derivada-segunda, derivada-terceira e assim por diante. Por exemplo, supondo que a função y = f(x) seja diferenciável sucessivamente, a derivada-segunda de "y" com respeito a "x", denotada por $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou f''(x), é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$, desde que o limite exista.

De modo geral, a n-ésima derivada de "y" com respeito a "x", denotada por $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $f^{(n)}(x)$, é fornecida por:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$, desde que o limite exista.

Na análise econômica, na maioria das vezes, especialmente na obtenção de ótimos de funções (máximo ou mínimo), as duas primeiras derivadas são suficientes. Isso é especialmente válido se as funções são estritamente côncavas ou convexas. Nesses casos, a primeira derivada é utilizada para identificar os pontos críticos (candidatos a ótimos) e a segunda, para identificar o tipo de curvatura da função (côncava ou convexa) no ponto crítico. Apenas em casos excepcionais, as duas primeiras derivadas não são suficientes para se chegar a resultados conclusivos. Na próxima seção deste capítulo, tratar-se-á desta questão no caso de funções com uma variável.

Até agora, tratou-se de regras de diferenciação de funções com um único argumento. O procedimento para o cálculo da derivada de funções com mais de um argumento é semelhante. Nesse caso, o processo

chama-se de **diferenciação parcial**. Seja a seguinte função $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ou seja, uma função cujos argumentos são $x_1, x_2, ..., x_n$. A **derivada parcial** de primeira ordem de y com respeito a x_i, denotada por $\partial y / \partial x_i$, mede a taxa instantânea de mudança de y com respeito a mudanças em x_i, todos os demais argumentos mantidos constantes.

Como no caso de funções de um único argumento, pode-se ter, no caso de funções com mais de um argumento, derivadas parciais de segunda-ordem, de terceira-ordem, etc. Uma propriedade interessante relacionada a derivadas parciais de segunda-ordem, conhecida como **Teorema de Young**, é a seguinte: se $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é contínua e tem derivadas parciais de primeira e segunda ordens, então $f_{ij} = f_{ji}$ para todo i e j, em que $f_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ e $f_{ji} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$. Em outras palavras, o que o teorema de Young diz é que as derivadas parciais cruzadas (derivadas de segunda ordem) de funções diferenciáveis com mais de um argumento são iguais.

Para ilustrar o teorema de Young, considere a seguinte função: $z = 5y^2x + 3x^{-1} + 2y$. As derivadas parciais de primeira e segunda ordens relacionadas com essa função são as seguintes:

$f_y = 10yx + 2$; $f_x = 5y^2 - 3x^{-2}$; $f_{yy} = 10x$; $f_{xx} = 6x^{-3}$; $f_{yx} = 10y$; $f_{xy} = 10y$.

Para finalizar esta seção, considere as seguintes funções: $z = f(x, y)$ e $y = g(x)$. A derivada dy/dx é calculada da seguinte forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Essa derivada é chamada de **derivada total**, sendo composta de duas partes: (a) o **efeito direto** de uma mudança de x sobre z, medido pela derivada parcial $\partial f / \partial x$; e (b) o **efeito indireto** de x sobre z, que ocorre através da variável y e é medido mediante a expressão

$(\partial f / \partial y)(dy / dx)$. Esse exemplo pode ser generalizado para comportar situações mais genéricas do que a apresentada[6].

O exemplo a seguir ilustra o conceito de continuidade de uma função e, no exemplo seguinte, faz-se uma aplicação do conceito de derivada na análise econômica (estática comparativa). Para iniciar, para que valor de "x" a função $y = \frac{1}{3e^{2x} - 3}$ é descontínua? [Resposta: Para x = 0, pois o denominador é anulado e não é possível a divisão por zero]. Agora, considere o seguinte modelo simples de mercado: $D = a - bP$ (demanda, com $a, b > 0$) e $S = -c + dP$ (oferta, com $c, d > 0$), cujo preço de equilíbrio é dado por $P^e = \frac{a+c}{b+d}$. Quais os sinais das derivadas parciais $\partial P^e / \partial a$ e $\partial P^e / \partial b$, respectivamente? [Resposta: $\partial P^e / \partial a > 0$ e $\partial P^e / \partial b < 0$]. (Observe, no primeiro caso, que o preço de equilíbrio aumenta com o aumento do intercepto *coeteris paribus* e, no segundo caso, há redução do preço de equilíbrio quando a curva de demanda torna-se negativamente mais inclinada *coeteris paribus*).

1.4. Otimização não-condicionada

Com os conhecimentos adquiridos das seções anteriores, especialmente os relacionados a funções, derivadas e álgebra linear, pode-se agora discutir técnicas efetivas para tratar de problemas econômicos. Uma dessas técnicas consiste em buscar máximos ou mínimos relativos de funções ou, numa designação genérica, técnicas de otimização, o que significa "busca do ótimo". Esse critério de maximizar ou minimizar uma função é comumente utilizado em economia. É o caso, por exemplo, de achar o lucro máximo de uma firma ou minimizar seu custo de produção.

Para ilustrar como o conceito de derivada pode ser útil nesse processo de busca do ótimo (máximo ou mínimo de uma função), considere

[6] Outra situação útil é considerar a derivada dy/dx como a razão de dois diferenciais, dy e dx. Dessa forma, quando $\Delta \to 0$ a expressão $\Delta y = (\Delta y / \Delta x)\, \Delta x$ torna-se $dy = f'.dx$. dy e dx são interpretados como mudanças infinitesimais em y e x, respectivamente.

as funções y = f(x) e y = g(x), cujos gráficos estão mostrados na Figura 1.5.

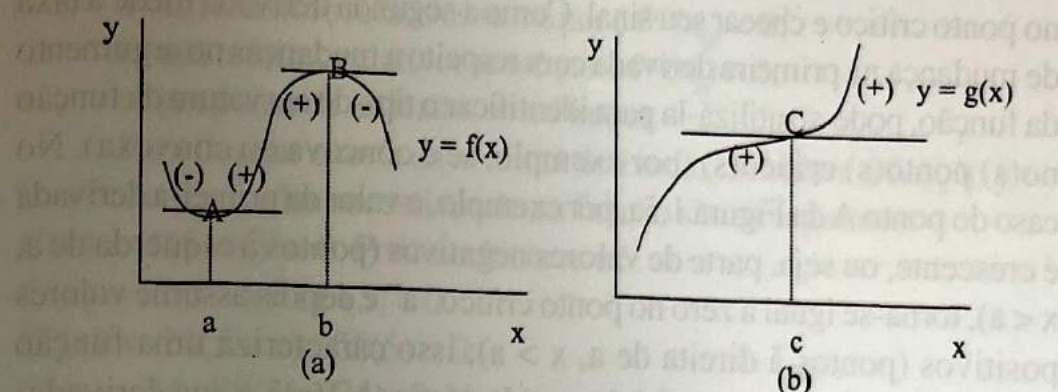



Figura 1.5 - Extremos relativos e ponto de inflexão

Na Figura 1.5 foram destacados três pontos: A e B, na Figura 1.5a, e C, na Figura 1.5b. Note-se que nesses três pontos a derivada (primeira) é igual a zero, ou seja, é paralela ao eixo horizontal. Quando a primeira derivada é igual a zero, o ponto crítico [(a, f(a)); (b, f(b)) ou (c, g(c))] é um extremo relativo (máximo ou mínimo) ou um ponto de inflexão. Para saber com certeza a natureza do ponto (mínimo, máximo ou de inflexão), precisa-se investigar na vizinhança do ponto em questão. Por exemplo, na vizinhança do ponto A, a derivada à esquerda de "a" ($x < a$) é negativa e à sua direita ($x > a$) é positiva; isso caracteriza um ponto de **mínimo relativo**. Na vizinhança do ponto B ocorre o contrário, ou seja, a derivada à esquerda de "b" ($x < b$) é positiva e à sua direta ($x > b$) é negativa; isso caracteriza um ponto de **máximo relativo**. Por fim, no caso do ponto C, o sinal da derivada não muda, ou seja, na vizinhança de "c" a derivada é positiva tanto antes quanto depois desse ponto; isso caracteriza um **ponto de inflexão**, ou seja, um ponto em que há mudança de concavidade da função.

Esse procedimento de análise do sinal da derivada na vizinhança do ponto crítico para saber se é um máximo relativo, mínimo relativo ou

ponto de inflexão é trabalhoso e um pouco arbitrário, pois precisa-se escolher a magnitude dessa vizinhança para checar o sinal da primeira derivada. Uma forma mais direta de fazer isso é calcular a segunda derivada no ponto crítico e checar seu sinal. Como a segunda derivada mede a taxa de mudança na primeira derivada com respeito a mudanças no argumento da função, pode-se utilizá-la para identificar o tipo de curvatura da função no(s) ponto(s) crítico(s) (por exemplo, se é côncava ou convexa). No caso do ponto A da Figura 1.5a, por exemplo, o valor da primeira derivada é crescente, ou seja, parte de valores negativos (pontos à esquerda de a, $x < a$), torna-se igual a zero no ponto crítico "a" e depois assume valores positivos (pontos à direita de a, $x > a$); isso caracteriza uma função estritamente convexa na vizinhança do ponto (a, f(a)), e sua derivada-segunda, neste ponto, é estritamente positiva. Portanto, o fato de a derivada segunda no ponto crítico ser estritamente positiva é **condição suficiente** para garantir que o ponto crítico é um mínimo relativo. A derivada primeira igual a zero seria a **condição necessária** (de primeira ordem) na avaliação da natureza do ponto em questão.

Procedimento semelhante pode ser utilizado para os outros pontos da Figura 1.5. No caso do ponto B, ocorre o contrário quando comparado ao ponto A, ou seja, no ponto crítico (b, f(b)), a derivada-segunda é estritamente negativa, o que é condição suficiente para garantir que se trata de um máximo relativo. O ponto C é um caso à parte. Como há mudança de concavidade da função, ou seja, a função é côncava antes de "c" e depois torna-se convexa, a derivada-segunda é igual a zero no ponto crítico. O problema é que nem sempre o fato de a derivada-segunda ser zero no ponto crítico assegura que ele é um ponto de inflexão, ou seja, o teste da derivada-segunda quando esta é igual a zero no ponto crítico é inconclusivo para inferir a concavidade/convexidade de funções. Nesse caso, deve-se recorrer a um outro teste, chamado de "teste da n-ésima derivada para extremos relativos de uma função de uma variável". Este novo teste consiste no seguinte (CHIANG, 1982): seja uma função $y = f(x)$ que pode ser derivada sucessivamente n vezes; se sua derivada primeira em x_0 é $f'(x_0) = 0$, e se a primeira derivada não-nula, em x_0, que se obtém

por derivação sucessiva é a derivada n-ésima, $f^{(n)}(x_0)$, então o ponto crítico $(x_0, f(x_0))$ é:

a) um máximo relativo, se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$;
b) um mínimo relativo, se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$;
c) um ponto de inflexão, se n é ímpar.

Para ilustrar o teste da n-ésima derivada, considere a função $y = (5 - x)^4$. As derivadas sucessivas dessa função são as seguintes:

- $f'(x) = -4(5 - x)^3 = 0$. Ponto crítico: $x = 5$.
- $f''(x) = 12(5 - x)^2$; $f''(5) = 0$.
- $f^{(3)}(x) = -24(5 - x)$; $f^{(3)}(5) = 0$.
- $f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(4)}(5) = 24 > 0$. Note que: $n = 4$, um número par.

Portanto, pelo teste da n-ésima derivada, o ponto (5, 0), na função $y = (5 - x)^4$, é um mínimo relativo, pois $n = 4$ é par e $f^{(4)}(5) = 24 > 0$.

Os testes recém-discutidos, para o caso de funções com um único argumento, podem ser resumidos da seguinte forma, tomando-se como ponto crítico $x = x_0$:

a) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo (convexa em $x = x_0$).
b) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ máximo relativo (côncava em $x = x_0$).
c) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ ponto de inflexão, se a curva definida pelo gráfico da função muda de concavidade em $x = x_0$; caso contrário, deve-se realizar o teste da n-ésima derivada para definir sobre a natureza do ponto crítico.

Esses resultados podem ser obtidos também de forma alternativa, mediante a expansão de Taylor. Caso se queira aproximar o valor da função $y = f(x)$ na vizinhança do ponto crítico $x = x_0$, vizinhança esta denotada por $x_0 + dx$, pode-se usar a expansão de Taylor, que é dada por:

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + (1/2!)f''(x_0)(dx)^2 + ... + (1/n!)f^{(n)}(x_0)(dx)^n + ...$$

Essa expressão pode ser aproximada por:

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx + (1/2!)f''(x_0)(dx)^2$$

Os termos restantes foram considerados insignificantes. Observe que "dx" é um valor arbitrariamente pequeno e, quando elevado à potência, torna-se cada vez menor, ainda mais quando dividido por fatoriais de ordem superior. Sabendo que, no ponto crítico, $f'(x_0) = 0$, a expressão simplificada anterior torna-se:

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = (1/2!)f''(x_0)(dx)^2$$

A interpretação é simples: se em $x = x_0$ o ponto $(x_0, f(x_0))$ for de máximo, então $[f(x_0 + dx) - f(x_0)] < 0$, o que é equivalente a $f''(x_0) < 0$, pois os outros termos, $(1/2!)$ e $(dx)^2$, são positivos, ou seja, a função $y = f(x)$ é estritamente côncava na vizinhança de x_0. Por outro lado, se em $x = x_0$ o ponto $(x_0, f(x_0))$ for de mínimo, então $[f(x_0 + dx) - f(x_0)] > 0$, o que é equivalente a $f''(x_0) > 0$, ou seja, a função $y = f(x)$ é estritamente convexa na vizinhança de x_0.

Essa análise de otimização não-condicionada pode ser generalizada para considerar funções com mais de um argumento. Supondo que a função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ possui derivadas parciais de primeira e segunda ordem, as regras para definir se o ponto crítico (se existir algum) é de máximo ou de mínimo estão resumidas na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 - Condições para um extremo relativo de funções com mais de um argumento - (caso não-condicionado)

Condição	**Máximo**	**Mínimo**
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = ... = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = ... = f_n = 0$
Segunda ordem	$\|H_1\|<0; \|H_2\|>0; \|H_3\|<0; ...$	$\|H_1\|; \|H_2\|; ...; \|H_n\|>0$

em que f_i ($i = 1, 2, ..., n$), na Tabela 1.1, refere-se à derivada parcial primeira da função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ com relação ao seu argumento x_i e $|H_i|$ ($i = 1, 2, ..., n$), aos menores principais (determinantes) obtidos da seguinte matriz **hessiana**:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix},$$

em que f_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$) são derivadas de segunda ordem da função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ com relação aos seus argumentos. Pelo teorema de Young, sabe-se que a matriz hessiana é simétrica. Os menores principais que podem ser obtidos dessa matriz são os seguintes:

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11}; \; |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}; \; |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}; \dots$$

No caso de a função "z" possuir apenas dois argumentos, ou seja, $y = f(x, y)$, as condições de segunda ordem podem ser reescritas da seguinte forma:

- Máximo relativo: $f_{xx}, f_{yy} < 0$ e $(f_{xx})(f_{yy}) > (f_{xy})^2$.
- Mínimo relativo: $f_{xx}, f_{yy} > 0$ e $(f_{xx})(f_{yy}) > (f_{xy})^2$.

Essas condições de segunda ordem para uma função com dois argumentos são idênticas às definidas na Tabela 1.1, usando o conceito de menor principal. Se uma função com dois argumentos não satisfizer as condições de primeira e segunda ordem definidas anteriormente, podem ocorrer as seguintes situações (DOWLING, 1980):

a) Se $(f_{xx})(f_{yy}) < (f_{xy})^2$, quando f_{xx} e f_{yy} possuírem os mesmos sinais, o ponto crítico é um ponto de inflexão; quando f_{xx} e f_{yy} possuírem sinais diferentes, o ponto crítico é um **ponto-sela**.

b) Se $(f_{xx})(f_{yy}) = (f_{xy})^2$, o teste é inconclusivo.

Para ilustrar as técnicas de otimização não-condicionada em um problema econômico, considere o seguinte exemplo retirado de Chiang (1982). Uma firma, em competição pura, produz dois produtos, Q_1 e Q_2, cujos respectivos preços são dados por P_1 e P_2. A função de receita

dessa firma é dada por $RT = P_1Q_1 + P_2Q_2$, e a de custo, por $CT = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$. Com essas informações, pode-se construir a seguinte função de lucro dessa firma:

$$\Pi = RT - CT = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

O problema consiste em encontrar os níveis de Q_1 e Q_2 que, combinados, maximizam o lucro (Π) da firma. Dada a função de lucro, primeiro encontram-se as derivadas parciais de primeira ordem, que são dadas por:

$$\Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = P_1 - 4Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\Pi_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = P_2 - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

que, igualadas a zero, geram as soluções: $Q_1^* = (4P_1 - P_2)/15$ e $Q_2^* = (4P_2 - P_1)/15$.

Supondo que $P_1 = 12$ e $P_2 = 18$ (lembrar que em competição pura os preços são dados, ou seja, são exógenos ao modelo), tem-se que $Q_1^* = 2$ e $Q_2^* = 4$, o que gera um lucro ótimo de $\Pi^* = 48$ por unidade de tempo. Para ter certeza que se trata do lucro máximo, precisa-se testar a condição de segunda ordem, ou seja, obter o hessiano e checar os sinais dos menores principais respectivos, ou seja:

$$|H| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix},$$ em que $|H_1| = -4 < 0$ e

$|H_2| = 15 > 0$

o que assegura que a solução obtida, de fato, maximiza o lucro da firma.

1.5. Otimização condicionada

Na seção anterior tratou-se de otimização não-condicionada –

uma situação em que o agente econômico não estaria restrito ao tomar sua decisão. Seria o caso, por exemplo, de um consumidor que possuiria uma renda ilimitada para ser usada no consumo (compra) de dois bens, ou seja, o consumidor poderia adquirir esses dois bens até atingir o máximo de utilidade que fosse possível. Entretanto, na maioria das situações não é o que ocorre, pois tanto o consumidor quanto uma firma possuem restrições com relação aos seus respectivos orçamentos. Em razão disso, precisa-se adaptar as regras para extremos relativos definidas anteriormente para considerar os casos em que os agentes econômicos estão restritos ao tomarem suas decisões.

Para ilustrar o caso de otimização condicionada, ou seja, a situação em que o agente econômico está sujeito a uma restrição, considere o seguinte exemplo: um consumidor possui a seguinte função (ordinal) de utilidade:

$$U = Q_1Q_2 + 2Q_2$$

em que Q_1 e Q_2 representam dois bens, cujos preços são 1 e 2, respectivamente. Supondo que o consumidor dispõe de $ 20 para gastar com os dois bens, durante determinado período de tempo, pode-se formar a seguinte restrição orçamentária:

$$Q_1 + 2Q_2 = 20$$

Note que o consumidor, em princípio, para maximizar sua utilidade, na ausência de uma restrição orçamentária, teria de consumir quantidades infinitas dos dois bens. Com a restrição orçamentária, a quantidade a consumir dos dois bens está sujeita à disponibilidade de renda do consumidor. Como resolver esse novo problema? Por ser um problema simples, podem-se utilizar as regras de otimização não-condicionada discutidas na seção anterior. Para isso, basta isolar Q_1 na equação da restrição orçamentária para obter $Q_1 = 20 - 2Q_2$ e substituir esse resultado na função de utilidade do consumidor para obter:

$U = (20 - 2Q_2)Q_2 + 2Q_2 = 22Q_2 - 2(Q_2)^2$

Note que se tem agora uma função utilidade que não está sujeita a uma restrição orçamentária explícita e pode-se, portanto, aplicar diretamente as regras para problemas não-condicionados discutidas na seção anterior. Dessa forma, aplicando as condições de primeira ordem, tem-se:

$\frac{dU}{dQ_2} = 22 - 4Q_2 = 0$, que, resolvendo, obtém-se: $Q_2 = 5{,}5$.

Substituindo esse valor de Q_2 na equação da restrição orçamentária, obtém-se o valor para $Q_1 = 9$. Observe que esses valores satisfazem a restrição orçamentária e proporcionam a máxima utilidade que o consumidor pode obter.

Essa técnica de isolar uma variável da equação de restrição e substituí-la na função objetivo (função a ser otimizada) funciona bem para problemas mais simples. Entretanto, para problemas mais complexos sua aplicação torna-se mais difícil. Precisa-se, portanto, de uma técnica mais apropriada para tratar de problemas de otimização condicionada. Essa técnica consiste em reescrever a função objetivo de forma a incorporar explicitamente a restrição, formando uma nova função, chamada de função de Lagrange. No caso do problema do consumidor discutido anteriormente, a função de Lagrange toma a seguinte forma:

$$L = Q_1Q_2 + 2Q_2 + \lambda(20 - Q_1 - 2Q_2)$$

Note-se que, ao escrever a função de Lagrange, surgiu uma nova variável, λ, chamada de **multiplicador de Lagrange**. A interpretação dessa variável é a de um preço-sombra que mede os efeitos sobre a função objetivo da flexibilização da restrição. A grande vantagem do uso da função de Lagrange é que ela transforma um problema de otimização condicionado em um não-condicionado, o que permite usar as regras discutidas na seção anterior. Agora, entretanto, ao derivar as condições de primeira ordem a partir da função de Lagrange, deve-se levar em conta também a variável

1. Dessa forma, as condições de primeira-ordem são:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = Q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = Q_1 + 2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20 - Q_1 - 2Q_2 = 0$$

Note que a terceira equação assegura que a restrição é satisfeita no ponto ótimo. Isolando λ na equação 1 e substituindo seu valor na segunda equação, obtém-se um sistema com duas equações e duas incógnitas, cuja solução pode ser obtida mediante a inversa da matriz de coeficientes ou utilizando a regra de Cramer. Resolvendo o sistema de equações por qualquer um desses métodos alternativos, obtém-se $Q_1 = 9$ e $Q_2 = 5{,}5$, ou seja, os mesmos valores obtidos anteriormente.

O método de Lagrange pode facilmente ser estendido para considerar funções com mais de um argumento. Considere, por exemplo, a função objetivo $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeita à restrição $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, em que "c" é uma constante. A partir dessas informações, forma-se a seguinte função de Lagrange:

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

As condições de primeira ordem são dadas por:

$$L_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$L_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

....

$$L_n = f_n - \lambda g_n = 0$$

$$L_\lambda = c - g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

em que $L_i = \partial L / x_i$ (i = 1, 2, ..., n) e $L_\lambda = \partial L / \partial \lambda$.

A resolução do sistema de equações definido pelas condições de primeira ordem permite identificar um ponto crítico. Diferenciando novamente as condições de primeira ordem e avaliando as derivadas parciais resultantes no ponto crítico, os valores finais podem ser organizados de acordo com a seguinte matriz hessiana orlada:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

cujos menores principais orlados (determinantes) são definidos como:

$$\left|\bar{H}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}; \quad \left|\bar{H}_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}; \ldots$$

De forma semelhante ao caso de otimização não-condicionada, pode-se derivar as condições de segunda ordem do problema de otimização condicionado com função objetivo com mais de um argumento e sujeito a uma restrição a partir das informações dos menores principais orlados. Dessa forma, se a função objetivo $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está sujeita à restrição $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, então as condições para o extremo condicionado (máximo ou mínimo) obedecem às regras definidas na Tabela 1.2.

Tabela 1.2 - Condições para um extremo relativo de funções com mais de um argumento - (caso condicionado)

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$L_1 = L_2 = ... = L_n = L_\lambda = 0$	$L_1 = L_2 = ... = L_n = L_\lambda = 0$
Segunda ordem	$\lvert\bar{H}_2\rvert > 0; \lvert\bar{H}_3\rvert < 0; \lvert\bar{H}_4\rvert > 0;...$	$\lvert\bar{H}_2\rvert; \lvert\bar{H}_3\rvert; \lvert\bar{H}_4\rvert < 0;...$

em que L_i (i = 1, 2, ..., n) refere-se às derivadas parciais primeiras da função de Lagrange, que são igualadas a zero para encontrar os pontos críticos (condições de primeira ordem), e $\lvert H_{i+1}\rvert$ (i = 1, 2, ..., n – 1) refere-se aos menores principais orlados, cujos sinais são utilizados para checar as condições de segunda ordem.

Podem-se considerar casos mais gerais de problemas condicionados, ou seja, funções com mais de um argumento e várias restrições. Nesse caso, a orla do hessiano orlado é composta de mais de uma linha e mais de uma coluna, e as condições para um extremo relativo mudam ligeiramente em relação ao caso com uma restrição definido na Tabela 1.2. Para mais detalhes sobre as condições para um extremo relativo nesses casos mais gerais (com várias restrições), o leitor pode consultor Chiang (1982) ou um outro autor que aborde técnicas matemáticas de otimização em economia.

Em todas essas técnicas de otimização discutidas até agora assume-se que o ponto ótimo ocorre no interior do domínio das funções consideradas, ou seja, ignora-se a possibilidade de solução ótima de canto. Para tratar de casos mais gerais, ou seja, de casos que admitem a possibilidade de solução de canto, deve-se recorrer às condições de Kuhn-Tucker. Essas condições são discutidas na próxima seção.

1.6. Condições de Kuhn-Tucker

As condições de Kuhn-Tucker são as condições de primeira ordem para um máximo ou mínimo relativo em que as restrições apresentam desigualdades. Para verificar o efeito de condições de não-negatividade,

uma restrição bastante comum em economia, considere o seguinte problema:

Maximizar $Z = f(x)$
Sujeito a $x \geq 0$.

Note que são possíveis três situações, ilustradas na Figura 1.6.

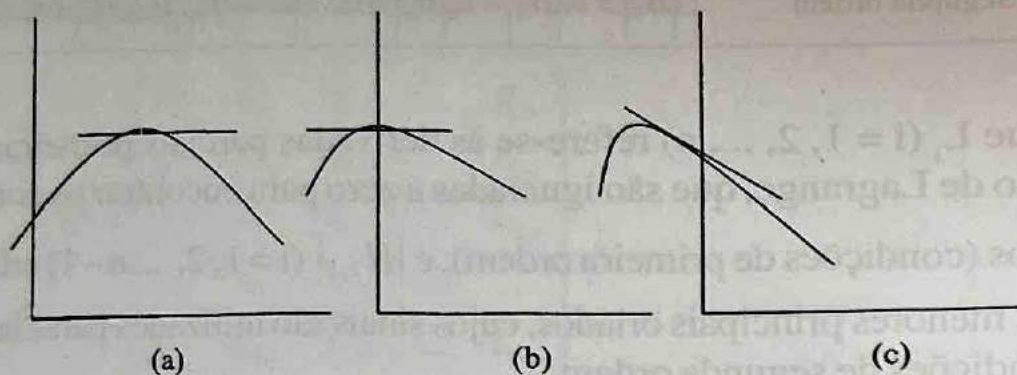



Figura 1.6 - Efeito de condições de não-negatividade

Note que na Figura 1.6a tem-se uma solução interior, ou seja, $f'(x) = 0$ e $x > 0$. Na Figura 1.6b, tem-se uma solução de canto, ou seja, $f'(x) = 0$ e $x = 0$. Nesses dois primeiros casos, as técnicas de otimização discutidas anteriormente continuam válidas. Agora, na Figura 1.6c, tem-se uma solução de canto cuja análise requer as condições de Kuhn-Tucker. Observe que no ponto ótimo (Figura 1.6c) tem-se $f'(x) < 0$ e $x = 0$. Essas três situações (condições) podem ser resumidas da seguinte forma:

$$f'(x) \leq 0; \quad x \geq 0; \text{e} \quad x^* f'(x) = 0$$

Essas condições são as de Kuhn-Tucker para esse problema simples. A primeira condição é usualmente chamada de **marginal**, a segunda, de **condição de não-negatividade**, e a terceira e última, de **condição de folga complementar.**

As condições de Kuhn-Tucker podem ser generalizadas facilmente para considerar mais de uma variável de decisão e desigualdades em mais de uma restrição. Seja, por exemplo, o seguinte problema:

Maximizar $Z = f(x_1, x_2, ... x_n)$
Sujeito a: $g^1(x_1, x_2, ... x_n) \leq b_1$
$g^2(x_1, x_2, ... x_n) \leq b_2$
....
$g^m(x_1, x_2, ... x_n) \leq b_m$
$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$.

Procedendo como nos casos de otimização condicionada, forma-se a seguinte função de Lagrange:

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g^i(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

As condições de Kuhn-Tucker são dadas por:

a) $L_{x_j} \leq 0$; $x_j \geq 0$; e $x_j L_{x_j} = 0$ (j = 1, 2,..., n)

b) $L_{\lambda_i} \geq 0$; $\lambda_i \geq 0$; e $\lambda_i L_{\lambda_i} = 0$ (i = 1, 2,..., m).

Desde que exista solução viável, no ótimo, o problema deve satisfazer as condições de Kuhn-Tucker. No caso de minimização, as condições são as mesmas; apenas os sinais das desigualdades das condições marginais devem ser invertidos. Note que essas condições (necessárias) são também suficientes para ótimos globais, se a função objetivo a ser maximizada (minimizada) for côncava (convexa) e o conjunto de soluções viáveis formado pelas restrições for convexo.

Para finalizar esta seção, considere o seguinte exemplo retirado de Chiang (1982). Uma determinada firma deseja maximizar suas vendas (receitas) e estabelece um lucro mínimo, $\Pi_0 = 18$, a ser atingido. A função de receita desta firma é dada por $R = 32Q - Q^2$, e a sua função de custo, por $C = Q^2 + 8Q + 4$, em que Q é a quantidade comercializada (não há possibilidade de estoque). Note-se que $\Pi = R - C \geq \Pi_0$ ou $C - R \leq \Pi_0$. Dessa forma, pode-se reescrever o problema do seguinte modo:

Maximizar $R = 32Q - Q^2$
Sujeito a: $2Q^2 - 24Q + 4 \leq -18$
$Q \geq 0$.

O próximo passo para resolver o problema é formar a função de Lagrange e derivar as condições de Kuhn-Tucker. As condições marginais são dadas por:

$$\partial L/\partial Q = 32 - 2Q - \lambda(4Q - 24) \leq 0 \text{ e } \partial L/\partial\lambda = -2Q^2 + 24Q - 22 \geq 0$$

Note que o valor de Q deve ser positivo ou nulo. Se Q = 0, a segunda condição marginal é violada. Portanto, deve-se ter Q > 0. Com isso, tem-se, pela condição de folga complementar, que $\partial L/\partial Q = 0$, o que transforma a primeira condição marginal numa equação com duas incógnitas (Q e λ). Fazendo $\lambda = 0$ e resolvendo para Q, obtém-se Q = 16, que, como pode ser constatado, não satisfaz à segunda condição marginal. Decorre, então, que $\lambda > 0$ e, pela condição de folga complementar, $\partial L/\partial\lambda = 0$. Resolvendo esta equação, obtêm-se duas raízes: $Q_1 = 1$ e $Q_2 = 11$. Note que apenas a segunda raiz é consistente com $\partial L/\partial Q = 0$.. Portanto, $Q_2 = 11$ é o nível de produção que maximiza as vendas. Observe também que, neste exemplo, as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para o ótimo, pois a função objetivo (função de receita) é côncava e a restrição do problema é convexa.

1.7. Referências

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil/EDUSP, 1982. 684 p.

DOWLING, E.T. **Introduction do mathematical economics**. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1980. 485 p. (Shaum's Outline Series).

JOHNSTON, J. **Econometric methods**. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1984. 568 p.

ROBERTS, B.; SCHULZE, D.L. **Modern mathematics and economic analysis**. Toronto: W.W. Norton, 1973. 550 p.

SILVA, S.M.; SILVA, E.M.; SILVA, E.M. **Matemática para os cursos de economia, administração e ciências contábeis**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999. v. 1, 310 p.

WEBER, J.E. **Matemática para economia e administração**. São Paulo: Harbra, 1986. 674 p.

CAPÍTULO 2

Otimização dinâmica em economia

Wilson da Cruz Vieira[1]
Rodrigo Vilela Rodrigues[2]

Este capítulo trata de algumas técnicas matemáticas que são utilizadas na análise dinâmica de problemas econômicos. Basicamente, são consideradas as técnicas de integração, resolução de (sistemas) equações diferenciais e uso do princípio máximo da teoria do controle ótimo. Essas técnicas serão discutidas com detalhes nas próximas seções deste capítulo.

2.1. Integração[3]

O processo de **integração** reverte as regras de diferenciação vistas no capítulo anterior. Em outras palavras, integração é o processo de encontrar uma função cuja derivada está dada. Supondo que a função original ou primitiva seja representada por y = F(x) e que sua derivada seja dada por dF(x)/dx = f(x), diz-se que F(x) é a **integral** de f(x) com respeito a x e utiliza-se a seguinte a notação:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

em que $\int$ é o símbolo da integral; f(x), o integrando; "dx" indica que o cálculo da integral está sendo feito com respeito à variável independente "x"; F(x) é a integral de f(x); e "c", uma constante de integração. É preciso

[1] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: wvieira@ufv.br.
[2] Professor da Universidade Federal Fluminense, campus de Volta Redonda. e-mail: rvilela@vm.uff.br.
[3] Esta seção baseia-se em Roberts e Schulze (1973) e Chiang (1982).

adicionar essa constante, pois, no processo de diferenciação, se houver uma constante, ela é perdida quando se obtém a derivada. Se existir informação adicional no cálculo da integral, essa constante pode ser calculada e assumir um valor específico.

Para ilustrar o cálculo da integral, suponha que se deseja encontrar a função cuja derivada é dada por f(x) = x + 2. Utilizando o símbolo de integração, tem-se:

$$\int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

Para checar se o cálculo está correto, basta diferenciar a integral $F(x) = x^2/2 + 2x + c$ com respeito a x, ou seja:

dF(x)/dx = x + 2, o que é idêntico ao integrando.

Como mencionado anteriormente, na integração reverte-se o processo de diferenciação. Dessa forma, podem-se utilizar as regras de diferenciação apresentadas no capítulo anterior para definir as seguintes regras de integração. Considerando-se "a", "n" e "c" como constantes, essas regras são (ROBERTS; SCHULZE, 1973):

a) $\int dx = x + c$. Note-sè que f(x) = 1.

b) $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + c$, $c = c_1 + c_2$ e dG(x)/dx = g(x).

c) $\int adx = a\int dx = a(x + c_1) = ax + c$, em que $c = ac_1$.

d) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$.

e) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$.

f) $\int e^x dx = e^x + c$.

g) $\int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)dx = F(x) + c$. Note que esta regra de integração é a contrapartida da regra da cadeia.

h) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$.

Para ilustração do uso dessas regras, considere o cálculo da seguinte integral:

$$\int (x^5 + 7x^{-2})dx = \int x^5 dx + 7\int x^{-2} dx = \frac{x^6}{6} - 7x^{-1} + c$$

Freqüentemente, calcular a integral de uma função é mais difícil do que obter sua derivada. Dessa forma, nem sempre as regras recém-apresentadas são suficientes para calcular todas as integrais. Nos casos mais difíceis, deve-se recorrer a outras regras ou métodos de integração. A seguir apresentam-se duas novas regras: **integração por partes** e o **método de substituição**. Na integração por partes, recorre-se ao resultado do diferencial do produto de duas funções, que pode escrito da seguinte forma para as funções genéricas u e v (ROBERTS; SCHULZE, 1973):

d[uv] = udv + vdu ou, de forma alternativa, udv = d[uv] – vdu.

Integrando ambos os lados dessa expressão, obtém-se:

$$\int udv = uv - \int vdu + c$$

A idéia básica, ao usar a integração por partes, é tentar encaixar a integral a ser calculada nessa estrutura. Para ilustrar seu uso, considere o cálculo da seguinte integral: $\int \ln x dx$. Observe que não é possível calcular essa integral a partir das regras definidas anteriormente. Para usar o método de integração por partes, faz-se u = lnx e dv = dx, a partir do qual obtém-se du = (1/x)dx e v = x. Essas informações são usadas na expressão da

integração por partes da seguinte forma:

$$\int \ln x dx = (\ln x)x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx = x\ln x - x + c.$$

O resultado pode ser checado, bastando, para isso, derivar a integral resultante para obter o integrando. O método de substituição, como o título sugere, consiste na simplificação do integrando por substituição. Este método será apresentado mediante um exemplo. Suponha que se deseja calcular a seguinte integral:

$$\int (x^5 + x^2)(2x^6 + 4x^3)dx$$

Caso se multipliquem os dois termos do integrando, podem-se utilizar as regras de integração definidas anteriormente para calcular a integral. Entretanto, uma forma alternativa para obter a integral é utilizar o método de substituição. Fazendo $u = 2x^6 + 4x^3$ e tomando o diferencial, obtém-se $du = 12(x^5 + x^2)dx$ ou, ainda, $dx = du/[12(x^5 + x^2)]$. Com essas informações, pode-se reescrever a integral inicial, ou seja:

$$\int (x^5 + x^2)(2x^6 + 4x^3)dx = \int (x^5 + x^2)u\frac{du}{12(x^5 + x^2)} = \frac{1}{12}\int udu = \frac{u^2}{24} + c$$

Como se sabe que $u = 2x^6 + 4x^3$, a integral buscada é igual a:

$$\int (x^5 + x^2)(2x^6 + 4x^3)dx = \frac{(2x^6 + 4x^3)^2}{24} + c$$

As integrais discutidas até agora são chamadas de **integrais indefinidas**, ou seja, são expressas como funções. Contudo, podem-se calcular as chamadas **integrais definidas**, que são representadas por valores numéricos específicos. O cálculo das integrais definidas baseia-se no seguinte teorema, que não será provado, mas apenas enunciado (ROBERTS; SCHULZE, 1973). Trata-se do teorema fundamental do cálculo integral, que diz que, se uma função $y = f(x)$ é contínua no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, então:

a) $\int f(x)dx$ existe nesse intervalo; e

b) para quaisquer pontos a e b no intervalo, a integral definida é

dada por:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$, em que $\int f(x)dx = F(x) + c$ e a e b são os limites inferior e superior de integração, respectivamente. Para ilustrar o cálculo da integral definida, seja o seguinte exemplo:

$$\int_0^2 3x^2 dx = x^3 \,|_0^2 = (2)^3 - (0)^3 = 8$$

A interpretação geométrica da integral definida é a da área sob uma curva. Para entender essa relação, considere a Figura 2.1, que mostra o gráfico de uma função.

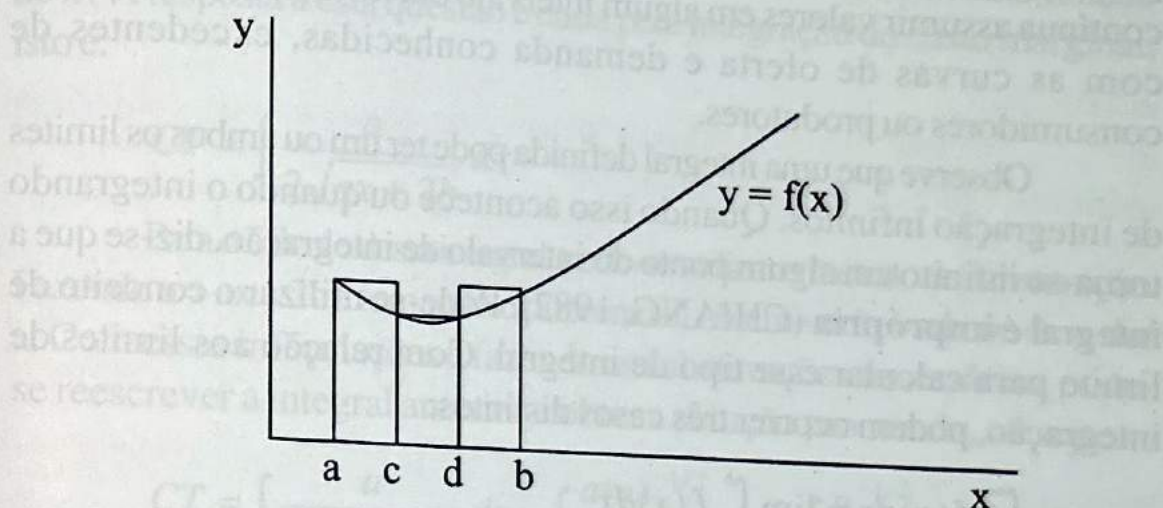



Figura 2.1 - Ilustração do cálculo da área sob uma curva

Suponha que se deseja calcular a área sob a curva y = f(x) e o eixo "x" no intervalo entre "a" e "b" (Figura 2.1). Dividiu-se esse intervalo em três partes com a mesma dimensão, que se pode denotar por Δx. Pode-se aproximar a área procurada calculando as áreas dos três retângulos marcados na Figura 2.1, da seguinte forma:

$$\text{Área} = f(a)\Delta x + f(c)\Delta x + f(b)\Delta x$$

Note que essa aproximação pode ser melhorada se for reduzido o tamanho do subintervalo Δx, o que é o mesmo que aumentar o número deles. No limite, ou seja, quando Δx → 0, tem-se que o número de intervalos, n, tende ao infinito, ou seja, n → ∞, e a verdadeira área procurada pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\acute{A}rea = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ou seja, o valor associado à integral definida dá o valor da área sob uma curva no intervalo considèrado. Do ponto de vista econômico, essa área pode representar, por exemplo, a probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir valores em algum intervalo ou, no caso de um mercado com as curvas de oferta e demanda conhecidas, excedentes de consumidores ou produtores.

Observe que uma integral definida pode ter um ou ambos os limites de integração infinitos. Quando isso acontece ou quando o integrando torna-se infinito em algum ponto do intervalo de integração, diz-se que a integral é **imprópria** (CHIANG, 1982). Pode-se utilizar o conceito de limite para calcular esse tipo de integral. Com relação aos limites de integração, podem ocorrer três casos distintos:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ou ainda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)dx .$$

No primeiro caso, o limite superior de integração tende ao infinito e, no segundo, é o limite inferior que tende ao infinito. No terceiro caso, tanto o limite inferior quanto o superior tendem ao infinito. Quando o limite associado à integral imprópria existe e é finito, diz-se que a integral dada é **convergente**; caso contrário, diz-se que ela é **divergente**.

Seja o seguinte exemplo de uma integral imprópria:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

cujo cálculo mostra que se trata de uma integral convergente.

A seguir são apresentados alguns exemplos de uso do cálculo integral na resolução de problemas econômicos. Em um primeiro exemplo, suponha que $CMg = a/\left[2\sqrt{ax+2b}\right]$ seja o custo marginal de uma firma cujo custo fixo é igual a zero. Qual o custo total desta firma como função de x? A resposta a esta questão é dada pela integração do custo marginal, isto é:

$$CT = \int \frac{a}{2\sqrt{ax+2b}}\,dx$$

Para o cálculo desta integral, pode-se utilizar o método de substituição. Fazendo u = ax + 2b e tomando o diferencial, obtém-se du = adx ou dx = du/a. Com essas informações e fazendo as substituições necessárias, pode-se reescrever a integral anterior e obter a solução procurada, ou seja:

$$CT = \int \frac{a}{2\sqrt{ax+2b}}\,dx = \int \frac{a(u)^{-1/2}}{2}\,dx = \int \frac{u^{-1/2}}{2}\,du = u^{1/2} + c$$

Como o custo fixo é igual a zero, logo, c = 0. Com isso, a função de custo total procurada da firma é dada por:

$$CT = \sqrt{ax+2b}$$

Considere agora um segundo exemplo. Em um mercado de competição perfeita, cujas oferta e demanda por determinado produto são dadas por $P = Q + 2$ e $P = 4 - Q^2$, respectivamente, em que P é o preço e Q a quantidade, deseja-se calcular os excedentes do consumidor e do ofertante (produtor). Nesse mercado, o preço e a quantidade de equilíbrio são dados por $P^e = 3$ e $Q^e = 1$, respectivamente. Os excedentes procurados são fornecidos pelas seguintes integrais definidas:

$$Exc.Cons. = \int_0^1 (4 - Q^2)dQ = 4Q - \frac{Q^3}{3}\Big|_0^1 - (1)(3) = \frac{11}{3}$$

$$Exc.Prod. = (1)(3) - \int_0^1 (Q + 2)dQ = 3 - \left[\frac{Q^2}{2} + 2Q\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

O leitor que tenha tido dificuldade para entender as expressões para o cálculo dos excedentes do consumidor e produtor pode desenhar em um gráfico as curvas de oferta e demanda e identificar o equilíbrio do mercado. Os excedentes calculados referem-se a áreas específicas desse gráfico (note que os limites de integração vão da origem à quantidade de equilíbrio).

Para finalizar esta seção, propõem-se os seguintes exemplos (com respostas) para o leitor tentar resolver.

a) A receita marginal da venda de determinado produto é dada por $dR/dQ = 3Q^2 + 2Q$, em que R é a receita total e Q o produto. Qual a receita total proveniente da venda de duas unidades deste produto? [Resposta: 12].
b) A taxa de investimento líquido (I) de determinada firma é igual a $I = dK/dt = 16t^{3/5}$ e o estoque de capital (K) em t = 0 é 50. Qual a função representativa da evolução do estoque de capital? [Resposta: $K(t) = 10t^{8/5} + 50$].

2.2. Equações diferenciais[4]

Equação diferencial é um tipo de equação que expressa uma relação explícita ou implícita entre uma função y = f(x) e uma ou mais de suas derivadas. Se a função possui apenas um argumento, a equação diferencial é chamada de **ordinária**; se houver mais de um argumento, ela

[4] Esta seção baseia-se em Chiang (1982) e Zill (2003).

é chamada de **parcial**. Por exemplo, $dy/dx - 5 = 0$ é uma equação diferencial ordinária. Diferentemente de uma equação algébrica do tipo $2x - 5 = 0$, cuja solução é um número, as soluções das equações diferenciais são funções. Portanto, ao resolver uma equação diferencial, busca-se uma função que, junto com suas derivadas, satisfaça a equação dada.

A obtenção da solução de uma equação diferencial pode ser extremamente trivial ou requerer algum tipo de técnica matemática específica. Por exemplo, para obter a solução da equação diferencial ordinária apresentada no parágrafo anterior, basta integrá-la uma única vez, isto é:

$$y(x) = \int 5dx = 5x + c$$

que é conhecida como solução geral da equação diferencial dada, pois a constante de integração "c" não está especificada. Se houver alguma informação adicional que permita identificar o valor de "c", ter-se-á uma solução particular.

As equações diferenciais, além de ordinárias e parciais, podem ser classificadas também de acordo com sua derivada de mais alta ordem. No exemplo dado no primeiro parágrafo desta seção, como a derivada de mais alta ordem é a derivada primeira, dy/dx, ela é classificada como de primeira ordem; na verdade, para ser mais preciso, ela é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem. Essas são as equações diferenciais que serão discutidas com mais detalhes neste capítulo[5]. Pode-se identificar também o grau de uma equação diferencial, que é dado pela mais alta potência que a derivada de mais alta ordem é elevada. Como exemplo, considere a seguinte equação diferencial:

[5] Para um tratamento mais extenso sobre equações diferenciais, ver, por exemplo, Zill (2003).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y = 0$$

que é classificada como uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem e do primeiro grau.

Como em economia freqüentemente se está interessado na evolução, ao longo do tempo, de certas variáveis, são comuns funções que possuem como principal argumento o tempo, ou seja, funções do tipo y = f(t). Assim, pode-se utilizar a notação mais compacta para a primeira derivada, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, ou, no caso da derivada segunda, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Esse tipo de notação é bastante comum na literatura econômica, que se utiliza de equações diferenciais.

Convém agora considerar alguns métodos comumente utilizados na obtenção da solução de equações diferenciais. Um deles é o método de **separação de variáveis.** Esse método consiste basicamente em separar as variáveis de uma equação diferencial de tal forma que cada variável pertença a apenas um termo, desde que essa operação seja possível. Para ilustrar esse método, considere a equação diferencial:

$$g(y)(dy/dt) = f(t)$$

em que g(y) é função apenas de y e f(t) é função apenas de t. Rearranjando os termos, essa equação diferencial pode ser reescrita da seguinte forma:

$$g(y)dy = f(t)dt$$

ou seja, o primeiro termo depende somente de y e o segundo, somente de t. Uma vez que as variáveis estão agora separadas, a solução é dada por:

$$\int g(y)dy = \int f(t)dt + c$$

em que "c" é a constante de integração. Como exemplo de aplicação desse método, considere a equação diferencial:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = t^3$$

que pode ser reescrita, com separação das variáveis, da seguinte forma:

$dy = t^3 dt$

Integrando ambos os lados, obtém-se a seguinte solução geral:

$$y = \frac{t^4}{4} + c$$

Se a equação diferencial é linear, de primeira ordem e com coeficientes constantes, sua solução pode ser obtida de forma relativamente simples. Suponha que essa equação diferencial seja dada por:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b$$

em que a e b são constantes. Para encontrar a solução dessa equação diferencial, note que, pela regra de diferenciação do produto das funções e^{at} e $y(t)$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{at} y(t)\right] = ae^{at} y(t) + e^{at}\dot{y} = e^{at}\left[\dot{y} + ay(t)\right]$$

ou seja, a equação diferencial anterior é exatamente igual a:

$$d[e^{at} y(t)] = be^{at} dt$$

Integrando ambos os lados, obtém-se:

$$e^{at} y(t) = \frac{be^{at}}{a} + c$$

em que c é uma constante de integração. Multiplicando ambos os lados da expressão anterior por e^{-at}, chega-se a:

$$y(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

que é a solução geral da equação diferencial dada. Se for possível ter uma informação do tipo $y(0) = y_0$, pode-se obter uma solução particular para a equação diferencial da seguinte forma. Em t = 0, a equação anterior torna-se y = (b/a) + c. Logo, $c = y_0 - (b/a)$. Substituindo esse valor de "c"

na solução geral da equação diferencial e rearranjando os termos, obtém-se a seguinte solução particular:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + (1 - e^{-at}) \frac{b}{a}$$

Se, no lugar de constantes, os coeficientes da equação diferencial linear de primeira ordem forem funções de t, então a forma geral dessa equação seria:

$$\dot{y} + a(t) y(t) = b(t)$$

em que a(t) e b(t) são funções conhecidas e y(t) é a função procurada. Procedimento semelhante ao caso anterior pode ser utilizado neste caso para obter a solução da equação diferencial (BARRO; SALA-I-MARTIN, 1995). Inicialmente, observe que:

$$\frac{d}{dt}\left[y(t) e^{\int a dt} \right] = e^{\int a dt}\left[\dot{y} + a(t) y(t) \right]$$

Logo, a equação diferencial com coeficientes variáveis torna-se:

$$d[y(t) e^{\int a dt}] = b(t) e^{\int a dt} dt$$

Integrando ambos os lados dessa expressão, obtém-se:

$$y(t) e^{\int a dt} = \int b(t) e^{\int a dt} dt + c$$

em que c é uma constante de integração. Multiplicando ambos os lados dessa expressão por $e^{-\int a dt}$, obtém-se:

$$y(t) = e^{-\int a dt}\left[\int b(t) e^{\int a dt} dt + c \right]$$

que é a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes variáveis procurada. Para ilustrar a aplicação desse método, considere o seguinte exemplo:

$$\dot{y} + 3t^2 y = t$$

Neste exemplo em particular, a = 3t² e b = t, ou seja, são coeficientes variáveis. Note que $\int 3t^2 dt = t^3$. Note também que, em geral, ignoram-se as constantes de integração nas fases intermediárias da obtenção da solução de uma equação diferencial. O argumento é que, como há uma constante de integração na expressão da solução geral, assume-se que esta constante incorpora as demais constantes de integração que possam surgir na resolução da equação diferencial. Aplicando agora a fórmula da solução geral, obtém-se como resultado:

$$y(t) = e^{-t^3}[\int te^{t^3} dt + c] = ce^{-t^3} + \tfrac{1}{3}$$

O termo 1/3 pode ser obtido da seguinte forma: fazendo z = t³ e tomando o diferencial, obtém-se dz = 3tdt, ou, ainda, dt = dz/3t. Utilizando o método de substituição, a integral $\int te^{t^3} dt$ pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int te^{t^3} dt = \int te^{z} \frac{dz}{3t} = \frac{1}{3} e^{z} = \frac{1}{3} e^{t^3}$$

Observe que, quando t → ∞, o termo ce^{-t^3} tende a zero e y(t) aproxima-se de 1/3, ou seja, a equação (solução) é **dinamicamente estável**. Na verdade, a solução de uma equação diferencial é composta de duas partes (CHIANG, 1982): ce^{-t^3}, que resultou do termo da solução geral $ce^{-\int a dt}$, é chamada de **função complementar**; e 1/3, que resultou do termo $e^{-\int a dt} \int be^{\int a dt} dt$, é chamada de **integral particular**. A integral particular dá o nível de equilíbrio intertemporal de y(t), e a função complementar mensura os desvios em relação a este equilíbrio intertemporal.

2.2.1. *Sistemas de equações diferenciais*

Até agora, tratou-se apenas de equações diferenciais de primeira ordem. A boa notícia é que equações diferenciais de ordens maiores podem ser convertidas facilmente em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem ou vice-versa (ZILL, 2003). Como exemplo ilustrativo, considere a equação diferencial de segunda ordem $\ddot{x} + 5\dot{x} + x = 0$. Essa equação pode ser reescrita como o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -5y - x$$

em que bastou fazer $y = \dot{x}$, o que implica que $\dot{y} = \ddot{x}$. Fazendo as substituições na equação dada, chega-se ao sistema apresentado, no qual a primeira equação é a definição da variável $y = \dot{x}$. Dessa forma, a abordagem utilizada para resolver um sistema de equações diferenciais de primeira ordem pode ser útil também para resolver uma equação diferencial de ordem mais elevada.

Na resolução de problemas de controle ótimo em economia, ao obter as condições de primeira ordem, chega-se, em geral, a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Neste capítulo, discutem-se aspectos da solução analítica de um sistema 2x2 de equações diferenciais de primeira ordem. Inicialmente, considera-se um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usando notação matricial, pode-se reescrever o sistema linear de equações diferenciais dado de forma mais compacta, ou seja:

$$\dot{x} = Ax$$

em que $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Seja x_1, x_2 um conjunto de soluções do sistema homogêneo (2.1), em determinado intervalo. Então, a **solução geral** desse sistema, nesse intervalo, é dada por $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$, em que c_i $(i = 1, 2)$ são constantes arbitrárias. Um vetor-solução para o sistema linear homogêneo genérico (2.1) é fornecido por:

$$x = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{rt} = ke^{rt} \tag{2.2}$$

em que k_i $(i = 1, 2)$ são constantes.

Se (2.2) for um vetor-solução, então $\dot{x} = kre^{rt}$, de tal forma que (2.1) torna-se $kre^{rt} = Ake^{rt}$. Dividindo ambos os membros desta última expressão por e^{rt} e lembrando que $k = Ik$, obtém-se a seguinte expressão:

$$(A - rI)k = 0 \tag{2.3}$$

Dessa forma, para que a equação matricial (2.3) tenha outra solução que não a trivial $k_1 = k_2 = 0$, deve-se ter:

$$|A - rI| = 0 \tag{2.4}$$

A expressão (2.4) é uma equação polinomial em r e é chamada de **equação característica** da matriz A; suas soluções são as **raízes características** de A. Uma solução $k \neq 0$, de (2.3), correspondente à raiz característica r, é denominada **vetor característico** de . Colocando de forma mais explícita a expressão (2.4), tem-se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5)$$

Expandindo a equação polinomial dada por (2.5), obtém-se:

$$r^2 - r(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.6)$$

A solução para a equação quadrática (2.6) é dada por:

$$r_1, r_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

em que r_1, r_2 são as raízes características do sistema. Note que:

$$r_1 r_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{e} \quad r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22} \qquad (2.7)$$

Com relação aos valores assumidos das raízes características, há três casos a considerar:

a) Raízes reais distintas ($r_1 \neq r_2$).

b) Raízes reais repetidas ($r_1 = r_2$) .

c) Raízes complexas ($(r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i)$.

No caso de raízes reais distintas, a solução do sistema linear (2.1) é dada por:

$$x_1 = c_1 K_{11} e^{r_1 t} + c_2 K_{12} e^{r_2 t}, \ x_2 = c_1 K_{21} e^{r_1 t} + c_2 K_{22} e^{r_2 t}$$

em que $K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}$ e $K_2 = \begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{bmatrix}$ são os vetores característicos associados às respectivas raízes características. De posse das condições iniciais/terminais do problema, pode-se resolver para c_1 e c_2 e obter uma solução particular para ele.

No caso de raízes reais idênticas, as soluções iniciais tentativas mudam para $x_1 = K_{11} t e^{r_1 t} + P_{11} e^{r_1 t}$ e $x_2 = K_{21} t e^{r_1 t} + P_{21} e^{r_1 t}$. Substituindo essas soluções tentativas no sistema linear $\dot{x} = Ax$, simplificando e

rearranjando os termos, obtém-se:

$$(AK_1 - r_1K_1)te^{r_1t} + (AP_1 - r_1P_1 - K_1)e^{r_1t} = 0 \qquad (2.8)$$

em que K_1 é o vetor característico associado à raiz característica r_1, conforme definição anterior, e o vetor $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}$ é obtido da resolução do sistema linear de equações (2.10), apresentado logo a seguir. Note que, para que a equação matricial (2.8) seja válida para todos os valores de t, deve-se ter:

$$(A - r_1I)K_1 = 0 \qquad (2.9)$$

$$x_1 = K_{11}te^{r_1t} + P_{11}e^{r_1t} \qquad (2.10)$$

Com isso, a solução geral do sistema linear (2.1), com raízes reais características repetidas, é dada por:

$$x_1 = c_1K_{11}e^{r_1t} + c_2[K_{11}te^{r_1t} + P_{11}e^{r_1t}] \text{ e } x_2 = c_1K_{21}e^{r_1t} + c_2[K_{11}te^{r_1t} + P_{21}e^{r_1t}]$$

Finalmente, no caso de raízes complexas, a solução geral toma a forma:

$$x_1 = c_1K_{11}e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2K_{12}e^{(\alpha-\beta i)t} \text{ e } x_2 = c_1K_{21}e^{(\alpha+\beta i)t} + c_2K_{22}e^{(\alpha-\beta i)t}$$

O uso das relações de Euler [$e^{-i\theta} \equiv \cos\theta - isen\theta$ e $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + isen\theta$] permite escrever a solução geral do sistema linear (2.1), no caso de raízes características complexas, da seguinte forma (ZILL, 2003):

$$x_1 = c_1[B_{11}\cos\beta t - B_{12}sen\beta t]e^{\alpha t} + c_2[B_{12}\cos\beta t + B_{11}sen\beta t]e^{\alpha t}$$

$$x_2 = c_1[B_{21}\cos\beta t - B_{22}sen\beta t]e^{\alpha t} + c_2[B_{22}\cos\beta t + B_{21}sen\beta t]e^{\alpha t}$$

em que $B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ e $B_2 = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \frac{i}{2}(-K_1 + K_2)$. Estes vetores, B_1 e B_2, são freqüentemente denotados por $B_1 = \text{Re}(K_1)$ e

$B_2 = \text{Im}(K_1)$ para indicar as partes real e imaginária, respectivamente, do vetor característico K_1. Observe que as coordenadas do vetor característico K_2, correspondentes à raiz característica r_2, são as conjugadas das coordenadas de K_1, correspondentes a r_1, daí o fato de as informações de K_1 serem suficientes para a resolução do problema.

É importante, na análise econômica, investigar as condições de estabilidade dos sistemas dinâmicos modelados nas proximidades do equilíbrio. Um ponto, x_1^e, x_2^e, em que $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, é chamado de **ponto de equilíbrio** ou **estado estacionário** (*steady state*). Diz-se que um equilíbrio é **estável** se $\lim_{t \to \infty} x_1 = x_1^e$ e $\lim_{t \to \infty} x_2 = x_2^e$. Para o sistema linear (2.1), há diversos casos a considerar, dependendo dos valores das raízes características da matriz A (KAMIEN; SCHWARTZ, 1991).

Se as raízes características são reais e negativas, as trajetórias das variáveis movem-se em direção ao equilíbrio, que é **estável**. Por outro lado, se as raízes características são reais e positivas, o equilíbrio é **instável**, pois qualquer perturbação no sistema faz com que as trajetórias das variáveis movam-se para longe do equilíbrio. Se as raízes forem reais e tiverem sinais opostos, o equilíbrio é do tipo **ponto-sela**, ou seja, é estável na direção da raiz negativa e instável na direção da raiz positiva. No caso de raízes características complexas, se as partes reais são negativas, as trajetórias das variáveis convergem para o equilíbrio; caso contrário, o equilíbrio é instável.

O sistema linear homogêneo 2 x 2 de equações diferenciais, discutido anteriormente, pode ser estendido em várias direções. Pode-se, por exemplo, considerar um número maior de equações[6], tornar o sistema não-homogêneo ou assumir equações diferenciais não-lineares. Neste

[6] Ver, por exemplo, Zill (2003) para uma discussão detalhada de soluções de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem n x n.

último caso, um procedimento normalmente utilizado é linearizar o sistema ao redor do equilíbrio, mediante expansão de Taylor, e analisar o sistema resultante (no caso de 2 x 2), como feito anteriormente. Para sistemas não-homogêneos, a solução é composta de duas partes: a solução geral do sistema homogêneo mais a solução particular, que é obtida resolvendo o sistema não-homogêneo $\dot{x} = Ax + y$, fazendo $\dot{x} = 0$[7].

Para ilustrar o uso de equações diferenciais na resolução de problemas econômicos, considere o seguinte exemplo, que ilustra a dinâmica do preço em um mercado de concorrência perfeita (CHIANG, 1982). As equações de oferta e demanda são dadas por $Q_d = c + bP$ e $Q_s = g + hP$, respectivamente, em que c, b, g e h são parâmetros. Assume-se que o preço de mercado é uma função linear do excesso de demanda, ou seja, $\frac{dP}{dt} = m(Q_d - Q_s)$, em que "m" é uma constante positiva. Substituindo as equações de oferta e demanda na equação de variação do preço e rearranjando os termos, obtém-se uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, cuja solução particular, ou seja, quando t = 0 o preço é igual a P_0, é dada por:

$$P(t) = [P_0 - P^e]e^{-m(h-b)t} + P^e$$

em que P^e é o preço de equilíbrio de mercado. Se em t = 0, $P_0 \neq P^e$, quais as condições para que a dinâmica do preço seja estável, ou seja, para que ele convirja para seu nível de equilíbrio intertemporal (P^e)? Note que, uma vez que "m" é uma constante positiva, a dinâmica do preço vai depender de "h" e "b", que são as inclinações das curvas de oferta e demanda, respectivamente. A partir da solução particular da equação diferencial, observa-se que, se h > b, a dinâmica do preço é estável. Como, em condições normais, as curvas de oferta têm inclinação positiva e as

[7] Para mais detalhes, ver, por exemplo, Chiang (1982) ou Kamien e Schwartz (1991).

curvas de demanda, inclinação negativa, essa condição é sempre satisfeita.

O seguinte exemplo, retirado de Weber (1986), é para o leitor tentar resolver usando a expressão da solução geral de uma equação diferencial linear com coeficientes variáveis. A situação do problema é a seguinte: A variação do lucro líquido (π) de uma firma quando as despesas com propaganda (x) variam é dada pela seguinte equação diferencial: $\frac{d\pi}{dx} = k - a(\pi + x)$, em que a e k são constantes. Encontrar π como uma função de x, assumindo que $\pi = \pi_0$ quando $x = x_0$. [Resposta: $\pi(x) = \left(\frac{k}{a} + 1\right) - x + \left[\pi_0 - \left(\frac{k}{a} + 1\right)\right]e^{-ax}$].

Os casos de problemas econômicos que podem ser resolvidos usando sistemas de equações diferenciais serão considerados na próxima seção, em conexão com a solução de problemas de controle ótimo.

2.3. Controle ótimo

O uso de abordagem dinâmica na resolução de problemas econômicos é relativamente recente. Dos primeiros trabalhos mais conhecidos, destacam-se, na década de 1920, os de Evans (1924) e Ramsey (1928). Entretanto, foi a partir da década de 1960 que se passou a utilizar mais largamente métodos matemáticos de análise dinâmica em economia, principalmente no estudo de problemas relacionados com crescimento econômico. Atualmente, abordagens dinâmicas tornaram-se comuns em áreas como crescimento econômico, jogos diferenciais, economia de recursos naturais, entre outras. Hilten et al. (1993), por exemplo, discutem, de forma extensiva, diversos aspectos de políticas dinâmicas da firma.

Há, pelo menos, três abordagens alternativas para análise dinâmica de problemas econômicos: cálculo de variações, programação dinâmica e princípio máximo do controle ótimo. O cálculo de variações ou cálculo variacional é a abordagem clássica; seu desenvolvimento remonta ao final do século XVII e pode ser considerado uma extensão do cálculo diferencial para análise de problemas dinâmicos. A programação matemática foi desenvolvida, na década de 1950, por Richard Bellman, um matemático

americano, e o princípio máximo, também nesta década, por um grupo de matemáticos russos liderados por L. Pontryagin.

Alguns autores, como Barro e Sala-I-Martin (1995), consideram a programação dinâmica especialmente adequada à análise de problemas dinâmicos discretos e particularmente útil à abordagem de problemas estocásticos. Stokey et al. (1989), por exemplo, fazem uso extensivo da programação dinâmica na análise de problemas macroeconômicos. Por sua vez, o princípio máximo generaliza a abordagem clássica do cálculo de variações e pode ser utilizado na análise de problemas dinâmicos discretos contínuos, assim como de problemas dinâmicos estocásticos.

Para qualquer dessas abordagens alternativas, há métodos de solução tanto analíticos quanto numéricos. Nesta seção apresenta-se a abordagem analítica na resolução de problemas de controle ótimo contínuos. Para aqueles interessados em tratamentos mais extensivos dos métodos analíticos de resolução de problemas de controle ótimo, recomendam-se, entre outros, Seierstad e Sydsaeter (1989), Kamien e Schwartz (1991) e Chiang (1992).

2.3.1. Problema típico de controle ótimo

Diferentemente da otimização estática, em que se busca um valor ótimo único para cada variável de escolha, na otimização dinâmica busca-se uma trajetória ótima no tempo para cada variável de controle, ou seja, uma função no tempo para as variáveis-instrumentos do problema considerado. Portanto, na resolução de um problema dinâmico, busca-se identificar as trajetórias ótimas no tempo dessas variáveis, de forma a otimizar uma função objetiva previamente definida.

A estrutura básica de um problema dinâmico é muito semelhante à de um problema estático. Os ingredientes básicos de um problema dinâmico são os seguintes: a) **horizonte de planejamento**, que vai de um tempo inicial a um tempo final; b) conjunto de trajetórias possíveis das **variáveis de controle** e **variáveis de estado** entre os tempos inicial e final; c) conjunto de restrições associado às variáveis e funções do problema; e d) **função objetivo** a ser otimizada – maximizada ou minimizada – e que

está associada às possíveis trajetórias das variáveis de controle e estado do problema.

Formalmente, um problema típico de controle ótimo pode ser formulado da seguinte forma:

$$\underset{c(t)}{Maximizar} \quad V = \int_0^T u[s(t), c(t), t]dt \qquad (2.11)$$

$$\text{sujeito a: } \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = f[s(t), c(t), t] \qquad (2.12)$$

e

$$s(0) = s_0$$

em que $u(\bullet)$ e $f(\bullet)$ são funções contínuas e diferenciáveis conhecidas; T e $s(0) = s_0$ são constantes conhecidas; $c(t)$ é a variável de controle (função contínua e diferenciável); e $s(t)$ é a variável de estado [varia de acordo com $f(\bullet)$].

Esse problema pode ser generalizado, considerando-se mais de uma variável de controle e mais de uma variável de estado. Para manter a apresentação o mais simples possível, foram consideradas uma única variável de controle e uma única variável de estado. Nesse caso, a evolução do sistema no tempo é completamente descrita pela variável de estado $s(t)$, que é governada pela **equação de transição** (2.12), ou seja, uma equação diferencial. O estado do sistema é afetado pela variável de controle $c(t)$, de forma que, ao se escolher, em cada instante do tempo, um valor para esta variável, pode-se afetar o estado do sistema e, portanto, sua dinâmica ao longo do tempo.

Neste problema, o tempo é contínuo e o horizonte de planejamento é definido pelo intervalo [0, T]. Dadas a condição inicial do sistema e a equação de transição, a resolução do problema consiste em escolher, apropriadamente, a trajetória da variável de controle, de forma a maximizar a função objetivo definida pela expressão (2.11), uma integral definida com limites de integração 0 e T. A função $u(\bullet)$ é chamada de função de retornos (de utilidade) instantâneos e o valor V, associado à função objetivo,

sumaria os diferentes valores para as diferentes trajetórias das variáveis de controle e estado.

2.3.2. Condições de primeira ordem

Nesta seção derivam-se, de forma heurística, com base em Barro e Sala-I-Martin (1995) e Tsiddon (1999), as condições de primeira-ordem do problema de controle ótimo[8]. Inicialmente, utiliza-se, por semelhança, o procedimento usado na otimização estática de problemas condicionados para formar a seguinte função de Lagrange:

$$L = \int_0^T u[s(t), c(t), t]dt + \int_0^T \lambda(t)\{f[s(t), c(t), t] - \dot{s}(t)\}dt \qquad (2.13)$$

em que o primeiro termo (primeira integral definida) corresponde à função objetivo do problema definido pela expressão (2.11) e o segundo termo (segunda integral definida), ao multiplicador de Lagrange, $\lambda(t)$, associado à equação de transição (restrição) do problema dado pela expressão (2.12). Como a equação de transição define uma restrição para cada instante do tempo entre 0 e T, tem-se, na verdade, um contínuo de restrições, o que requer também um contínuo de multiplicadores de Lagrange, $\lambda(t)$. O $\lambda(t)$ é chamado de **variável de co-estado** ou multiplicador de Lagrange dinâmico, e sua interpretação é semelhante à de um problema estático condicionado, ou seja, é um preço-sombra.

A expressão (2.13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$L = \int_0^T u[s(t), c(t), t]dt + \int_0^T \{\lambda(t) f[s(t), c(t), t] - \lambda(t)\dot{s}(t)\}dt \qquad (2.14)$$

Note que o último termo da segunda integral, definida na expressão (2.14), pode ser integrado por partes para obter a expressão[9]:

[8] Para uma prova completa do princípio máximo, ver, por exemplo, Pontryagin et al. (1962).

[9] No caso de dúvidas sobre o método de integração por partes, consultar, por exemplo, o capítulo 13 de Chiang (1982) ou Barro e Sala-I-Martin (1995, p. 515).

$$\int_0^T \lambda(t)\dot{s}(t)\,dt = \lambda(T)s(T) - \lambda(0)s(0) - \int_0^T \dot{\lambda}(t)\,s(t)dt \qquad (2.15)$$

Utilizando esta informação, pode-se reescrever a expressão (2.14) da seguinte forma:

$$L = \int_0^T \{u[\bullet] + \lambda(t)f[\bullet]\}dt - \lambda(T)s(T) + \lambda(0)s(0) + \int_0^T \dot{\lambda}(t)s(t)dt \qquad (2.16)$$

A expressão dentro da primeira integral é conhecida como **função Hamiltoniana**, que pode ser escrita como:

$$H[s(t),c(t),\lambda(t),t] = u[s(t),c(t),t] + \lambda(t)f[s(t),c(t),t] \qquad (2.17)$$

Para derivar as condições de primeira ordem, supõe-se, inicialmente, que $c^*(t)$ maximize o Lagrangeano definido por (2.16). Em seguida, define-se uma função de perturbação arbitrária, $p_1(t)$, para se obter uma trajetória na vizinhança da trajetória ótima da variável de controle, ou seja:

$$c(t) = c^*(t) + \varepsilon p_1(t),$$

em que ε é uma constante arbitrária. Desde que haja uma perturbação na trajetória ótima da variável de controle, há uma correspondente perturbação na trajetória ótima da variável de estado, $k^*(t)$, de tal forma que:

$$s(t) = s^*(t) + \varepsilon p_2(t)$$

De posse dessas novas informações, pode-se escrever o Lagrangeano definido por (2.16), em termos de ε, da seguinte forma:

$$L(\bullet,\varepsilon) = \int_0^T \{H[s(\bullet,\varepsilon),c(\bullet,\varepsilon)] + \dot{\lambda}(\bullet)s(\bullet,\varepsilon)\}dt - \lambda(T)s(T,\varepsilon) + \lambda(0)s_0 \qquad (2.18)$$

Note que, no ótimo, $\varepsilon = 0$, e a derivada parcial $\partial L/\partial\varepsilon$, neste ponto, deve igualar-se a zero. Tomando a derivada parcial de (2.18) e igualando-a a zero, obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \int_0^T [\partial H/\partial\varepsilon + \dot{\lambda}\partial s/\partial\varepsilon]dt - \lambda(T)\partial s(T,\varepsilon)/\partial\varepsilon = 0 \qquad (2.19)$$

Pela regra da cadeia, sabe-se que $\partial H/\partial\varepsilon = [\partial H/\partial c]p_1(t) + [\partial H/\partial s]p_2(t)$

e $\partial s(T,\varepsilon)/\partial\varepsilon = ds(T)$. De posse dessas informações e rearranjando os termos, pode-se obter a seguinte expressão a partir de (2.19):

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = \int_0^T \{[\partial H/\partial c]p_1(t) + [\partial H/\partial s + \dot{\lambda}(t)]p_2(t)\}dt - \lambda(T)ds(T) = 0 \qquad (2.20)$$

Uma vez que $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são funções arbitrárias e $ds(T) \neq 0$, a expressão (2.20) será válida desde que:

$$\partial H/\partial c = 0 \qquad (2.21)$$

$$\partial H/\partial s = -\dot{\lambda}(t) \qquad (2.22)$$

$$\lambda(T) = 0 \qquad (2.23)$$

Esse conjunto de restrições, juntamente com a equação de transição (2.12) e a condição inicial $s(0) = s_0$, constitui o chamado **princípio máximo**, que pode ser formalmente estabelecido da seguinte forma: uma solução ótima do problema de controle ótimo é constituída de um conjunto de três funções do tempo, $[s^*(t), c^*(t), \lambda^*(t)]$, que, dada a função Hamiltoniana, $H(s,c,\lambda,t) = u(s,c,t) + \lambda f(s,c,t)$, devem satisfazer, em cada instante de tempo t, às seguintes condições:

$$\frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial c} = 0 \qquad (2.24)$$

$$\frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial s} = -\dot{\lambda}(t) \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial H(s^*, c^*, \lambda^*, t)}{\partial \lambda} = \dot{s}(t) \qquad (2.26)$$

Condições terminais: $s(0) = s_0$ e $\lambda(T) = 0$ (2.27)

Observe que, se $s(T)$ é uma constante, então $ds(T) = 0$. Nesse caso, pode-se ter $\lambda(T) \neq 0$. Na verdade, há uma relação entre esses valores terminais, conhecida na literatura de controle ótimo como **condição**

de transversalidade, a qual estabelece que $\lambda(T)s(T) = 0$. Trata-se de uma condição de folga complementar semelhante à que é derivada quando se utilizam as condições de Kuhn-Tucker.[10]

A grande vantagem do princípio máximo é poder desagregar um problema dinâmico de otimização, ao longo de um intervalo de tempo, [0, T], numa seqüência de problemas estáticos de otimização mais simples que são válidos para cada instante de tempo t, no intervalo considerado. Para isso, é suficiente maximizar uma função Hamiltoniana para um tempo genérico t (condições de primeira ordem) e observar as condições terminais do problema.

As condições que definem o princípio máximo são de primeira ordem, ou seja, são as condições necessárias para a resolução do problema de controle ótimo. No caso de problemas de maximização estáticos não-lineares, as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes, desde que a função objetivo seja côncava e o conjunto de restrições seja convexo. Mangasarian (1966, citado por BARRO; SALA-I-MARTIN, 1995) estendeu esses resultados, no caso estático, para os problemas dinâmicos e mostrou que, se as funções $u(\bullet)$ e $f(\bullet)$ são ambas côncavas em k e c, então as condições necessárias definidas anteriormente são também suficientes para o ótimo.

Freqüentemente, na análise econômica, consideram-se horizontes de planejamento infinitos. Nesse caso, em vez de "T", $T < \infty$, um horizonte finito, ter-se-á "∞" como limite superior de integração na função objetivo 2.11. As condições de primeira ordem para o problema com horizonte de planejamento infinito são idênticas às definidas para o problema com horizonte finito. A única diferença diz respeito à condição de transversalidade, que muda para:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t)s(t) = 0$$

[10] Para mais detalhes, ver, por exemplo, Barro e Sala-I-Martin (1995) e Chiang (1992).

2.3.3. *Controle ótimo com desconto*

Em muitas aplicações da teoria do controle ótimo em economia, a função de retornos instantâneos é escrita com um fator de desconto $e^{-\rho t}$ com $\rho > 0$, para capturar o fato de se dar menor peso ao futuro do que ao presente, em decisões intertemporais. O problema de controle ótimo com desconto pode ser formulado da seguinte forma:

$$\underset{c(t)}{Maximizar} \;\; V = \int_0^T e^{-\rho t} u[s(t), c(t)]dt \tag{2.28}$$

$$\text{sujeito a: } \dot{s}(t) = f[s(t), c(t)] \tag{2.29}$$

e

$$s(0) = s_0 \tag{2.30}$$

A função Hamiltoniana, nesse caso, é dada por:

$$H[s(t), c(t), \lambda(t), t] = e^{-\rho t} u[s(t), c(t)] + \lambda(t) f[s(t), c(t)] \tag{2.31}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.31) por $e^{\rho t}$ e definindo $H^c = e^{\rho t} H$ como o valor corrente do Hamiltoniano e $\mu(t) = e^{\rho t} \lambda(t)$ como o valor corrente da variável de co-estado, pode-se, a partir da expressão (2.31), formar o seguinte Hamiltoniano com valor corrente:

$$H^c[s(t), c(t), \mu(t), t] = u[s(t), c(t)] + \mu(t) f[s(t), c(t)] \tag{2.32}$$

Utilizando o mesmo procedimento descrito na seção anterior, podem-se obter as seguintes condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \Rightarrow u_c + \mu(t) f_c = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial s} = -\dot{\mu}(t) \Rightarrow \frac{\partial H^c}{\partial s} - \rho\mu(t) = -\dot{\mu}(t) \tag{2.34}$$

Condições terminais: $s(0) = \bar{s}_0$ e $e^{-\rho(T)}\mu(T) = 0$ (2.35)

Observe que $\dot{s}(t)$ e $\dot{\mu}(t)$ formam um sistema de equações diferenciais autônomas[11], o qual é relativamente fácil de resolver analiticamente. Os procedimentos analíticos para obtenção da solução analítica de sistema com duas equações diferenciais foram discutidos na seção 2.2.

Definidas as características básicas de um problema de controle ótimo e as condições necessárias para o ótimo, podem-se definir os seguintes passos para a resolução de problemas desse tipo:

Passo 1: Formar a função Hamiltoniana do problema:

$H[s(t), c(t), \lambda(t), t] = u[s(t), c(t), t] + \lambda(t) f[s(t), c(t), t]$ ou

$H^c[s(t), c(t), \mu(t), t] = u[s(t), c(t)] + \mu(t) f[s(t), c(t)]$ (valor corrente).

Passo 2: Derivar a função Hamiltoniana com respeito à variável de controle e igualar a zero:

$\partial H / \partial c = 0$ ou

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = 0 \Rightarrow u_c + \mu(t) f_c = 0 \text{ (valor corrente).}$$

Passo 3: Derivar a função Hamiltoniana com respeito à variável de estado, podendo ocorrer duas situações:

$\partial H / \partial s = -\dot{\lambda}(t)$ ou

$$\frac{\partial H^c}{\partial s} = -\dot{\mu}(t) \Rightarrow \frac{\partial H^c}{\partial s} - \rho\mu(t) = -\dot{\mu}(t) \text{ (valor corrente).}$$

---

[11] Um sistema de equações diferenciais é dito autônomo se suas derivadas não dependem, explicitamente, do tempo.

Passo 4: Condição de transversalidade, que pode tomar uma das seguintes formas:

$\lambda(T)s(T) = 0$ (horizonte finito) ou

$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)s(t) = 0$ (horizonte infinito).

Como exemplo de uma aplicação de um problema econômico de controle ótimo, considera-se a otimização do consumo de um ativo, $c(t)$, ao longo do horizonte de planejamento [0, 1]. Este exemplo foi adaptado de Léonard e Long (1992, p. 133-134) e toma o seguinte aspecto na forma de um problema de controle ótimo:

$$\underset{c(t)}{Maximizar} \qquad V = \int_0^1 \ln[c(t)s(t)]dt$$

Sujeito a: $\dot{s}(t) = s(t)[1 - c(t)]$

e

$s(0) = 1,\ s(1) = 2$

em que $s(t)$ se refere ao estoque de um ativo.

A função Hamiltoniana, deste problema, é dada por:

$$H[c(t), s(t), m(t), t] = \ln c(t) + \ln s(t) + m(t)\{s(t)[1 - c(t)]\}$$

em que $m(t)$ é o multiplicador dinâmico de Lagrange.

Aplicando as condições de primeira-ordem, obtém-se:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{c} - ms = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{ms} \qquad (2.36)$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{s} + (1 - c)m = -\dot{m} \qquad (2.37)$$

A equação de transição deste problema e as condições de primeira ordem permitem escrever o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{s}(t) = s(t) - 1/m(t) \qquad (2.38)$$

$$\dot{m}(t) = -m(t) \tag{2.39}$$

A solução analítica da equação diferencial (2.39) é imediata, ou seja:

$$m(t) = m_0 e^{-t} \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (3.38), multiplicando ambos os lados por e^{-t} e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\dot{s}(t)e^{-t} - s(t)e^{-t} = -1/m_0 \tag{2.41}$$

O termo do lado direito de (2.41) é a derivada de $s(t)e^{-t}$ com relação ao tempo. Assim, pode-se escrever a solução geral da equação (2.38) do seguinte modo:

$$s(t)e^{-t} = -\frac{1}{m_0} + a \tag{2.42}$$

em que a é uma constante de integração. Com as condições inicial e final do problema, ou seja, $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, pode-se obter a solução particular para a equação (2.42):

$$s(t) = e^t - 0{,}26424te^t \tag{2.43}$$

em que $m(0) = 3{,}784422$. De posse das informações (2.40) e (2.43), pode-se obter a equação de consumo ótimo ao longo do tempo:

$$c(t) = \frac{1}{3{,}784 - t} \tag{2.44}$$

Este segundo exemplo, retirado de Dorfman (1969), trata da maximização de lucros de uma firma em determinado período de tempo. No tempo t, essa firma possui um dado estoque de capital *k(t)*, que define seu "estado". A partir daí, as decisões tomadas a respeito de sua produção, preço ou qualidade do produto procurarão maximizar seus lucros. Essas decisões podem ser sintetizadas na escolha, por exemplo, do nível de $x(t)$

(variável controle), que, combinado ao estado da firma, resultará em um montante de benefícios por unidade de tempo, representado pelo $lucro = \pi[k(t), x(t), t]$. O problema de controle ótimo dessa firma pode ser formulado, de maneira geral, da seguinte forma:

$$\text{Maximizar: } V(k,x,t) = \int_0^T \pi[k,x,t]dt \quad \text{(função objetivo)}$$

$$\text{sujeito a: } \dot{k} = \frac{dk}{dt} = f(k,x,t) \quad \text{(equação de transição)}$$

$$k(0) = k_0 > 0 \quad \text{(condição inicial)}$$

em que a equação de transição é uma restrição que reflete o "estado" da firma (variação do estoque de capital); a restrição $k_0 > 0$ é uma condição inicial; λ é o preço-sombra (multiplicador dinâmico de Lagrange); e a condição de transversalidade, $\lambda(T) \cdot k(T) = 0$, é uma condição que garante que a utilidade (lucro) do tempo T não fará parte do resultado, uma vez que o horizonte de planejamento está situado entre 0 e T. Daí a necessidade de que, no tempo T, ou o preço-sombra ou o estoque de capital seja igual a zero.

Após a formulação do problema, o passo seguinte é a definição da função Hamiltoniana, ou seja:

$$H[k,x,t,\lambda] = \pi(k,x,t) + \lambda(t) f(k,x,t)$$

As condições de primeira ordem associadas à maximização desse Hamiltoniano são, na sua forma geral, conforme definido anteriormente:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}$$

A derivada do Hamiltoniano com relação ao preço-sombra λ é a própria equação de transição. Quando a derivada está em relação à variável controle, $x(t)$, o resultado desta será igual a zero, pois é a variável de controle que apresentará trajetória ótima que, ao maximizar o Hamiltoniano, estará também maximizando a função objetivo em cada ponto do tempo. A derivada do Hamiltoniano com relação ao estoque de capital é, por definição, igual ao negativo do preço-sombra. Desde que as funções objetivo e de transição estejam especificadas, uma solução específica emerge imediatamente das condições de primeira ordem.

De acordo com Chiang (1992), Baumol propôs um modelo em que firmas priorizam a maximização das receitas de suas vendas e não dos lucros. Essa proposição baseia-se no fato de que não mais é comum que os proprietários das firmas as gerenciem. Nesse caso, é de se esperar que os proprietários exijam um retorno mínimo de seu empreendimento; o estado da firma é dado pela acumulação de capital e a variável de decisão (variável de controle) é o trabalho (l), ou seja, é a decisão tomada acerca do insumo trabalho que dominará a dinâmica da firma. Essa proposta foi adequada à análise dinâmica por Leland (1972) e representa um terceiro exemplo de uso da teoria do controle ótimo em decisões microeconômicas. O problema consiste em:

Maximizar: $\int_0^T Q(k,l)e^{-\rho t}\,dt$ (função objetivo)

sujeito a: $\dot{k} = \alpha[Q(k,l) - wl]$ (equação de transição)

$wl + r_0 k - Q(k,l) \leq 0$

$k(0) = k_0$ $k(T)$ livre k_0 e T dados.

em que $Q(k, l)$ é a quantidade vendida ou receita total com preço unitário; k, o estoque de capital; α, a fração do lucro reinvestido; ρ, a taxa de

desconto; l, o trabalho; w, o salário; e r_0, a taxa de retorno mínima exigida pelos proprietários.

É importante observar que, nesse caso, existe mais uma restrição ($wl + r_0k - Q(k,l) \leq 0$), que reflete a necessidade de uma taxa de retorno mínima exigida pelos proprietários. Mais uma vez, o próximo passo consiste na definição do Hamiltoniano. Nesse exemplo, ou seja, com uma taxa de desconto, ρ, o Hamiltoniano deve ser avaliado no seu valor corrente $(H^c = e^{\rho t} H)$ e toma o seguinte formato:

$$H_a^c = Q(k,l) + m\alpha[Q(k,l) - wl] + n[Q(k,l) - wl - r_0k]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H_a^c}{\partial l} = (1 + m\alpha + n)Q_l - (m\alpha + n)w = 0 \quad \text{para todo } t \text{ entre } 0 \text{ e } T$$

$$\frac{\partial H_a^c}{\partial n} = Q(k,l) - wl - r_0k \geq 0 \therefore n \geq 0; n[Q(k,l) - wl - r_0k] = 0$$

$$\frac{\partial H_a^c}{\partial m} = \alpha[Q(k,l) - wl] = \dot{k}$$

$$-\frac{\partial H_a^c}{\partial K} = -(1 + m\alpha + n)Q_k + nr_0 + \rho m = \dot{m}$$

Note que, neste caso, além das derivadas usuais, incorpora-se uma derivada com relação ao preço-sombra da desigualdade, para que seja satisfeita a exigência de retorno mínimo aos proprietários. Desse modo, as equações $\dot{k}$ (estoque de capital) e $\dot{m}$ (preço-sombra do estoque de capital) definem a dinâmica do sistema, uma vez que refletem as condições em que a variável de controle (trabalho) apresenta sua trajetória ótima. A condição de transversalidade exige que n(t) = 0, uma vez que k(T) é especificado como livre na formulação do problema dinâmico.

Finalmente, como um último exemplo, considere o caso de uma firma que pretende maximizar seus lucros num horizonte infinito, cuja resolução necessita que sejam estabelecidas restrições (artificiais) limites do tipo $I_{min} < 0$ e $I_{max} > 0$ (HILTEN et al., 1993). A função objetivo a ser

maximizada representa os lucros da firma, ou seja, sua receita (produção associada a um preço "p" de venda) reduzida de seus custos respectivos (salários dos trabalhadores e aluguel do capital). Como das outras vezes, o estado da firma é definido pelo seu estoque de capital, cuja variação é a própria equação de transição e as variáveis de decisão (controle) são o investimento (I) e o trabalho (l). Desse modo, o problema pode ser especificado da seguinte forma:

$$\text{Maximizar: } \int_0^{\infty} e^{-it}\{p \cdot Q(k(t), l(t)) - wl - CI(t)\}dt \text{ (função objetivo)}$$

$$\text{sujeito a: } \dot{k} = I(t) - ak(t) \text{ (equação de transição)}$$

$$I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}$$

$$k(t) \geq 0$$

$$k(0) = k_0 \text{ (condição inicial)}$$

$$\lim_{t \to \infty} k(t) \cdot \lambda(t) = 0 \text{ (condição de transversalidade)}$$

em que $p \cdot Q(k(t), l(t)) - wl - CI(t)$ = função de lucro da firma; w = salário; l = estoque de trabalho; C = custo do investimento; I = investimento bruto; p = preço do produto; k = estoque de capital; a = taxa de depreciação; e i = taxa temporal de desconto.

O valor corrente do Hamiltoniano é formado pela função de lucro da firma (função objetivo) e pelas restrições específicas a esse caso, associadas cada uma a um preço-sombra distinto, ou seja:

$$H_a^c = \{pQ - wl - CI\} + \lambda(I - ak) + \mu_1(I - I_{min}) + \mu_2(I_{max} - I) + vk$$

As condições de primeira ordem são:

$$\dot{\lambda} = i\lambda - \frac{\partial H_a^c}{\partial k} = i\lambda - p \cdot \frac{\partial Q}{\partial k} + a\lambda - v$$

$$\frac{\partial H_a^c}{\partial I} = -C + \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial H_a^c}{\partial l} = \left\{ p \cdot \frac{\partial Q}{\partial l} - w \right\} = 0$$

$$\mu_1(I - I_{\min}) = 0 \therefore \mu_2(I_{\max} - I) = 0; \nu \cdot k = 0 \therefore \mu_1, \mu_2, \nu \geq 0$$

Desse modo, as variações do estoque de capital (equação de transição) e do preço-sombra associado a esse estoque de capital (equação $\dot{\lambda}$) são condizentes com as trajetórias das variáveis de decisão (trabalho e investimento) que maximizarão o Hamiltoniano e, conseqüentemente, a função objetivo (lucro da firma).

2.4. Referências

BARRO, R.J.; SALA-I-MARTIN, X. **Economic growth**. New York: McGraw-Hill, 1995. 539 p.

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil/EDUSP, 1982. 684 p.

CHIANG, A.C. **Elements of dynamic optimization**. New York: McGraw-Hill, 1992. 327 p.

DORFMAN, R. An economic interpretation of optimal control theory. **American Economic Review**, p. 817-831, dez. 1969.

EVANS, G.C. The dynamics of monopoly. **American Mathematical Monthly**, p. 77-83, Feb. 1924.

HILTEN, O.V.; KORT, P.M.; VAN LOON, P.J.J.M. **Dynamic policies of the firm: an optimal control approach**. Berlim: Springer-Verlag, 1993. 445 p.

KAMIEN, M.I.; SCHWARTZ, N.L. **Dynamic optimization**: the calculus

of variations and optimal control in economics and management. Amsterdam: Elsevier Science, 1991. 377 p.

LELAND, H.E. The dynamics of a revenue maximizing firm. **International Economic Review**, p. 376-385, June 1972.

LEONARD, D.; LONG, N.V. **Optimal control theory and static optimization in economics**. New York: Cambridge University Press, 1992. 353 p.

PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKII, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F. **The mathematical theory of optimal processes**. New York: Interscience Publishers, 1962. 360 p.

RAMSEY, F. A mathematical theory of savings. **Economic Journal**, p. 543-559, Dec. 1928.

ROBERTS, B.; SCHULZE, D.L. **Modern mathematics and economic analysis**. Toronto: W.W. Norton, 1973. 550 p.

SEIERSTAD, A.; SYDSAETER, K. **Optimal control theory with economic applications**. Amsterdam: North Holland, 1987. 445 p.

STOKEY, N.L.; LUCAS, R.E. **Recursive methods in economic dynamics**. Cambridge: Harvard University Press, 1989. 588 p.

TSIDDON, D. **Optimization over time: optimal control**. 1999. 9 p. (Mimeogr.).

WEBER, J.E. **Matemática para economia e administração**. São Paulo: Harbra, 1986. 674 p.

ZILL, D.G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira, 2003. 492 p.

Capítulo 3

Funções de utilidade e demanda do consumidor

Eduardo Rodrigues de Castro[1]
Adelson Martins Figueiredo[2]
Maurinho Luiz dos Santos[3]

3.1. Introdução

As relações econômicas estão presentes na vida de cada indivíduo influenciado suas decisões e a teoria econômica procura explicá-las de uma forma sistemática. Do ponto de vista do consumidor, preço, quantidade demandada dos bens e renda estão entre as variáveis econômicas mais diretamente ligadas ao seu cotidiano. Quem já não se deparou com a situação de ao comprar um determinado produto e perceber que este teve seu preço aumentado, reduziu a quantidade que iria comprar ou o substituiu por outro produto mais barato e acessível ao seu orçamento? Existe uma relação inversa entre preço e quantidade que, se os consumidores agirem com um mínimo de racionalidade, permite estabelecer um padrão de comportamento, que é o que a teoria do consumidor procura analizar.

No entanto, o que está por trás desse comportamento? Para o consumidor, basta escolher aqueles bens que lhe trazem maior satisfação e que estejam dentro de suas limitações orçamentárias. Contudo, existem várias informações relacionadas à lei da demanda que podem não interessar ao consumidor diretamente, mas que são de grande importância no

[1] Doutorando em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV e Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: eduardo@ufscar.br
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

entendimento das conseqüências de medidas econômicas que podem afetar esse comportamento.

Uma das teorias que procuram explicar o comportamento do consumidor é a que se baseia no conceito de utilidade, que está relacionada à satisfação do consumidor ao consumir um determinado bem. Esse conceito originou-se com Jeremy Bentham, que imaginou inicialmente uma função utilidade para a sociedade, a partir da função de utilidade de cada indivíduo, mas percebeu que a função utilidade não poderia ser comparada entre eles. Passou-se então a construir funções individuais, nas quais a cada bem era atribuído um valor de utilidade. De acordo com o conceito inicial, as utilidades eram aditivas, ou seja, a utilidade de cada bem era independente do consumo dos demais bens (BINGER; HOFFMANN, 1998).

Mais tarde, verificou-se que o consumo dos bens e, conseqüentemente, as utilidades não eram independentes, além da dificuldade de atribuir valores de utilidade para cada bem consumido. Assim, a teoria evoluiu para a abordagem ordinal, na qual assume-se que o consumidor é capaz de atribuir valores às cestas no sentido de ordená-las quanto às suas preferências, não importando a quantidade de utilidade que cada uma está lhe proporcionando (BINGER; HOFFMANN, 1998).

Neste capítulo será discutida apenas a abordagem ordinal. Inicialmente, serão apresentados o conceito das curvas de indiferença e os pressupostos relacionados à sua construção. A partir daí, serão definidos o equilíbrio do consumidor, os fatores relacionados à sua escolha, a sua restrição orçamentária e as mudanças no equilíbrio devido a alterações na renda e no preço, até ser derivada a curva de demanda. Em seguida, serão discutidos os efeitos renda e substituição, que ocorrem quando há uma mudança no preço do bem. Por fim, o modelo será matematizado, obtendo-se as funções de demanda do consumidor.

3.2. As preferências do consumidor

Considere inicialmente um consumidor que tenha à sua disposição dois bens de consumo, Q_1 e Q_2. Este consumidor irá naturalmente escolher a combinação desses dois bens que lhe proporcionará maior satisfação, o

que, a princípio, é uma escolha relativamente simples. No entanto, havendo interesse em ordenar as cestas de consumo que contenham os dois bens levando-se em conta todas as combinações possíveis entre Q_1 e Q_2, a situação se torna um pouco mais complexa. Para ilustrar a situação, considere-se a Figura 3.1, na qual as quantidades do bem Q_1 estão representadas na abscissa e as quantidades do bem Q_2, na ordenada. Existem infinitas combinações possíveis das quantidades dos bens 1 e 2, o que certamente traria bastante dificuldade a qualquer consumidor que decidisse ordená-las de acordo com o nível de satisfação que cada uma delas lhe proporciona. Na Figura 3.1 estão representadas apenas cinco: as cestas A, B, C, D e E.

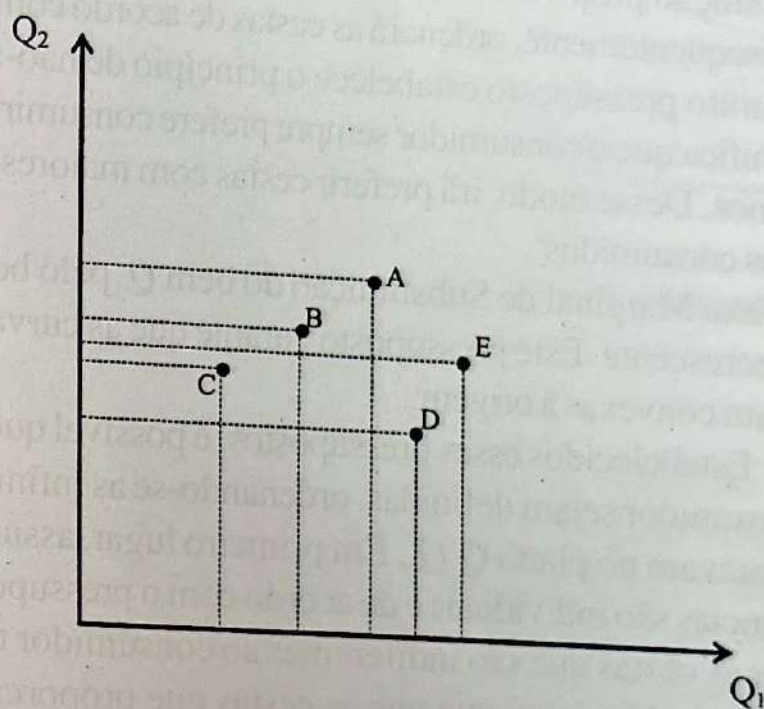



Figura 3.1 - Cestas de consumo disponíveis ao consumidor, considerando um mercado com dois bens de consumo: Q_1 e Q_2

Para possibilitar a ordenação das cestas de consumo, são necessários alguns pressupostos relativos à preferência do consumidor, os quais são apresentados a seguir:

1) As preferências são completas, ou seja, se uma cesta qualquer *A* é preferível a uma cesta *B*, então *B* não pode ser preferível a *A*. Dito de

outra forma: se $A^{P} B$, então $B^{NP} A$, em que o símbolo *P* denota a relação de preferência e *NP* a não-preferência.

2) As preferências devem ser reflexivas, ou seja, se *A* é indiferente a *B*, então *B* também deve ser indiferente a *A*. Esta pressuposição implica que para o consumidor existem cestas que são indiferentes e lhe trazem o mesmo nível de satisfação. Se $A^{I} E$, então $E^{I} A$, em que I denota indiferença entre as cestas de consumo.
3) As preferências devem ser transitivas, ou seja: se $A^{P} B, B^{P} C \therefore A^{P} C$.
4) As preferências são individuais – cada consumidor tem um nível de satisfação próprio, de acordo com as cestas de bens consumidas, e, conseqüentemente, ordenará as cestas de acordo com sua preferência.
5) O quinto pressuposto estabelece o princípio de não-saciedade, o que significa que o consumidor sempre prefere consumir mais a consumir menos. Desse modo, irá preferir cestas com maiores quantidades dos bens consumidos[4].
6) A Taxa Marginal de Substituição do bem Q_2 pelo bem Q_1 (TMS_{Q2Q1}) é decrescente. Este pressuposto garante que as curvas de indiferença sejam convexas à origem.

Estabelecidos esses pressupostos, é possível que as Preferências do Consumidor sejam definidas, ordenando-se as infinitas cestas que se apresentavam no plano $Q_1 Q_2$. Em primeiro lugar, assumindo-se que as preferências são individuais e de acordo com o pressuposto 2, é possível agrupar as cestas que são indiferentes ao consumidor traçando-se uma *Curva de Indiferença*, que une as cestas que proporcionam o mesmo nível de satisfação. Pelo pressuposto 1, que estabelece que as preferências são completas, podem-se ordenar as curvas de indiferença ordenando os grupos de cestas que são mais preferíveis, ou ordenando as curvas de

---

[4] Este pressuposto está de certa forma relacionado à continuidade das preferências, que alguns autores colocam como um pressuposto específico. A continuidade exclui as preferências lexicográficas, em que o consumidor leva em conta apenas um dos bens, preferindo cestas que, por exemplo, contenham mais quantidade do bem Q_1. O bem Q_2 só influencia a escolha quando a quantidade do bem Q_1 é igual entre as cestas. Este tipo de preferência é também chamado conjunto unitário e não permite traçar uma curva de indiferença. Para mais detalhes sobre preferências lexicográficas, ver Binger e Hoffmann (1998, p. 111).

indiferença. De acordo com o pressuposto da não-saciedade, as cestas com maior quantidade de bens são preferíveis, de modo que aquelas curvas que estão mais distantes da origem trarão maior satisfação ao consumidor. O pressuposto 3, que estabelece que as preferências são transitivas, evita que as curvas de indiferença se cruzem, conforme ocorre na Figura 3.2a.

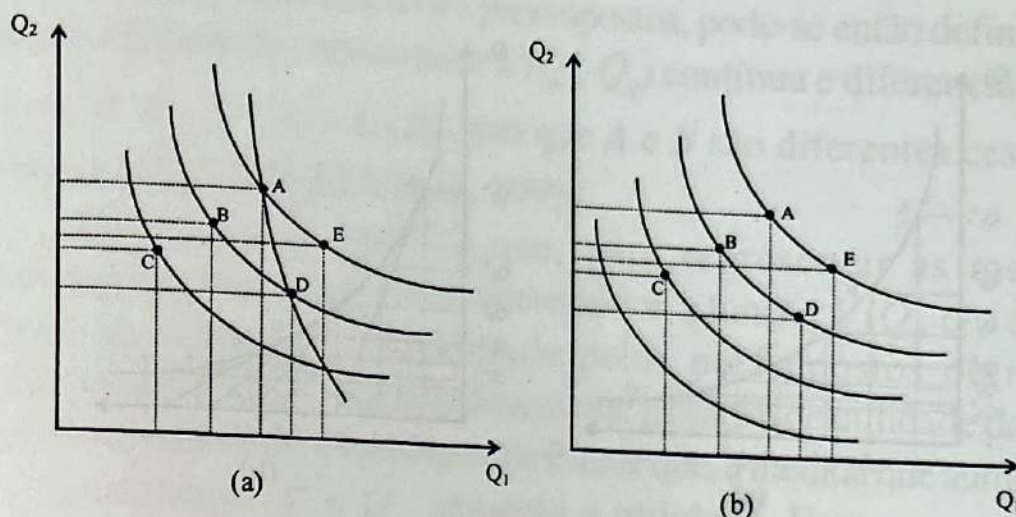



Figura 3.2 - Ordenação das cestas de consumo disponíveis ao consumidor através das curvas de indiferença

Pela Figura 3.2a, a cesta *A* se encontra na interseção das duas curvas de indiferença, de modo que ela é ao mesmo tempo indiferente às cestas *E* e *D*. No entanto, pelo quinto pressuposto, a cesta *E* deveria ser preferível à cesta *D*, uma vez que a curva de indiferença que contém *E* é mais alta, proporcionando maior nível de satisfação ao consumidor. Esta situação estaria violando o princípio da transitividade, uma vez que, sendo $E^{1} A$, $A^{1} D$, *E* deveria ser indiferente a *D*, o que levaria a uma inconsistência na ordenação das preferências. Assim, assumindo que as preferências são transitivas evita-se que as curvas de indiferença se cruzem, de modo que se pode traçar o Mapa de Indiferença do consumidor (Figura 3.2b), que nada mais é do que o mesmo conjunto de cestas da Figura 3.1, apresentado agora de forma ordenada.

A convexidade das curvas de indiferença é conseqüência do sexto pressuposto, A TMS_{Q2Q1} reflete a taxa com que o indivíduo deseja trocar

o bem Q_2 pelo bem Q_1 mantendo o mesmo nível de satisfação, ou seja, em que quantidade o consumidor está disposto a abrir mão do bem Q_2 para adquirir uma unidade adicional do bem Q_1, mudando sua cesta de consumo ao longo da mesma curva de indiferença. A Figura 3.3a ilustra essa situação.

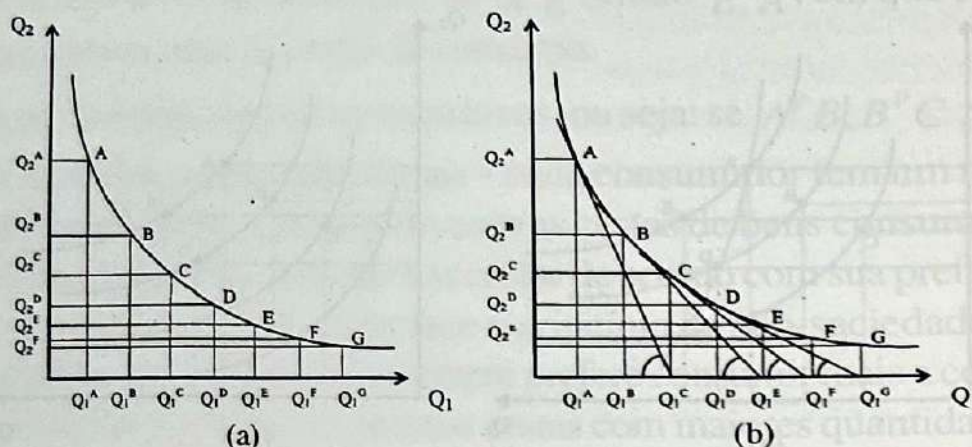



Figura 3.3 - Taxa marginal de substituição de Q_2 por Q_1

Considere-se a cesta inicial *A* com uma unidade do bem 1 (Q_1^A) e Q_2 unidades do bem 2 (Q_2^A). Para o consumidor consumir a cesta *B*, que está na mesma curva de indiferença e possui uma unidade adicional de Q_1 em relação a *A*, ele terá que abrir mão de uma determinada quantidade de Q_2. Para consumir a cesta *C*, com uma unidade adicional de Q_1 em relação a *B*, terá que abrir mão de mais uma determinada quantidade de Q_2, e assim por diante. O que se percebe é que, à medida que se caminha ao longo da curva de indiferença, o consumidor está disposto a abrir mão de uma quantidade cada vez menor de Q_2 para adquirir uma unidade adicional de Q_1. Assim, considerando-se variações discretas, a TMS_{Q2Q1} pode ser definida pela seguinte expressão:

$$TMS_{Q2Q1} = -\frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \qquad (3.1)$$

Como a expressão $\Delta Q_2 / \Delta Q_1$ é negativa e crescente[5] à medida que se caminha ao longo da curva de indiferença, é necessário adicionar o sinal negativo para que a expressão (3.1) seja decrescente, uma vez que o indivíduo deseja trocar cada vez menos quantidade de Q_2 para obter uma unidade adicional de Q_1.

Uma vez definidos esses pressupostos, pode-se então definir uma função Utilidade do consumidor $U(Q_1, Q_2)$ contínua e diferenciável tal que: se $A^P B \therefore U(A) > U(B)$, em que A e B são diferentes cestas de consumo (MAS COLELL et al., 1995).

Essa relação implica que, para representar as mesmas características da preferência do consumidor, a função $U(Q_1, Q_2)$ deverá atender à ordenação estabelecida pelos pressupostos definidos anteriormente. Uma das características que a função de utilidade deve ter é a de monotonicidade, o que equivale a dizer que, à medida que aumentam as quantidades de Q_1 e Q_2, aumenta a utilidade. Essa característica corresponde ao pressuposto de não-saciedade.

Dada uma função utilidade $U(Q_1, Q_2)$ e considerando variações infinitesimais, a variação da utilidade do consumidor, ao modificar as quantidades consumidas de cada bem, pode ser representada da seguinte forma:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial U}{\partial Q_2} dQ_2 \qquad (3.2)$$

em que dU representa a variação total da utilidade U correspondente à taxa de variação <u>parcial</u> da utilidade ao se variar a quantidade do bem Q_1 ($\partial U / \partial Q_1$) vezes a variação na quantidade de Q_1 (dQ_1) mais a taxa de variação <u>parcial</u> da utilidade ao se variar a quantidade do bem Q_2 ($\partial U / \partial Q_2$) vezes a variação na quantidade de Q_2 (dQ_2).

Ao consumir diferentes cestas ao longo da mesma curva de

[5] Como o sinal da expressão $\Delta Q_2/\Delta Q_1$ é negativo, à medida que o consumidor passa da cesta A para B, C, etc., menor o valor absoluto desta. Sendo negativo, o resultado da expressão seria crescente, contrariando o pressuposto estabelecido.

indiferença, não haverá mudança na utilidade do consumidor. Definindo-se $\partial U/\partial Q_1$ como a utilidade marginal do bem 1 e $\partial U/\partial Q_2$ como a utilidade marginal do bem 2, a expressão (3.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$0 = UMa_1 dQ_1 + UMa_2 dQ_2$$

resultando na expressão:

$$-\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{UMa_1}{UMa_2} \qquad (3.3)$$

ou seja, a taxa marginal de substituição é igual à razão das utilidades marginais dos bens Q_1 e Q_2.

Graficamente, a TMS_{Q2Q1} pode ser definida como o negativo da inclinação da tangente à curva de indiferença, indicado pelo sinal negativo do lado esquerdo da expressão (3.3)[6] (Figura 3.3b).

3.3. A restrição orçamentária e o equilíbrio do consumidor

Uma vez definido o mapa de indiferença do consumidor, pergunta-se: qual cesta escolher? Pelo princípio da não-saciedade, cestas com maior quantidade de bens proporcionarão maior utilidade, mas, ao mesmo tempo, custam mais. Assim, visto que o consumidor tem uma *Restrição Orçamentária*, que limita a quantidade de cestas disponíveis, sua escolha consiste em definir a cesta que lhe trará maior utilidade entre aquelas que tem condições de pagar, ou seja, o consumidor deseja maximizar sua utilidade dada a sua renda disponível. Assumindo que o consumidor gasta toda a sua renda no consumo dos bens Q_1 e Q_2, a sua restrição orçamentária pode ser definida como:

$$R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \qquad (3.4)$$

---

[6] À medida que o consumidor consome cestas diferentes ao longo da curva de indiferença, com quantidades menores de Q_2 e maiores de Q_1, a inclinação da tangente da curva de indiferença inicialmente tem uma inclinação elevada, negativa, tendendo para zero à medida que se caminha ao longo da curva de indiferença, de modo que é necessário o sinal negativo para que a TMS_{Q2Q1} seja decrescente.

em que R é a renda do consumidor, P_1 é o preço do bem Q_1 e P_2 é o preço do bem Q_2.

Para definir a cesta de consumo ótima do consumidor dada a sua restrição orçamentária, é necessário expressar a equação (3.4) em função de Q_2, obtendo-se a seguinte expressão:

$$Q_2 = \frac{R}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} Q_1 \tag{3.5}$$

A equação (3.5) define a quantidade consumida de Q_2 como função da quantidade consumida de Q_1, tendo como parâmetros a renda, o preço de Q_2 e o preço de Q_1. Considerando inicialmente que a quantidade consumida de Q_1 é função apenas do seu preço, mantendo-se o preço de Q_2 e a renda constante, dada uma variação em P_1, altera-se a quantidade consumida de Q_1 mudando-se a quantidade consumida de Q_2. Essa variação pode ser expressa pela expressão:

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = -\frac{P_1}{P_2} \tag{3.6}$$

que expressa a mudança na quantidade do bem Q_2 dada uma variação na razão dos preços de mercado dos bens Q_1 e Q_2. Passando o sinal para o lado esquerdo da equação, tem-se:

$$-\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{P_1}{P_2} \tag{3.7}$$

A expressão (3.7) nada mais é que a TMS_{Q2Q1} definida em termos da razão dos preços. Ou seja, existe um ponto em que a disposição do consumidor de trocar um bem pelo outro, representada pela razão das utilidades marginais, é igual à disponibilidade relativa desses bens no mercado, representada pela razão dos preços, o que representa a cesta ótima do consumidor, dada uma restrição orçamentária.

$$\frac{UMa_1}{UMa_2} = \frac{P_1}{P_2} \tag{3.8}$$

O equilíbrio do consumidor está representado na Figura 3.4.

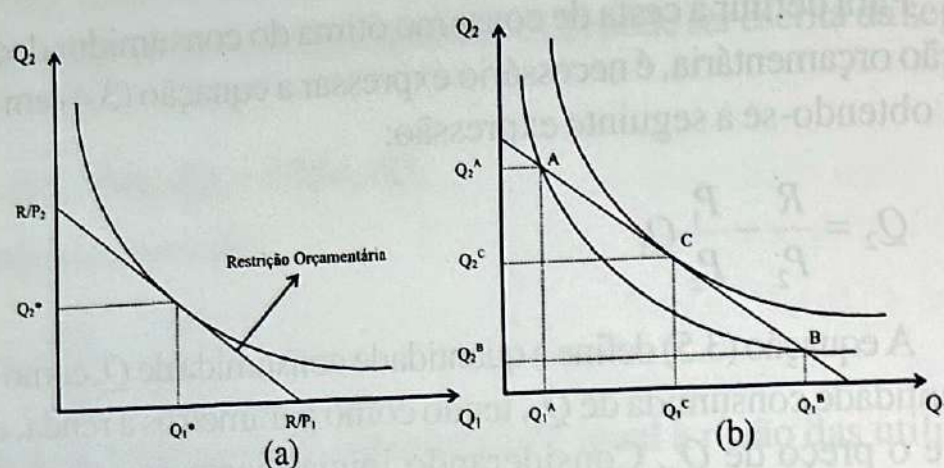



Figura 3.4 - Equilíbrio do consumidor: restrição orçamentária tangencia a curva de indiferença

Qualquer cesta que esteja sobre a restrição orçamentária ou abaixo dela é possível de ser adquirida. Considerando o mapa de indiferença, o consumidor, ao maximizar sua utilidade, estará procurando atingir a mais alta curva de indiferença, o que ocorre quando a restrição orçamentária tangencia a curva de indiferença. Isso só ocorrerá quando a condição de equilíbrio (equação 3.8) for satisfeita, ou seja, quando a inclinação da restrição orçamentária for igual à inclinação da curva de indiferença (Figura 3.4a). Uma outra forma de se verificar esta condição é através do conceito de conjunto convexo, representado na Figura 3.4b. Considerando uma curva de indiferença que seja cortada pela restrição orçamentária, definem-se os pontos A e B. O conjunto convexo é o conjunto de cestas que estão sobre a restrição orçamentária, entre os pontos A e B, que pode ser definido pela seguinte expressão:

$$C = tA + (1-t)B \tag{3.9}$$

em que C é uma cesta qualquer que pode ser escrita como uma combinação convexa das cestas A e B. A convexidade das curvas de indiferença implica que qualquer cesta definida pela expressão (3.9)

proporciona maior utilidade ao consumidor do que as cestas A ou B. Ou seja:

$$U(C) > U(A)$$
$$U(C) > U(B) \qquad (3.10)$$

3.4. Outros tipos de curvas de indiferença

As curvas de indiferença convexas à origem, conforme apresentado, são chamadas preferências bem comportadas, uma vez que atendem a todos os pressupostos da abordagem ordinal da teoria da preferência do consumidor. Um exemplo de funções de preferência que originam curvas de indiferença convexas à origem são as funções do tipo $U = AQ_1^{\alpha}Q_2^{\beta}$, chamadas de funções do tipo Cobb-Douglas. No entanto, existem outros tipos de preferências que ferem algum pressuposto. Dentre elas, as principais são:

– *Preferências lineares*, que ocorrem quando os bens são substitutos perfeitos. Nesse caso, a função de utilidade é do tipo $U = aQ_1 + bQ_2$. As utilidades marginais de Q_1 e Q_2 são constantes e o equilíbrio ocorrerá em um ponto que não atende ao critério definido pela equação (3.8). Esta situação é ilustrada na Figura 3.5a. Sendo a inclinação da restrição orçamentária maior que a inclinação da curva de indiferença (em módulo), o indivíduo se especializará no consumo do bem Q_2. Caso contrário, consumirá apenas Q_1. Se for igual, poderá optar por qualquer cesta que esteja sobre a curva de indiferença e sobre a restrição orçamentária.

– *Bens complementares perfeitos*, em que as preferências são do tipo ilustrado na Figura 3.5b. Este tipo de preferência ocorre quando o consumo dos dois bens ocorre sempre na mesma proporção, ferindo o princípio da não-saciedade e da TMS decrescente. A função utilidade é representada por $Min\{aQ_1, bQ_2\}$ e os bens Q_1 e Q_2 são consumidos na proporção ($Q_1 / Q_2 = b / a$), de modo que maiores quantidades dos bens somente serão consumidas se atenderem a esta proporção. Assim, se o

consumidor estiver consumindo a cesta A, havendo aumento na quantidade de um dos bens apenas ou havendo mudança nos preços relativos, o consumidor não mudará sua cesta, ferindo o pressuposto da não-saciedade.

- *Preferências quase lineares*, que ocorre quando o consumo de um dos bens independe da renda, e a função de preferência é do tipo $U(Q_1, Q_2) = v(Q_1) + Q_2$, em que $v(Q_1)$ representa uma função qualquer de Q_1. Este tipo de preferência está representado na Figura 3.5c[7].

3.5. Mudanças no equilíbrio do consumidor e a curva de demanda

O equilíbrio do consumidor reflete a sua preferência, através da razão das utilidades marginais, e o custo relativo destes bens no mercado, dado pela razão de preços. Dada uma função utilidade, o equilíbrio estará sujeito a mudança na razão dos preços e mudança na renda, que desloca a restrição orçamentária.

Mantendo-se inicialmente os preços constantes, o aumento na renda deslocará a restrição orçamentária paralelamente à restrição original, permitindo ao consumidor atingir uma curva de indiferença mais alta, aumentando sua utilidade. As diferentes cestas de equilíbrio obtidas a partir de variações da renda determinam a Curva de Renda Consumo (Figura 3.6).

A variação da renda provoca diferentes variações no consumo dos bens. Existem bens para os quais, com o aumento da renda, aumenta-se a quantidade consumida. Alguns aumentam a demanda mais que proporcional – são os *bens superiores,* enquanto outros aumentam a demanda menos que proporcional – *bens normais*. Há aqueles que, ao se aumentar a renda, reduz-se a quantidade consumida – são os *bens inferiores*. A relação das quantidades consumidas de cada bem, dada uma variação na renda do consumidor, é determinada pela curva de Engel. Essas relações estão representadas na Figura 3.7.

---

[7] Existem ainda outros tipos de preferência, como as que representam o consumo de um bem e um mal (que é um bem que, ao ser consumido, traz alguma insatisfação ao consumidor), preferências côncavas, etc. Mais detalhes com relação a outros tipos poderão ser vistos em Varian (2000).

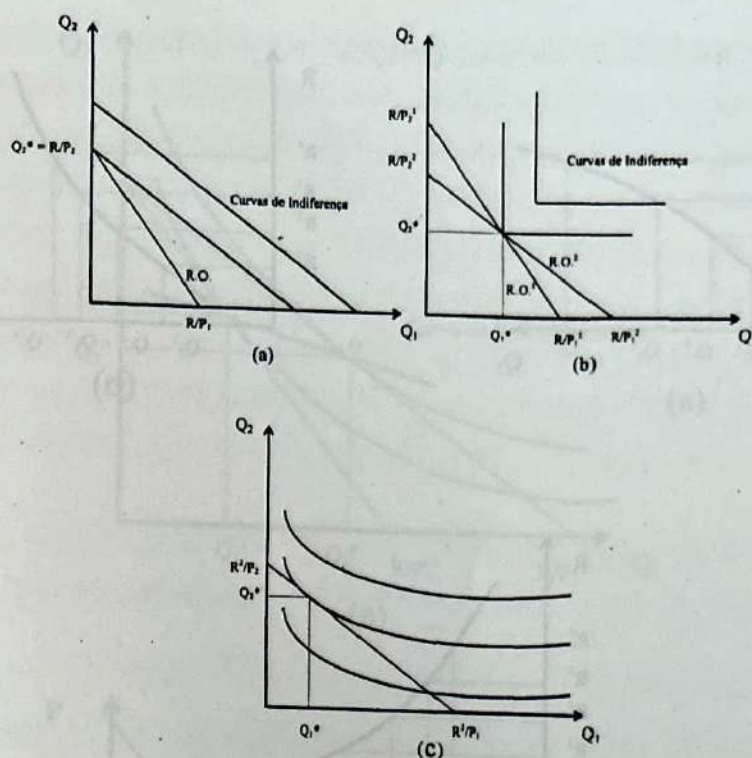



Figura 3.5 - Outros tipos de preferência do consumidor

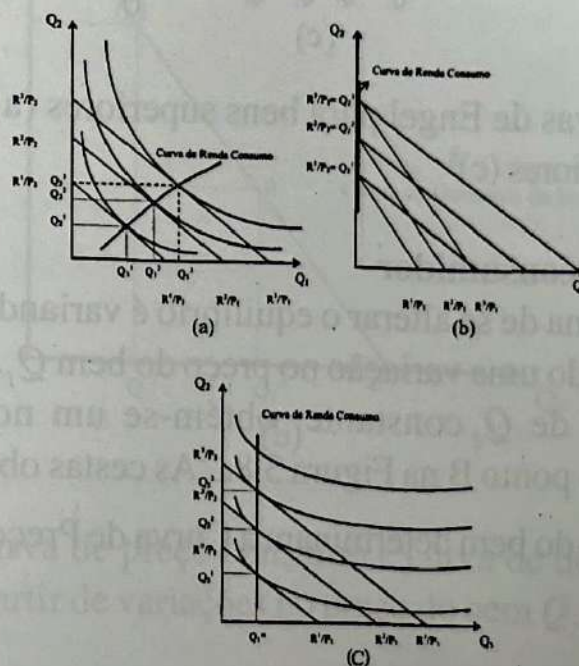



Figura 3.6 - Mudanças do equilíbrio do consumidor devido a variações na renda, mantendo-se os preços constantes, para preferências convexas (a), preferências lineares - bens substitutos perfeitos (b) e preferências quase lineares (c)

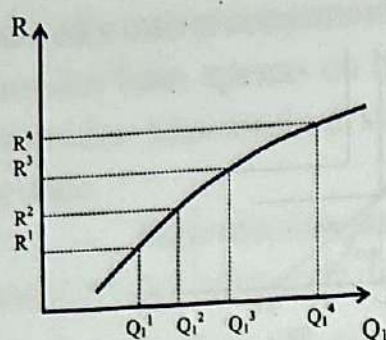
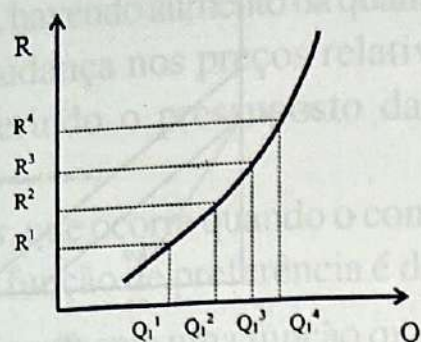
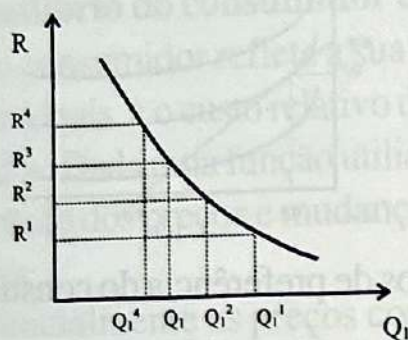



Figura 3.7 - Curvas de Engel para bens superiores (a), normais (b) e inferiores (c)[8]

3.6. Demanda do consumidor

Outra forma de se alterar o equilíbrio é variando os preços dos bens. Considerando uma variação no preço do bem Q_1, mantendo-se a renda e o preço de Q_2 constante, obtém-se um novo equilíbrio, representado pelo ponto B na Figura 3.8a. As cestas obtidas através da variação do preço do bem determinam a Curva de Preço Consumo.

---

[8] As curvas de Engel podem ser representadas com a Renda na abscissa e o bem na ordenada, o que inverteria as curvas dos bens superiores e normais.

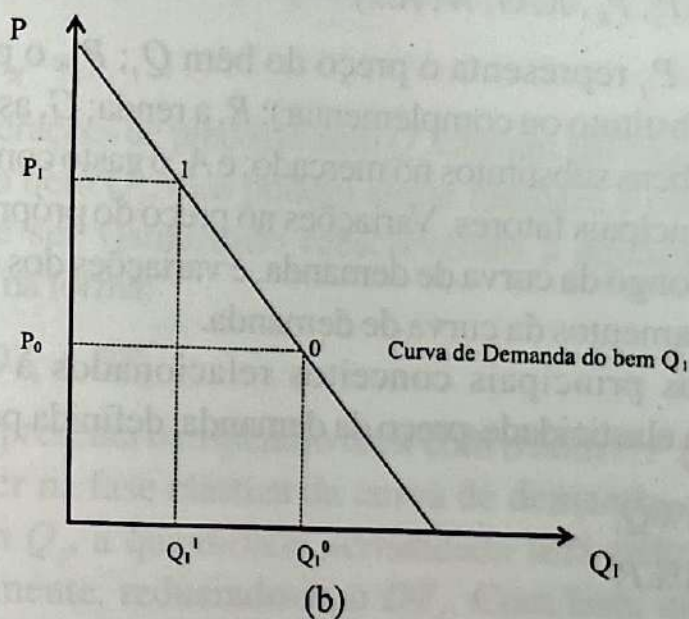
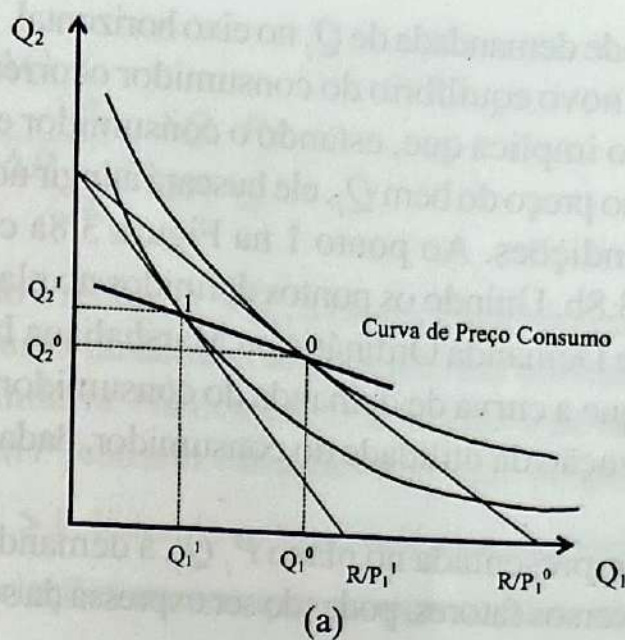



Figura 3.8 - Curva de preço consumo e curva de demanda obtida a partir de variações no preço do bem Q_1

A curva de demanda do bem Q_1 pode ser derivada a partir dos pontos de equilíbrio obtidos a partir da variação do preço deste bem. Na Figura 3.8a, o ponto 0 representa o equilíbrio inicial. A este ponto corresponde o ponto 0 na Figura 3.8b, que tem o preço de Q_1 no eixo

vertical e a quantidade demandada de Q_1 no eixo horizontal. Aumentando-se o preço de Q_1, o novo equilíbrio do consumidor ocorrerá no ponto 1, na Figura 3.8a. Isso implica que, estando o consumidor em equilíbrio, havendo aumento no preço do bem Q_1, ele buscará atingir novo equilíbrio, dadas as novas condições. Ao ponto 1 na Figura 3.8a corresponde o ponto 1 na Figura 3.8b. Unindo os pontos definidos no plano P_1Q_1, tem-se então a Curva de Demanda Ordinária ou Marshaliana Inversa[9] de Q_1. Conclui-se então que a curva de demanda do consumidor representa os pontos de maximização da utilidade do consumidor, dadas as variações no preço do bem.

Apesar de representada no plano P_1 Q_1, a demanda do bem Q_1 é influenciada por diversos fatores, podendo ser expressa da seguinte forma:

$$Q_1 = q(P_1, P_R, R, G, N, A...) \tag{3.11}$$

em que P_1 representa o preço do bem Q_1; P_R, o preço do bem relacionado (substituto ou complementar); R, a renda; G, as preferências; N, o número de bens substitutos no mercado; e A, o gasto com propaganda, para citar os principais fatores. Variações no preço do próprio bem levam a variações ao longo da curva de demanda, e variações dos outros fatores levam a deslocamentos da curva de demanda.

Um dos principais conceitos relacionados à demanda do consumidor é a elasticidade-preço da demanda, definida por:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta\% Q_1}{\Delta\% P_1} \tag{3.12}$$

Como alterações no preço causam variações na quantidade no sentido inverso, a elasticidade-preço da demanda será negativa. Considerando variações discretas, esta expressão pode ser definida como:

---

[9] Em homenagem a Alfred Marshall. É denominada inversa porque, apesar de $Q_1 = q(P_1)$, representa-se o preço no eixo vertical e a quantidade no eixo horizontal.

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta Q_1 / Q_1}{\Delta P_1 / P_1} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta P_1} \frac{P_1}{Q_1} \tag{3.13}$$

Devido à relação P_1/Q_1, a elasticidade-preço da demanda varia ao longo da curva de demanda, podendo ser elástica, inelástica ou de elasticidade unitária. Na fase elástica da curva de demanda, variações percentuais em P_1 causam variações mais que proporcionais em Q_1, de modo que $|\varepsilon_X| > 1$. Estando na fase inelástica, variações percentuais em P_1 causam variações menos que proporcionais em Q_1, de modo que $|\varepsilon_X| < 1$. Se as variações no preço e na quantidade ocorrerem na mesma proporção, $|\varepsilon_X| = 1$.

As alterações de preço do bem Q_1 causam alterações diretas sobre o consumo do bem Q_1, mas podem afetar também o consumo do bem Q_2. Isso pode ser visualizado reescrevendo a equação da restrição orçamentária, na forma:

$$R = DT_1 + DT_2 \tag{3.14}$$

em que DT_i representa o dispêndio total com o bem *i* $(P_iQ_i,\ i = 1,2)$. Se o bem Q_1 estiver na fase elástica da curva de demanda, ao aumentar o preço do bem Q_1, a quantidade demandada será reduzida mais que proporcionalmente, reduzindo-se o DT_1. Com isso, eleva-se o DT_2, aumentando-se a quantidade consumida de Q_2 (Figura 3.8a) A Curva de Preço Consumo (CPC) do bem 1 será negativamente inclinada. Estando o bem Q_1 na fase inelástica da curva de demanda, aumentando-se o preço do bem Q_1, a redução na quantidade consumida será menos que proporcional, aumentando o dispêndio total com este bem. Se a renda for constante, o aumento no DT_1 implica redução do DT_2, ou seja, reduz-se a quantidade demandada do bem Q_2. Neste caso, a CPC_1 será positivamente inclinada (Figura 3.9a). Caso a elasticidade-preço da demanda de Q_1 seja unitária, o consumo do bem Q_2 não será afetado e a

CPC_l terá inclinação nula (Figura 3.9b).

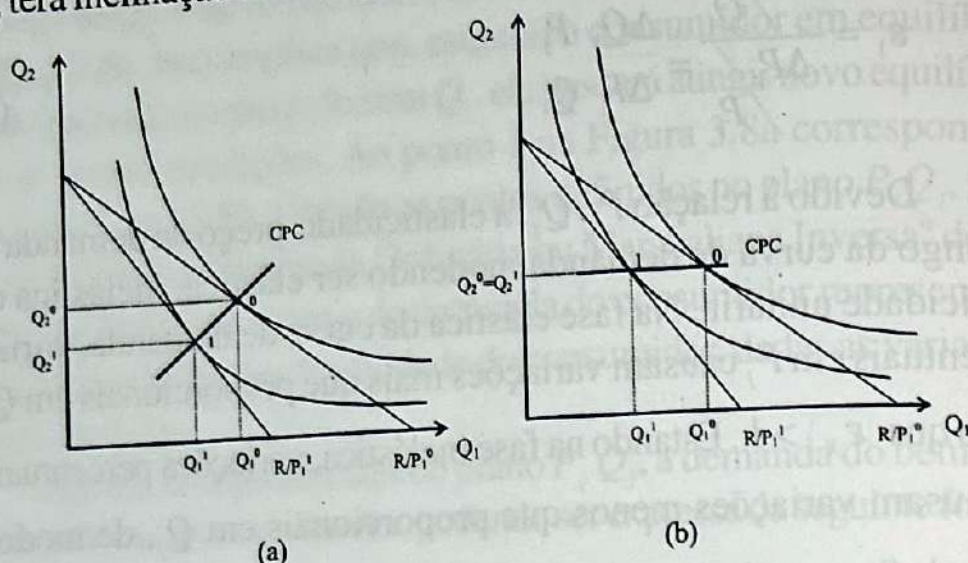



Figura 3.9 - Curvas de preço consumo para bens inelásticos (a) e de elasticidade unitária (b)

3.7. Efeito renda e efeito substituição

O efeito direto do aumento do preço é a redução da quantidade demandada, que é refletida na curva de demanda. No entanto, por trás do efeito do preço sobre a quantidade demandada existem dois efeitos: o efeito substituição, conseqüência da mudança relativa na razão dos preços; e o efeito renda, decorrente da queda relativa na renda devido ao aumento do preço do bem. Para decompor o efeito total do preço sobre a quantidade demandada, é dada uma compensação de renda ao consumidor após a variação do preço. Assim, é possível avaliar as variações na quantidade demandada devido à substituição de um bem pelo outro e devido à redução ou aumento da quantidade demandada em virtude da variação na renda.

A compensação da renda é feita de acordo com dois métodos: o de Hicks e o de Slutsky. O método de Hicks consiste em dar uma compensação na renda até que o consumidor possa atingir a mesma curva de indiferença ou mesmo nível de satisfação inicial. Pelo método de Slutsky, a compensação é dada até que o consumidor possa adquirir a mesma

cesta que consumia inicialmente, antes da variação no preço. Dada a compensação de renda, é possível obter a curva de demanda compensada, que exclui o efeito renda. A decomposição do efeito renda e do efeito substituição é ilustrada na Figura 3.10a.

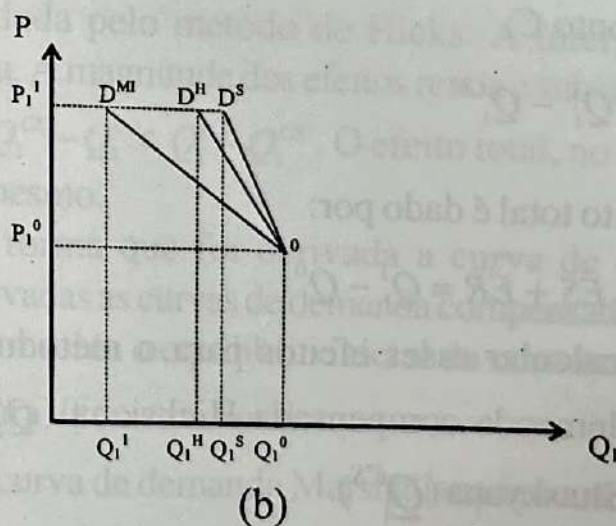
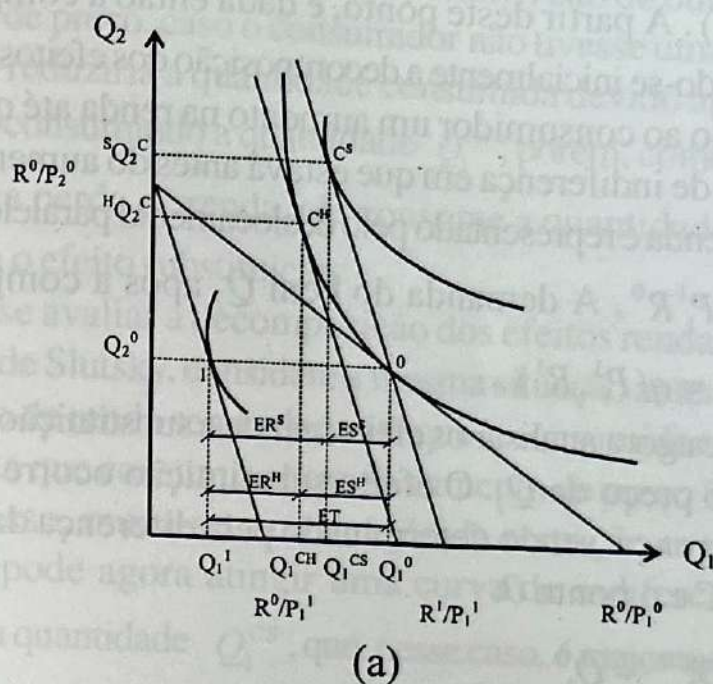



Figura 3.10 - Efeito renda e efeito substituição para bens normais, avaliados pelos métodos de Hicks e de Slutsky, e as respectivas demandas compensadas

Para avaliar os efeitos, considere que o consumidor esteja em equilíbrio no ponto 0, consumindo a quantidade Q_1 $(P_1^0, P_2^0$ e $R^0)$[10]. Dado um aumento no preço de Q_1, ocorrerá uma mudança na inclinação da restrição orçamentária e o equilíbrio ocorrerá no ponto 1, com a quantidade $Q_1 = q(P_1^1, R^0)$. A partir deste ponto, é dada então a compensação de renda. Analisando-se inicialmente a decomposição dos efeitos pelo método de Hicks, é dado ao consumidor um aumento na renda até que ele atinja a mesma curva de indiferença em que estava antes do aumento do preço. O aumento na renda é representado pelo deslocamento paralelo da restrição orçamentária $P_1^1 R^0$. A demanda do bem Q_1 após a compensação da renda será $Q_1^C = q(P_1^1, R^1)$.

Pode-se agora analisar os efeitos renda e substituição, decorrentes do aumento do preço de Q_1. O efeito substituição ocorre ao longo da curva de indiferença, sendo determinado pela diferença das demandas entre o ponto C e o ponto 0:

$$ES = Q_1^{CH} - Q_1^0 \tag{3.15}$$

O efeito renda é dado pelas diferenças das demandas entre o ponto 1 e o ponto C:

$$ER = Q_1^1 - Q_1^{CH} \tag{3.16}$$

O efeito total é dado por:

$$ET = ES + ER = Q_1^1 - Q_1^0 \tag{3.17}$$

Para calcular esses efeitos para o método de Slutsky, basta substituir a demanda compensada Hicksiana (Q_1^{CH}) pela demanda compensada Slutskyana (Q_1^{CS}).

[10] Os termos entre parênteses representam quais os preços e a renda no momento em que ocorreu determinado equilíbrio. O preço de Q_2 não será expresso daqui para frente, uma vez que permanece constante durante toda a análise. Da mesma forma, não se preocupará com as variações ocorridas para o bem Q_2, que dependerá da elasticidade-preço da demanda, conforme visto anteriormente.

Nesse caso, a variação da quantidade quando se dá a compensação ocorre no mesmo sentido da variação da renda, ou seja, ao compensar o consumidor pela perda relativa da renda decorrente do aumento do preço, ocorre aumento da quantidade consumida do bem Q_1, caracterizando um bem normal ou superior. Visto de outra forma, após um aumento de preço, caso o consumidor não tivesse uma perda relativa na renda, ele reduziria a quantidade consumida devido apenas ao efeito substituição, consumindo a quantidade Q_1^{CH}, porém, como o aumento de preço implica perda de renda, ele consome a quantidade Q_1^1. O efeito renda reforça o efeito substituição.

Para se avaliar a decomposição dos efeitos renda e substituição pelo método de Slutsky, considere a mesma situação anterior, mas com a compensação de renda sendo dada até que o consumidor possa adquirir a mesma cesta que consumia antes do aumento de preço (Figura 3.10a). Ao se fazer isso, muda-se a inclinação da restrição orçamentária e o consumidor pode agora atingir uma curva de indiferença mais alta, consumindo a quantidade Q_1^{CS}, que, nesse caso, é maior que a quantidade Q_1^{CH}, já que a compensação de renda dada pelo método de Slutsky é maior que aquela dada pelo método de Hicks. A interpretação dos resultados é a mesma. A magnitude dos efeitos renda e substituição serão, respectivamente: $Q_1^{CS} - Q_1^0$ e $Q_1^1 - Q_1^{CS}$. O efeito total, no entanto, será necessariamente o mesmo.

Da mesma forma que foi derivada a curva de demanda do consumidor, são derivadas as curvas de demanda compensadas. Na Figura 3.10b, o ponto 0 representa o equilíbrio inicial do consumidor. Dado o aumento de preço para P_1^1, o consumidor passa a consumir a quantidade Q_1^1, determinando a curva de demanda Marshaliana inversa (DMI). Pelo método de compensação de Hicks, seria consumida a quantidade Q_1^{CH}, determinando a curva de demanda compensada de Hicks (DH). Pelo método de Slutsky, a quantidade seria Q_1^{CS}, determinando a curva de

demanda compensada de Slutsky (DS).

As elasticidades-preço das demandas compensadas no caso de bens normais são mais elásticas que a elasticidade-preço da demanda Marshaliana inversa. Isso ocorre pelo fato de o efeito renda positivo reforçar o efeito substituição (que é sempre negativo), indicando que a sensibilidade do consumidor à mudança no preço é maior devido à perda de renda causada pelo aumento do preço.

A Figura 3.11 apresenta os métodos de decomposição de renda de Hicks e Slutsky para bens inferiores. Nesse caso, ao ser dada a compensação de renda, reduz-se a quantidade demandada, de modo que as quantidades Q_1^{CH} e Q_1^{CS} são menores que a quantidade Q_1. Os efeitos renda, substituição e total dados pelo método de Hicks são:

$$
\begin{aligned}
ES &= Q_1^{CH} - Q_1^0 \\
ER &= Q_1^1 - Q_1^{CH} \qquad (3.18) \\
ET &= ES + ER = Q_1^1 - Q_1^0
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, para calcular esses efeitos para o método de Slutsky, basta substituir a demanda compensada Hicksiana pela demanda compensada Slutskyana.

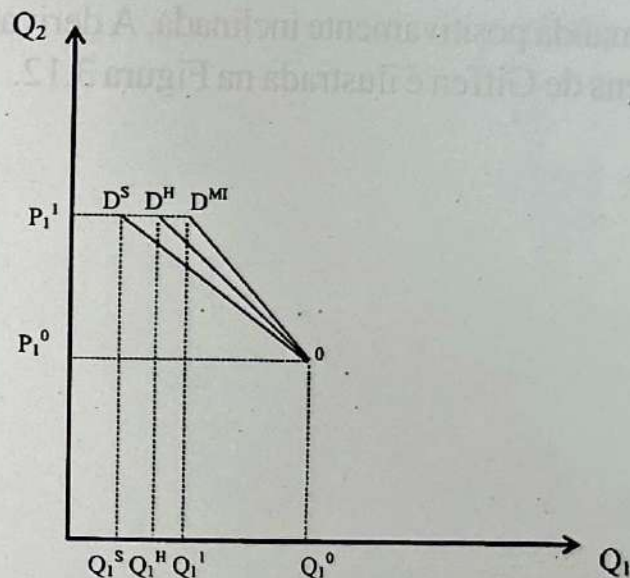
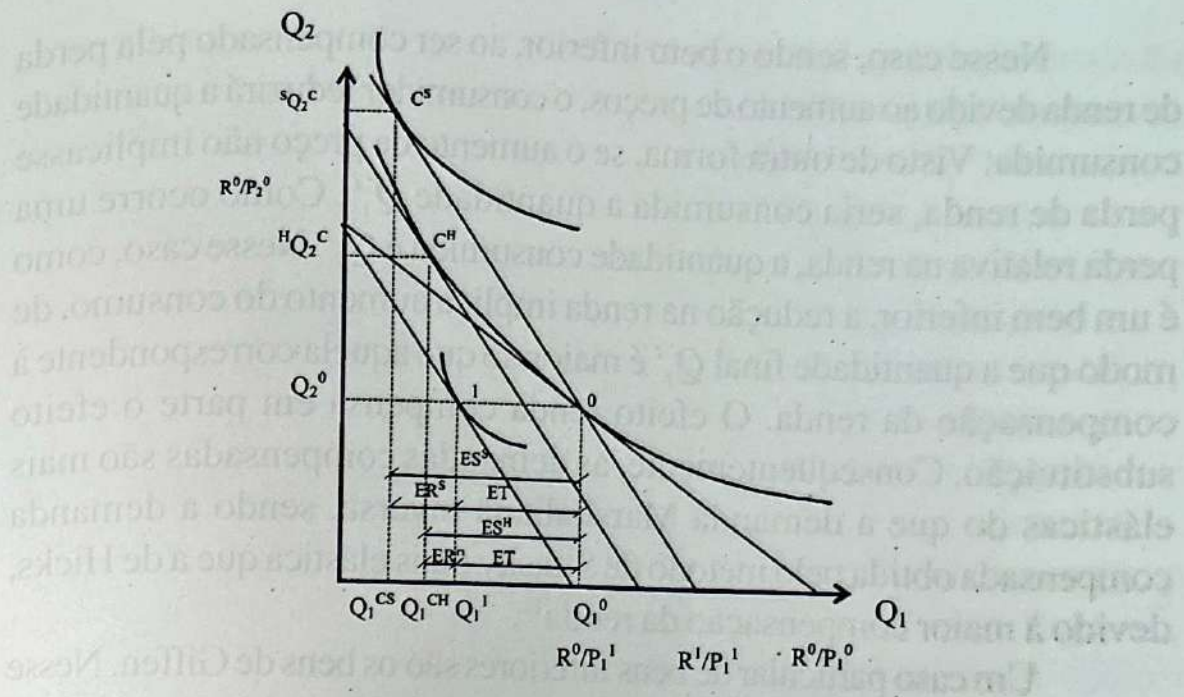
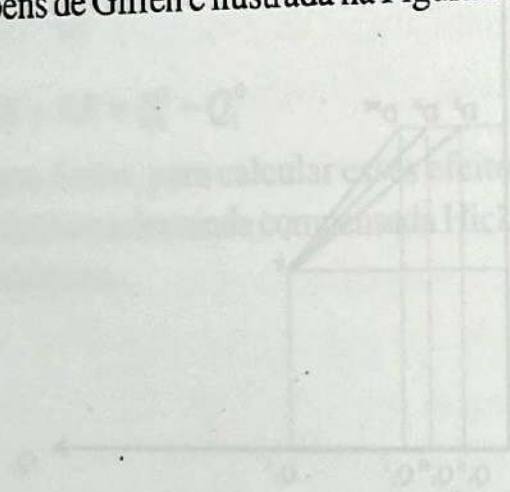



Figura 3.11 - Efeitos renda e substituição e demandas compensadas para bens inferiores

Nesse caso, sendo o bem inferior, ao ser compensado pela perda de renda devido ao aumento de preços, o consumidor reduzirá a quantidade consumida. Visto de outra forma, se o aumento de preço não implicasse perda de renda, seria consumida a quantidade Q_1^C. Como ocorre uma perda relativa na renda, a quantidade consumida é Q_1^1. Nesse caso, como é um bem inferior, a redução na renda implica aumento do consumo, de modo que a quantidade final Q_1^1 é maior do que aquela correspondente à compensação da renda. O efeito renda compensa em parte o efeito substituição. Conseqüentemente, as demandas compensadas são mais elásticas do que a demanda Marshaliana inversa, sendo a demanda compensada obtida pelo método de Slutsky mais elástica que a de Hicks, devido à maior compensação da renda[11].

Um caso particular de bens inferiores são os bens de Giffen. Nesse caso, o efeito renda mais que compensa o efeito substituição, originando uma curva de demanda positivamente inclinada. A derivação da curva de demanda para bens de Giffen é ilustrada na Figura 3.12.

[11] As elasticidades-preço das demandas compensadas relativas à elasticidade-preço da demanda marshaliana inversa variam conforme o bem seja inferior ou superior. Também irão variar caso a análise seja feita considerando-se uma redução de preço. Esta análise fica como exercício para o leitor.

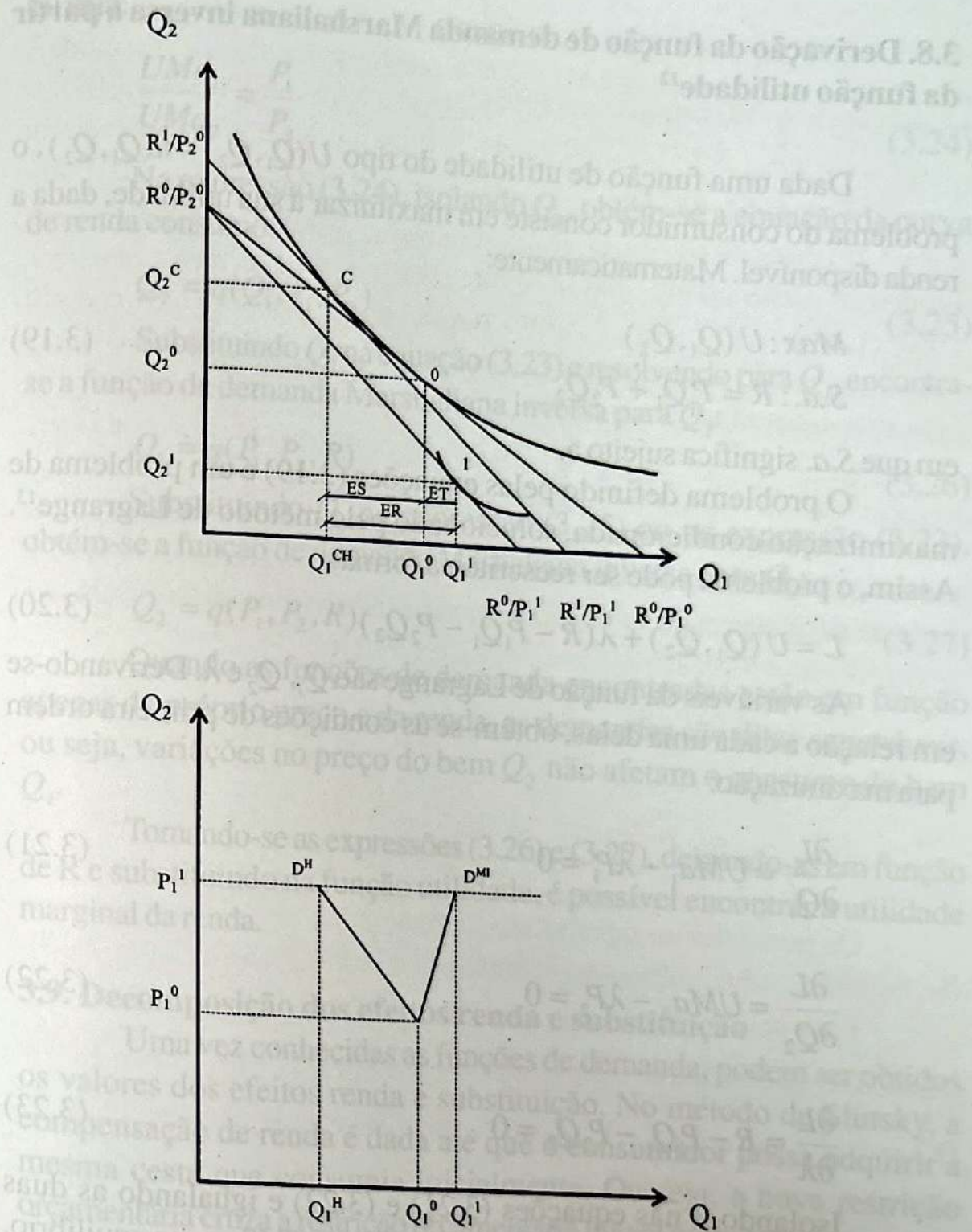



Figura 3.12 - Derivação da curva de demanda para bens de Giffen

3.8. Derivação da função de demanda Marshaliana inversa a partir da função utilidade[12]

Dada uma função de utilidade do tipo $U(Q_1,Q_2)=u(Q_1,Q_2)$, o problema do consumidor consiste em maximizar a sua utilidade, dada a renda disponível. Matematicamente:

$$\begin{aligned} &Max: U(Q_1,Q_2) \\ &S.a.: R = P_1Q_1 + P_2Q_2 \end{aligned} \qquad (3.19)$$

em que *S.a.* significa sujeito a.

O problema definido pelas equações (3.19) é um problema de maximização condicionada, solucionado pelo método de Lagrange[13]. Assim, o problema pode ser reescrito na forma:

$$L = U(Q_1,Q_2) + \lambda(R - P_1Q_1 - P_2Q_2) \qquad (3.20)$$

As variáveis da função de Lagrange são Q_1, Q_2 e λ. Derivando-se em relação a cada uma delas, obtêm-se as condições de primeira ordem para maximização:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = UMa_1 - \lambda P_1 = 0 \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = UMa_2 - \lambda P_2 = 0 \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1Q_1 - P_2Q_2 = 0 \qquad (3.23)$$

Isolando λ nas equações (3.21) e (3.22) e igualando as duas expressões resultantes, obtém-se a expressão da TMS_{Q2Q1} no equilíbrio,

---

[12] As derivações matemáticas serão apresentadas de forma esquemática apenas. Na seção Exercícios Resolvidos serão apresentados exemplos destas derivações.

[13] Repare que a expressão (3.20) não altera a função de utilidade porque o termo entre parênteses é igual a zero, já que se assume que o consumidor gasta toda a sua renda no consumo dos bens Q_1 e Q_2.

ou seja:

$$\frac{UMa_1}{UMa_2} = \frac{P_1}{P_2} \tag{3.24}$$

Na expressão (3.24), isolando Q_2, obtém-se a equação da curva de renda consumo:

$$Q_2 = q(Q_1, P_1, P_2) \tag{3.25}$$

Substituindo Q_2 na equação (3.23) e resolvendo para Q_1, encontra-se a função de demanda Marshaliana inversa para Q_1:

$$Q_1 = q(P_1, P_2, R) \tag{3.26}$$

Substituindo Q_1 na expressão (3.25) ou na expressão (3.23), obtém-se a função de demanda Mashaliana inversa para Q_2:

$$Q_2 = q(P_1, P_2, R) \tag{3.27}$$

Quando as funções de demanda encontradas estão em função apenas do próprio preço e da renda, as demandas são ditas *separáveis*, ou seja, variações no preço do bem Q_2 não afetam o consumo do bem Q_1.

Tomando-se as expressões (3.26) e (3.27), deixando-as em função de R e substituindo na função utilidade, é possível encontrar a utilidade marginal da renda.

3.9. Decomposição dos efeitos renda e substituição

Uma vez conhecidas as funções de demanda, podem ser obtidos os valores dos efeitos renda e substituição. No método de Slutsky, a compensação de renda é dada até que o consumidor possa adquirir a mesma cesta que consumia inicialmente. Ou seja, a nova restrição orçamentária cruza a restrição orçamentária inicial no ponto que equivale à cesta inicial. Dada a restrição orçamentária inicial:

$$R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$$

a equação da nova restrição orçamentária (R^1) pode ser escrita da forma:

$$R^1 = P_1^1 Q_1 + P_2 Q_2 \tag{3.28}$$

já que a restrição orçamentária após a compensação de renda passa pelo ponto inicial, que corresponde às cestas Q_1 e Q_2

Lembrando que P_2 não variou, subtraindo-se a restrição orçamentária inicial da equação (3.28), obtém-se a compensação de renda dada ao consumidor:

$$\Delta R = Q_1^0 (P_1^1 - P_1^0) \tag{3.29}$$

Conhecendo a compensação de renda dada ao consumidor, podem-se obter as quantidades demandadas do bem Q_1 inicial, após a variação no preço e após a compensação de renda pela expressão (3.26).

$$Q_1^0 = q(P_1^0, P_2, R^0) \tag{3.30}$$

$$Q_1^1 = q(P_1^1, P_2, R) \tag{3.31}$$

$$Q_1^{CS} = q(P_1^1, P_2, R^1) \tag{3.32}$$

De posse dessas quantidades demandadas, calculam-se então os efeitos renda, substituição e total, pelas expressões (3.15), (3.16) e (3.17).

Para calcular esses efeitos pelo método de Hicks, é necessário calcular as demandas iniciais de ambos os bens: $Q_1^0 = q(P_1^0, P_2, R^0)$ e $Q_2^0 = q(P_1^0, P_2, R^0)$. A partir daí calcula-se o nível de utilidade do consumidor, substituindo as quantidades demandadas na função utilidade. Tomando-se a expressão (3.25) e substituindo P_1^0 por P_1^1:

$$Q_2 = q(Q_1, P_1^1, P_2) \tag{3.33}$$

substituindo Q_2 na função utilidade, obtém-se a demanda compensada de Q_1.

Obtendo-se a demanda de Q_1 após o aumento do preço, têm-se então as demandas Q_1^0, Q_1^1 e Q_1^{CH}, podendo-se calcular os efeitos, substituição, renda e total, pelas expressões (3.15), (3.16) e (3.17).

3.10. Equação de Slutsky

A mudança no preço de um bem afeta a decisão de compra do consumidor por duas razões: a) variação na quantidade consumida dos bens substitutos que se tornaram relativamente mais baratos – chamado de efeito substituição; b) variação na quantidade consumida devido à variação do poder de compra do consumidor – conhecido como efeito renda. O efeito total sobre a quantidade consumida é resultante da soma dos efeitos renda e substituição. Essa relação é conhecida por Equação de Slutsky.

A importância da equação de Slutsky é permitir que se derive a curva de demanda compensada ou demanda Hicksiana a partir da demanda Marshalliana ou demanda de mercado, que é diretamente observável.

3.11. Equação de Slutsky quando se tem variação discreta no preço de um bem

Sejam:

- Q^0 a demanda de Q ao preço P^0 e renda R: $Q^0\ (P^0\ , R)$;
- Q^1 a demanda de Q ao preço $P^1 = P^0 + \Delta P^0$ e renda R: $Q^1(P^0 + \Delta P^0, R^0)$; e
- Q^C a demanda compensada, ao preço $P^0 + \Delta P$ e renda $R^0 + \Delta R$: $Q^C(P^0 + \Delta P, R^0 + \Delta R)$

Assim, a variação total da quantidade demandada de Q quando o seu preço varia e os demais preços permanecem constantes, pode ser representada por:

$$\Delta Q = Q^1 - Q^0$$

$$Q^1 - Q^0 = (Q^C - Q^0) + (Q^1 - Q^C)$$

$$Q^1 - Q^0 = Q^C - Q^0 - Q^C + Q^1$$

$$Q^1 - Q^0 = (Q^C - Q^0) - (Q^C - Q^1) \tag{3.34}$$

Dividindo a expressão (3.34) por ΔP, tem-se:

$$\frac{Q^1 - Q^0}{\Delta P^0} = \frac{(Q^C - Q^0)}{\Delta P^0} - \frac{(Q^C - Q^1)}{\Delta P^0} \tag{3.35}$$

A compensação de Slutsky é dada até que o consumidor possa consumir a mesma cesta de bens. Desse modo, a nova restrição orçamentária $(R^0 + \Delta R)$ permitirá que se compre a mesma cesta Q^0, mas, como visto anteriormente, o consumidor irá escolher uma cesta que lhe proporcionará maior utilidade. Assim, a equação da restrição orçamentária após a compensação de renda poderá também ser escrita da seguinte forma:

$$R^1 = P^1 Q^0 \tag{3.36}$$

Subtraindo a equação inicial $R^0 = P^0 Q^0$ de (3.36), tem-se que[14]:

$$R^1 - R^0 = Q^0 (P^1 - P^0) \text{ ou}$$

$$\Delta R = Q^0 (\Delta P^0)$$

Isolando ΔP^0 e substituindo na expressão (3.35), obtém-se:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P^0} = \frac{\Delta Q^C}{\Delta P^0} - Q^0 \frac{\Delta Q}{\Delta R} \tag{3.37}$$

[14] Observe que, ainda que se considere mais de um bem, por exemplo, para dois bens Q_1 e Q_2, cujos preços são denotados por P_1 e P_2, o resultado encontrado será o mesmo, pois estão sendo consideradas apenas variações no preço do bem 1.

Esta é a equação de Slutsky, em que:

- $\frac{\Delta Q}{\Delta P^0}$ é a variação da quantidade demandada por Q, quando o preço de Q muda, comumente denominado de Efeito Total.

$\frac{\Delta Q^C}{\Delta P^0}$ é a variação na quantidade demandada por Q, quando o preço muda e a renda é compensada para manter o mesmo nível de consumo. Este termo representa o Efeito Substituição.

- $Q^0 \frac{\Delta Q}{\Delta R}$ representa o Efeito Renda, entendido como a taxa de variação na quantidade demandada devido à variação na renda, mantidos os preços constantes. E, quando multiplicado pela quantidade inicial Q^0, encontra-se a variação da quantidade devido à compensação da renda.

O sinal de $\frac{\Delta Q}{\Delta P^0}$, inclinação da demanda ordinária, depende do sinal de $\frac{\Delta Q^C}{\Delta P^0}$ e $\frac{\Delta Q}{\Delta R}$. O efeito substituição é sempre negativo, isto é, $\frac{\Delta Q^C}{\Delta P^0} < 0$, de modo que o sinal da variação da quantidade demandada de Q irá depender do sinal de $\frac{\Delta Q}{\Delta R}$. Se $\frac{\Delta Q}{\Delta R} > 0$, Q será um bem normal, e, como o sinal da expressão $Q^0 \frac{\Delta Q}{\Delta R}$ é negativo, o efeito renda reforçará o efeito substituição. Se $\frac{\Delta Q}{\Delta R} < 0$, Q é um bem inferior e o sinal da

expressão $Q^0 \frac{\Delta Q}{\Delta R}$ se tornará positivo. Neste caso, o efeito total dependerá da magnitude dos efeitos renda e substituição. Sendo o efeito substituição maior que o efeito total, o que normalmente acontece, o efeito total será negativo. Caso contrário, tem-se a situação característica dos bens de Giffen, um caso particular na Teoria Econômica, em que a demanda é positivamente inclinada.

3.12. Exercícios resolvidos

1. Um consumidor tem a função de utilidade representada por $U = Q_1Q_2$, em que U representa a utilidade total, Q_1 a quantidade consumida do bem 1 e Q_2 a quantidade consumida do bem 2. O consumidor dispõe de uma renda de R\$ 50 e os preços dos bens são: P_1 = R\$ 2,00 e P_2 = R\$ 2,50. Considere que o preço do bem 1 aumente para R\$ 2,50. Calcule:

a) As funções de demandas Marshalianas inversas.
b) As quantidades demandadas.
c) A compensação de renda pelo método de Hicks e pelo método de Slutsky
d) O efeito substituição e o efeito renda por ambos os métodos.
e) Represente graficamente as demandas encontradas.

O primeiro passo é encontrar as funções de demanda. Considerando uma função tipo Cobb Douglas qualquer, o problema consiste em:

$$Max: U(Q_1, Q_2) = AQ_1^{\alpha} Q_2^{\beta}$$
$$S.a.: R = P_1Q_1 + P_2Q_2$$

$$L = AQ_1^{\alpha} Q_2^{\beta} + \lambda(R - P_1Q_1 - P_2Q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = UMa_1 = \alpha A Q_1^{1-\alpha} Q_2^{\beta} - \lambda P_1 = 0 \therefore \alpha A Q_1^{1-\alpha} Q_2^{\beta} = \lambda P_1 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = UMa_2 = \beta A Q_1 \alpha Q_2^{1-\beta} - \lambda P_2 = 0 \therefore \beta A Q_1 \alpha Q_2^{1-\beta} = \lambda P_2 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = 0 \quad (3.40)$$

Dividindo a expressão (3.38) pela (3.39), obtém-se:

$$\frac{UMa_1}{UMa_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{P_1}{P_2} \quad (3.41)$$

Isolando Q2, obtém-se a expressão da Curva de Renda Consumo:

$$Q_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_1 Q_1}{P_2} \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.40), encontra-se a função de demanda Marshaliana inversa para Q_1:

$$Q_1 = \frac{\alpha R}{(\alpha + \beta) P_1} \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.40) ou (3.42) obtém-se a função de demanda Marshaliana inversa para Q_2:

$$Q_2 = \frac{\beta R}{(\alpha + \beta) P_2} \quad (3.44)$$

a) Para a função de utilidade dada, as funções de demanda seriam:

$$Q_1 = \frac{R}{2P_1}$$

$$Q_2 = \frac{R}{2P_2}$$

b) Substituindo os valores dados nestas expressões, encontra-se:

$Q_1 = 12{,}5$

$Q_2 = 10{,}0$

c) Para calcular a compensação de renda, o efeito substituição e o efeito renda, é necessário calcular as demandas após a elevação do preço e as demandas compensadas.

Para se conhecer a demanda após a elevação do preço, basta substituir o preço P_1^1 na função de demanda:

$$Q_1 = \frac{R}{2P_1^1} = \frac{50}{2 \times 2{,}5} = 10$$

Para encontrar a demanda compensada pelo método de Slutsky, basta tomar a expressão (3.29): $\Delta R = Q_1^0(P_1^1 - P_1^0)$. Substituindo os valores, tem-se que a compensação de renda (ΔR) pelo método de Slutsky é igual a:

$\Delta R = 6{,}25$

Assim, a renda compensada R^1 será igual a 56,25. Substituindo na função de demanda, obtém-se a quantidade demandada após a compensação de Slutsky.

$$Q_1^{CS} = \frac{R^1}{2P_1^1} = \frac{56{,}25}{2 \times 2{,}5} = 11{,}25$$

A quantidade demandada do bem 2 será:

$$Q_2^{CS} = \frac{R^1}{2P_2} = \frac{56{,}25}{2 \times 2{,}5} = 11{,}25$$

Para se obter a demanda compensada pelo método de Hicks, encontra-se o valor da utilidade substituindo as quantidades demandadas inicialmente na função dada, ou seja:

$$U = Q_1 Q_2 = 11{,}5 \times 10 = 125$$

Tomando a expressão (3.42) com o preço $P_1^{\,1}$, encontra-se uma relação entre Q_2 e Q_1:

$$Q_2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_1^{\,1} Q_1}{P_2} = \frac{P_1^{\,1} Q_1}{P_2} = \frac{2{,}5 Q_1}{2{,}5} \therefore Q_2 = Q_1$$

Como a compensação de renda pelo método de Hicks é dada até que se atinja o mesmo nível de utilidade, tem-se:

$$U = Q_1 Q_1 = Q_1^{\,2} \therefore 125 = Q_1^{\,2}$$

$$Q_1^{\,CH} = 11{,}18$$
$$Q_2^{\,CH} = 11{,}18$$

Para obter a renda compensada pelo método de Hicks, basta substituir os valores das demandas compensadas na restrição orçamentária:

$$R^1 = P_1^{\,1} Q_1^{\,C} + P_2 Q_2^{\,C} = 2{,}5 \times 11{,}18 + 2{,}5 \times 11{,}18 = 55{,}9$$

A compensação de renda pelo método de Hicks seria então de R$ 5,90.

d) Obtidas as demandas compensadas, para calcular os efeitos renda e substituição, basta substituir as demandas encontradas nas expressões (3.15), (3.16) e (3.17).

Pelo método de Slutsky:

$$ES = Q_1^{CS} - Q_1^{0} = 11{,}25 - 12{,}5 = -1{,}25$$

$$ER = Q_1^{1} - Q_1^{CS} = 10 - 11{,}25 = -1{,}25$$

$$ET = ES + ER = -1{,}25 - 1{,}25 = -2{,}5 \text{ ou}$$

$$ET = Q_1^{1} - Q_1^{0} = 10 - 12{,}5 = -2{,}5$$

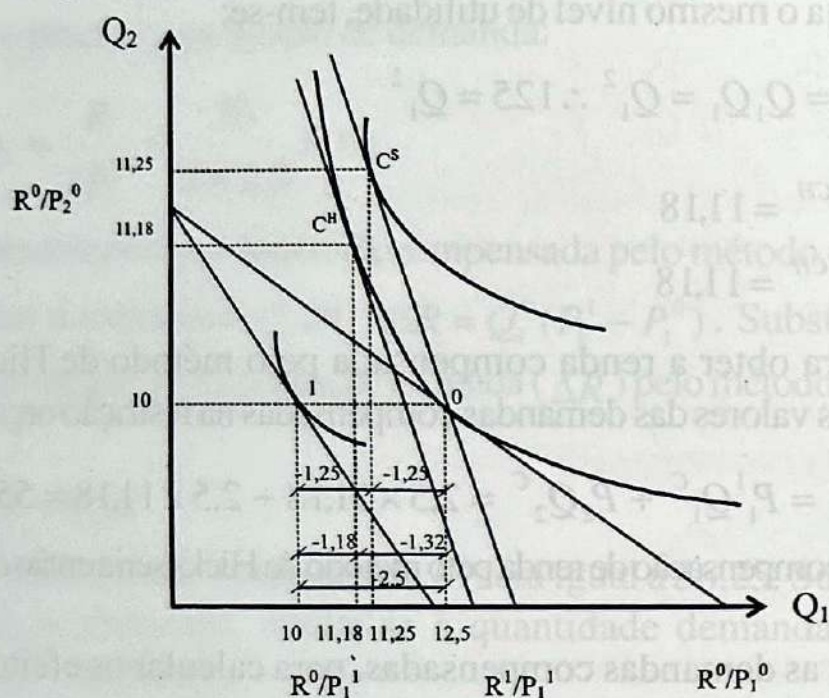
Pelo método de Hicks:

$$ES = Q_1^{CH} - Q_1^0 = 11{,}18 - 12{,}5 = -1{,}32$$

$$ER = Q_1^1 - Q_1^{CH} = 10 - 11{,}18 = -1{,}18$$

$$ET = ES + ER = -1{,}32 - 1{,}18 = -2{,}5 \quad \text{ou}$$

$$ET = Q_1^1 - Q_1^0 = 10 - 12{,}5 = -2{,}5$$

e) Representação gráfica:

2. Dada a função de utilidade $U = aQ_1 + bQ_2$, encontre as funções de demanda. Da mesma forma, o problema consiste em:

$$Max: U(Q_1, Q_2) = aQ_1 + bQ_2$$

$$S.a.: R = P_1Q_1 + P_2Q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = UMa_1 = a - \lambda P_1 = 0 \therefore a = \lambda P_1 . \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = UMa_2 = b - \lambda P_2 = 0 \therefore b = \lambda P_2 \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1Q_1 - P_2Q_2 = 0 \qquad (3.47)$$

Dividindo (3.46) por (3.45), obtém-se:

$$\frac{UMa_1}{UMa_2} = \frac{a}{b} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (3.48)$$

Para esta função, que representa bens substitutos perfeitos, verifica-se que a taxa marginal de substituição é uma constante igual a b. Ao ocorrer essa condição de equilíbrio, a inclinação da restrição orçamentária é igual à inclinação da curva de indiferença. Assim, o consumidor poderá escolher qualquer cesta que esteja sobre sua restrição orçamentária. Assumindo que o consumidor escolha consumir Q1 do bem 1, a demanda do bem 2 será:

$$Q_2 = \frac{R - P_1Q_1}{P_2}$$

No entanto, o equilíbrio poderá ocorrer fora dessas condições. Se:

$$\frac{a}{b} < \frac{P_1}{P_2}$$

a inclinação da restrição orçamentária é maior que a inclinação da curva de indiferença. Tomando a expressão (3.48) como referência, isso implica que o preço do bem 1 se tornou relativamente mais caro, e o consumidor se especializa no consumo do bem 2. Se:

$$\frac{a}{b} > \frac{P_1}{P_2}$$

implica que o bem 2 se tornou relativamente mais caro, e o consumidor se especializa no consumo do bem 1.

Para este tipo de função, mudanças no preço implicam mudanças

no equilíbrio, mas não necessariamente em mudanças na especialização do consumidor. Se $a/b < P_1/P_2$, a TMS_{Q2Q1} é diferente da razão dos preços; alterações nos preços que não alterem a desigualdade não farão com que o consumidor troque o consumo de um bem pelo outro.

3. Dada a função $U = Min\{aQ_1, bQ_2\}$, encontre as funções de demanda dos bens 1 e 2. Nesse caso, como a função de utilidade não é uma função diferenciável, não se pode utilizar o método de Lagrange. O consumo se dará na proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$Q_1 = \frac{aQ_2}{b} \text{ e } Q_2 = \frac{bQ_1}{a}$$

Substituindo Q_1 na restrição orçamentária, encontra-se a demanda do bem 2:

$$Q_2 = \frac{R}{\frac{a}{b}P_1 + P_2}$$

Substituindo Q_2 na restrição orçamentária, encontra-se a demanda do bem 1:

$$Q_1 = \frac{R}{P_1 + \frac{b}{a}P_2}$$

3.13. Exercícios propostos

1. Comente as seguintes alternativas:

a) Para bens com curvas de Engel negativamente inclinadas, a compensação de Slutsky será sempre maior que a compensação de Hicks. Por isso, a demanda Slutskiana é mais elástica que a demanda

Hicksiana, já que a maior compensação de renda origina curvas de demanda mais elásticas.

b) Pela equação de Slutsky, as curvas de demanda Marshaliana inversa podem ser positivamente inclinadas, enquanto as demandas compensadas serão sempre negativamente inclinadas.

c) Funções de utilidade que apresentam a mesma taxa marginal de substituição serão, com certeza, transformações monotônicas positivas uma da outra.

d) Se a inclinação da curva de Engel for negativa, o efeito renda reforça o efeito substituição, pois este é sempre negativo.

e) A convexidade das curvas de indiferença implica utilidades marginais decrescentes, enquanto o princípio da não-saciedade implica utilidades marginais não-negativas.

f) A curva de demanda Marshaliana inversa representa a relação preço x quantidade consumida de um determinado bem. Assim, expressa apenas o efeito de alterações preço sobre a quantidade consumida deste bem, não tendo nenhuma relação com a renda do consumidor.

g) Enquanto a inclinação da curva de indiferença mostra a taxa em que o mercado troca um bem pelo outro, a inclinação da linha de orçamento mostra a taxa em que o consumidor deseja trocar esses bens.

h) É possível a ocorrência de equilíbrio em uma situação em que o indivíduo não consuma determinado tipo de bem e que a relação entre a utilidade marginal e o preço desse bem seja inferior à mesma relação existente para o outro bem que esteja disponível para esse consumidor.

i) Para garantir a convexidade das curvas de indiferença em relação à origem, é necessário que a derivada-segunda de Q_2 em relação à Q_1 seja positiva – $d^2Q_2/(dQ_1)^2 > 0$.

j) Diz-se que as curvas de indiferença limitam conjuntos convexos quando todos os pontos de uma combinação linear de A e B são preferidos a A e B.

2. *Resolva o seguinte problema: considere que um consumidor possui função de utilidade igual a* $U = \ln Q_1 + \ln Q_2$. *Considere, ainda, que ele*

consome ambos os bens ao preço inicial de P_1=$5,00 e P_2=$5,00, disponibilizando, para isso, uma renda de $800,00. Com base nessas informações, responda às questões a seguir.

a) Se o preço do bem Q_1 aumenta em 100%, quais os efeitos renda, substituição e total obtidos a partir do modelo de Slutsky de compensação de renda? Utilize a análise gráfica.

b) Resolva esta mesma questão utilizando a proposta de Hicks. Utilize a análise gráfica.

c) Se ambos os bens, Q_1 e Q_2, sofressem, simultaneamente, o mesmo aumento de 100%, quais seriam os efeitos renda, substituição e total encontrados?

3.14. Referências

BINGER, B.R.; HOFFMAN, E. **Microeconomics with calculus**. 2.ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 633 p.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1999. 740 p.

CAPÍTULO 4

Teoria da dualidade

Maurinho Luiz dos Santos[1]
Adelson Martins Figueiredo[2]
Eduardo Rodrigues de Castro[3]
Gil Bracarense Leite[4]

4.1. Introdução

A teoria da dualidade é uma ferramenta amplamente aplicada na resolução de problemas de programação linear. Esta teoria permitiu a junção dos problemas de minimização e maximização, vistos comumente como problemas separados. Segundo Chiang (1982), os teoremas da dualidade possibilitam a formulação de um programa de *minimização (maximização)* correspondente a qualquer programa de *maximização (minimização)*, gerando resultados idênticos para a função-objetivo. O problema de programação linear original é denominado de *primal* e o seu correspondente é conhecido como *dual*. Dessa maneira, pode-se dizer que a teoria da dualidade fornece aos pesquisadores a possibilidade de escolher o mais simples e adequado dos programas *primal* e *dual*, uma vez que as soluções ótimas das funções-objetivo do *primal* e do *dual* são idênticas.

A importância da aplicação dos fundamentos teóricos da dualidade torna-se ainda mais evidente no momento da realização de trabalhos empíricos. Em trabalhos relacionados à teoria da produção é comum não encontrar dados para estimação da função direta de lucro de empresas,

[1] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[3] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: eduardo@ufscar.br
[4] Mestre em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV, e-mail: gilbracarense@yahoo.com.br

simplesmente porque esses dados não são disponibilizados e, ou, não são coletados. Contudo, em muitos casos é possível encontrar dados relativos às variáveis preços e quantidades demandadas de insumos, propiciando a estimação de funções de demanda dos fatores, na forma de parcelas do lucro. Em trabalhos relacionados à teoria do consumidor podem ocorrer situações ainda mais extremas, em que as variáveis não são mensuráveis, como o nível de utilidade do consumidor. Desse modo, há limitações ao cálculo do nível máximo de utilidade do consumidor *(primal)*. Entretanto, neste último caso, existem variáveis quantificáveis como quantidade consumida, nível de preços, renda e etc., que permitem montar um problema de minimização do dispêndio do consumidor, conhecido como *dual*.

4.2. Dualidade aplicada à teoria do consumidor

Embora a teoria da dualidade aplicada à teoria do consumidor seja bastante semelhante à dualidade aplicada à programação matemática, é necessário entender melhor a sua aplicação e relevância para a teoria do consumidor, especialmente a teoria da demanda. A teoria da dualidade flexibiliza o uso de variáveis relacionadas às preferências do consumidor, tornando possível um elo mais forte entre a teoria e as aplicações práticas. As funções de utilidade ou preferências do consumidor são modeladas como função das quantidades dos diversos bens adquiridos pelo consumidor, ou seja, uma formulação *primal*, sendo certamente óbvio e aceitável, porém não estimável empiricamente, pois a utilidade é uma variável não observada.

No entanto, se o consumidor se deparar com uma restrição orçamentária linear, as escolhas deste são definidas pela sua renda (R) e pelos preços (P) dos bens, que determinam a máxima utilidade que pode ser atingida. Em termos econômicos, isso significa que a função direta de utilidade do consumidor, denotada por $U = U(Q)$, pode ser representada fielmente por formulações *duais*, como função de (R) e (P), obtendo-se $V = V(P,R)$, denominada de função indireta de utilidade (FIU). Esta

função, quando invertida, isto é, considerando (R) em termos de (U) e (P), $D = R(U, P)$, é denominada de função indireta de dispêndio (FID). Garantidas as condições de linearidade das restrições e de tangência, ou seja, que a taxa marginal de substituição entre os bens seja igual à razão de preços, as informações sobre as preferências contidas na forma direta são transferidas para as formas indiretas ou duais.

De acordo com Deaton e Muellbauer (1980), as soluções para as formulações *primal* e *dual*, para um consumidor de dois bens Q_1 e Q_2, podem ser ilustradas conforme Figura 4.1. Nos eixos desta figura são plotados ambos os valores dos preços e quantidades para dois bens. Dado um vetor arbitrário de quantidades *OQ*, pode-se desenhar a curva de indiferença, $CI = f(\overline{U}, Q)$ [4]. Pela condição de tangência à razão de preços (P_1/P_2), que levaria à escolha ótima da cesta de bens, *Q* pode ser obtida pela taxa marginal de substituição (TMS) do bem 2 pelo bem 1, $\left(\dfrac{\partial U/\partial Q_1}{\partial U/\partial Q_2}\right)$, ou seja, da inclinação da *CI* para *Q*, podendo-se então traçar uma linha *AB* tangente à *CI* com inclinação igual a (P_1/P_2). Assim, define-se a solução ótima do problema de maximização da utilidade do consumidor (*primal*).

Para definir a solução do problema *dual* a partir da função indireta de utilidade, basta desenhar uma linha de preços *OP* perpendicular a *AB*, ligando as coordenadas de preços, as quais mantêm inalterada a razão de preços estabelecida pela inclinação da reta *AB*. A coordenada de preços do ponto *P* ao longo de *OP* deve ser escolhida de maneira que aos preços *P* a escolha ótima seja *OQ* e que a renda seja toda gasta, $R = OP \times OQ$. Assim, *P* deve estar sobre uma única curva de indiferença no eixo dos preços, a qual corresponde ao mínimo dispêndio e tem o mesmo nível de

---

[4] Para traçar esta curva de indiferença, considerou-se a utilidade fixa em um nível ótimo qualquer correspondente ao vetor de quantidades *Q*, ou à cesta de bens *Q*.

utilidade da formulação *primal*, $U = U(Q)$[5]. É necessário destacar ainda que curvas de indiferenças mais *altas* nas coordenadas das quantidades equivalem a curvas de indiferenças mais *baixas* nas coordenadas dos preços, desde que a função $U = U(Q)$ seja crescente em (Q), enquanto $V = V(P, R)$ é decrescente em (P).

No caminho inverso, da formulação *dual* (FIU) para a *primal* *(U)*, ou seja, de *P* para *Q*, esse procedimento é precisamente análogo. Partindo do ponto *P*, pode-se traçar a linha tangente *CE*, que tem inclinação $\left(\frac{\partial V/\partial P_1}{\partial V/\partial P_2}\right)$, a qual, pela identidade de Roy[6], é igual a (Q_1/Q_2). De forma análoga, o vetor de quantidades *OQ* é traçado perpendicular a *CE*, com comprimento tal que $OQ \times OP = R$. Isso é tido como a volta ao ponto original, *Q*. Por essa técnica, se a função indireta de utilidade é conhecida, ou a FID, é possível recuperar a função de utilidade original $U = U(Q)$. As informações originais contidas em $U = U(Q)$ são simplesmente recuperadas pelas funções duais FIU e FID. Esse retorno às preferências originais a partir de funções duais ou indiretas é o teorema fundamental da Teoria da Dualidade, denominado de teorema da dualidade de Shephard-Uzaua (DEATON; MUELLBAUER, 1980).

---

[5] Observe que a função $CI = f(U)$ foi traçada no eixo Q_2 *versus* Q_1, enquanto que a função $CI = f(V)$ foi traçada no eixo P_2 *versus* P_1.

[6] Pela identidade de Roy podem-se obter as funções de demanda marshalianas através do negativo da razão das derivadas parciais da FIU em relação às variáveis P e R. Dessa maneira, tem-se que $-\frac{\partial V}{\partial P_1}\Big/\frac{\partial V}{\partial R} = Q_1$ e $-\frac{\partial V}{\partial P_2}\Big/\frac{\partial V}{\partial R} = Q_2$. Para mais detalhes, ver Deaton e Muellbauer (1980).

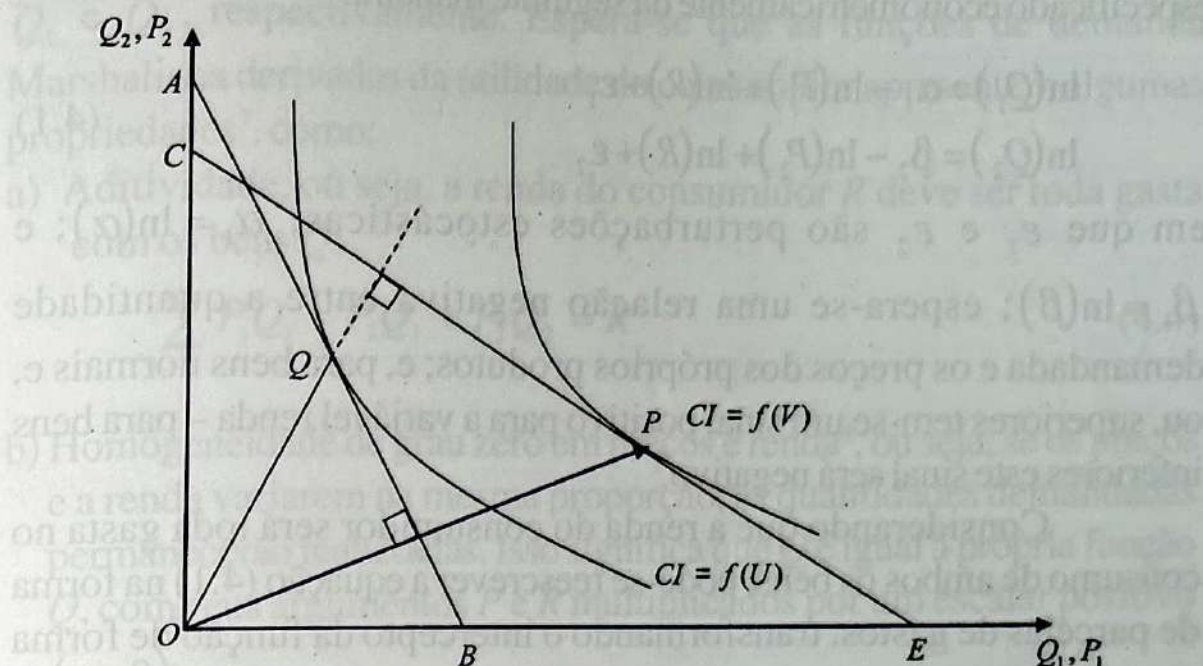



Figura 4.1 - Curvas de indiferenças *primal* e *dual*

Fonte: Deaton e Muellbauer (1980).

4.3. Dualidade e funções de demanda

Na literatura econômica é comum a estimativa econométrica de funções ou de sistemas de demandas, com suposições comportamentais sobre os parâmetros estimados, sendo também comum destinar-se pouca atenção à origem dessas pressuposições. Isso evidencia a falta de uma apresentação da origem teórica dessas pressuposições, de maneira mais acessível e mais relacionada com a prática das estimativas econométricas. Assim, buscar-se-á mostrar de forma clara e objetiva que as funções de demanda Marshalianas são derivadas da função de utilidade do consumidor, bem como apresentar a origem de algumas das presuposições feitas ou impostas sobre os parâmetros das funções de demanda, estimadas econometricamente.

Um sistema de demanda simplificado para dois bens, Q_1 e Q_2, em que a quantidade demandada de cada bem depende apenas do preço (P) do bem em questão e da renda (R) do consumidor, pode ser

especificado econometricamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ln(Q_1) &= \alpha_1 - \ln(P_1) + \ln(R) + \varepsilon_1 \\ \ln(Q_2) &= \beta_2 - \ln(P_2) + \ln(R) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que ε_1 e ε_2 são perturbações estocásticas; $\alpha_1 = \ln(\alpha)$; e $\beta_1 = \ln(\beta)$; espera-se uma relação negativa entre a quantidade demandada e os preços dos próprios produtos; e, para bens normais e, ou, superiores tem-se um sinal positivo para a variável renda – para bens inferiores este sinal será negativo.

Considerando que a renda do consumidor será toda gasta no consumo de ambos os bens, pode-se reescrever a equação (4.1) na forma de parcelas de gastos, transformando o intercepto da função de forma que:

$$\begin{aligned} \ln(Q_1) &= \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) - \ln(P_1) + \ln(R) + \varepsilon_1 \\ \ln(Q_2) &= \ln\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) - \ln(P_2) + \ln(R) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Esse sistema de demanda pode ser estimado facilmente, apenas considerando o intercepto como uma constante qualquer, como na equação (4.1). Entretanto, a ênfase deste item está nas relações teóricas das funções de demanda; por isso, para simplificar as demonstrações, obtém-se o antilogaritmo da equação (4.2), além de desconsiderar possíveis choques de demanda não esperados, ou seja, ε_1 e $\varepsilon_2 = 0$. Disso tem-se:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\alpha R}{(\alpha+\beta)P_1} \\ Q_2 &= \frac{\beta R}{(\alpha+\beta)P_2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Observe que a relação inversa entre as quantidades demandadas e os preços dos produtos torna-se mais perceptível. Pode-se notar que P_1 e P_2 estão no denominador das equações de demanda Marshaliana

Q_1 e Q_2, respectivamente. Espera-se que as funções de demanda Marshaliana derivadas da utilidade do consumidor apresentem algumas propriedades[7], como:

a) Aditividade, ou seja, a renda do consumidor R deve ser toda gasta com os bens Q:

$$\sum P_i Q_i = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = R \qquad (4.4)$$

b) Homogeneidade de grau zero em preços e renda[8], ou seja, se os preços e a renda variarem na mesma proporção, as quantidades demandadas permanecerão inalteradas. Isso significa que Q é igual à própria função Q, com seus argumentos P e R multiplicados por um escalar positivo $(t > 0)$:

$$Q(P, R) = Q(tP, tR) \qquad (4.5)$$

Além dessas propriedades, as funções de demanda originadas de funções de utilidade tipo Cobb-Douglas, como neste caso, são ditas separáveis, isto é, a função de demanda de um bem não depende do preço de outros bens[9].

A forma funcional das funções demanda, representadas pela equação (4.2), podem ser geradas pela seguinte função indireta de utilidade, que denota a preferência do consumidor com relação aos dois bens, Q_1 e Q_2, dado o nível de renda e os preços dos produtos:

$$V(P, R) = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)^\alpha P_1^\alpha (\alpha+\beta)^\beta P_2^\beta} \qquad (4.6)$$

Para que a função utilidade possa ser derivada da FIU, esta deverá atender a algumas propriedades, dentre as quais destacam-se cinco:

---

[7] Demonstrações destas propriedades, bem como das propriedades das demais funções mostradas neste item, são apresentadas no Apêndice A.

[8] É comum referir-se a essa propriedade como *ausência de ilusão monetária*.

[9] Esta propriedade só é válida quando não se trabalha com funções de demandas generalizadas. Ver derivações destas funções no Apêndice B.

a) Continuidade e diferenciabilidade em P, de forma que suas primeiras e segundas derivadas existam.

b) A FIU é crescente em R, ou seja, se a renda for multiplicada por uma constante $t > 0$, então a função FIU será multiplicada por esta constante:

$$V(P, tR) = tV(P, R) \quad (4.7)$$

c) A FIU é não-crescente em P, isto é, se os preços forem multiplicados por uma constante $t > 0$, logo, a FIU será multiplicada pela fração $(1/t)$:

$$V(tP, R) = \frac{1}{t} V(P, R) \quad (4.8)$$

d) Homogênea de grau zero em preços e renda:

$$V(P, R) = V(tP, tR) \quad (4.9)$$

e) A FIU é convexa nos preços; isolando P_1 e P_2 na equação (4.3) e substituindo na FIU descrita pela equação (4.6), pode-se obter a função de utilidade do consumidor, dada por:

$$U = U(Q_1, Q_2) = Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} \quad (4.10)$$

Esta é uma função de utilidade tipo Cobb-Douglas, com a qual os leitores já devem estar familiarizados. A escolha desta função deve-se à sua praticidade, sendo bastante utilizada em livros-texto, como Binger e Hoffman (1998), Pindyck e Rubinfeld (1999) e Varian (1999).

Da FIU podem-se obter as próprias funções de demanda apresentadas na equação (4.3), bastando para isso aplicar a identidade de Roy, fornecida pela seguinte formulação:

$$Q_1 = -\frac{\partial V / \partial P_1}{\partial V / \partial R}$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V / \partial P_2}{\partial V / \partial R} \qquad (4.11)$$

Resolvendo a FIU para R, pode-se obter ainda a função indireta de dispêndio (FID), mais conhecida na literatura internacional como *cost function*. A FID derivada a partir da equação (4.6) é denotada por:

$$D(P,U) = \frac{(\alpha + \beta) P_1^{\alpha/\alpha+\beta} P_2^{\beta/\alpha+\beta} U^{1/\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha/\alpha+\beta} \beta^{\alpha/\alpha+\beta}} \qquad (4.12)$$

Esta função é *dual* da função indireta de utilidade, devendo, assim, atender a algumas propriedades como:

a) Ser contínua e diferenciável em P, de forma que suas primeiras e segundas derivadas existam.

b) Homogeneidade de grau 1 em todos os preços, isto é, não decrescente em P:

$$D(tP,U) = tD(P,U) \qquad (4.13)$$

c) Crescente em U, o que significa que, como a função de utilidade depende apenas das quantidades demandadas dos bens, de modo que, se U estiver crescendo, é porque o dispêndio deve estar também aumentando:

$$D(P,tU) = tD(P,U) \qquad (4.14)$$

d) A FID é côncava nos preços.

e) Existe uma derivada parcial da FID com relação aos preços, que são as demandas Hicksianas ou compensadas[10].

$$\frac{\partial D(P,U)}{\partial P_i} = H_i(P,U) = Q_i \tag{4.15}$$

As funções de demanda Hicksianas ou compensadas, derivadas da FID, devem ter as seguintes propriedades:

a) Serem aditivas:

$$\sum P_i H_i(P,U) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = R \tag{4.16}$$

b) Serem homogêneas de grau zero em preços, ou seja, se todos os preços P forem multiplicados por um escalar positivo $(t > 0)$, a função de demanda Hicksiana não será alterada; dessa maneira, tem-se:

$$H_i(tP,U) = H_i(P,U) \tag{4.17}$$

c) São simétricas. As derivadas cruzadas da função de demanda Hicksiana em relação aos preços são simétricas, para todo $i \neq j$:

$$\frac{\partial H_i(P,U)}{\partial P_j} = \frac{\partial H_j(P,U)}{\partial P_i} \tag{4.18}$$

d) São negativas semidefinidas (negatividade). A matriz formada pelos n-elementos $\partial H_i(P,U)/\partial P_j$ é semidefinida negativa. Esta propriedade pode ser demonstrada através da equação de Slutsky, para variações contínuas.

---

[10] Pelo Teorema de Shephard, considerando um vetor de preços P^0, um nível de utilidade U e o correspondente vetor de quantidades ótimas Q^0, logo para *n-vetores* de preços P, definidos por uma equação $Z(P) = \sum PQ - D(U,P)$, a quantidade Q^0 não é necessariamente ótima para P. Assim, o dispêndio com Q^0 ao nível de preços P é, freqüentemente, maior que o dispêndio mínimo (ótimo), $D(U,P)$, pois $Z(P)$ é sempre maior ou igual a zero. Entretanto, sabe-se que $Z(P) = 0$, ou se atinge um mínimo, quando o vetor P é igual a P^0. Portanto se $Z(P)$ é contínua, então sua derivada em relação a P_i é $\frac{\partial Z(P^0)}{\partial P_i} = Q_i^0 - \frac{\partial D(U,P^0)}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial D(U,P^0)}{\partial P_i} = Q_i^0 = H_i(U,P_i)$. Ver Deaton e Muellbauer (1980) e Afriat (1980).

4.4. Equação de Slutsky

Para melhor entendimento das propriedades das demandas Hicksianas ou compensadas, a equação de Slutsky, já apresentada no capítulo 3 deste livro, é usada para mostrar que as demandas Hicksianas são simétricas e negativas semidefinidas.

4.4.1. Equação de Slutsky para variações contínuas

De acordo com o exposto no item referente a dualidade e funções de demanda, pode-se definir:

a) $V(P_i, R) = V[P_i, D(P_i, U)] = U$, como a máxima utilidade alcançada em um dado nível de renda que equivale ao dispêndio mínimo $D(P_i, U)$ necessário para alcançá-la.

b) $\dfrac{\partial D(P_i, U)}{\partial P_i} = Q_i$, como a quantidade demandada do bem i, dados os preços e o nível de utilidade.

c) $H_i(P_i, U) = Q[P_i, D(P_i, U)]$, como a demanda Hicksiana.

Diferenciando (c) em relação a P_i, tem-se a equação de Slutsky:

$$\frac{\partial H_i(P_i,U)}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_i[P_i, D(P_i,U)]}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_i[P_i, D(P_i,U)]}{\partial D(P_i,U)} \frac{\partial D(P_i,U)}{\partial P_i}$$

$$\frac{\partial H_i(P_i,U)}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_i[P_i,R]}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_i[P_i,R]}{\partial R} Q_i \qquad (4.19)$$

$$\frac{\partial Q_i[P_i,R]}{\partial P_i} = \frac{\partial H_i(P_i,U)}{\partial P_i} - \frac{\partial Q_i[P_i,R]}{\partial R} Q_i$$

em que $\dfrac{\partial Q_i[P_i, R]}{\partial P_i}$ é a demanda Marshaliana inversa, $\dfrac{\partial H_i(P_i, U)}{\partial P_i}$ é a demanda compensada ou Hicksiana e $\dfrac{\partial Q_i[P_i, R]}{\partial R}$ é o efeito renda.

4.4.2. Matriz de Slutsky

Agora é possível derivar algumas implicações da equação de Slutsky para a teoria do consumidor. A matriz Hessiana (H) da função de dispêndio é simétrica e negativa semidefinida. Isso implica que os efeitos de substituição cruzada são iguais e que a inclinação da função de demanda compensada é não-positiva. Para a demonstração, considere a matriz Hessiana da função de dispêndio para dois bens, Q_1 e Q_2, cujos preços são denotados por P_1 e P_2:

$$|D| = \begin{vmatrix} D_{Q1Q1} & D_{Q1Q2} \\ D_{Q2Q1} & D_{Q2Q2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} \leq 0 \qquad (4.20)$$

em que D_{11} é a segunda derivada parcial de $D(P_i, U)$ em relação a P_i e D_{12} é a derivada parcial cruzada.

A matriz Hessiana D é negativa semidefinida em conseqüência do fato de a função de dispêndio D ser côncava. Isso implica também que o primeiro menor principal de D tem que ser não positivo, isto é, $D_{11} < 0$.

Portanto, $D_{11} = \frac{\partial^2 [D(P_1, U)]}{\partial P_1} = \frac{\partial [H_1(P_1, U)]}{\partial P_1} < 0$; logo, o efeito substituição não pode ser positivo. Além disso, em conseqüência de a função dispêndio ser contínua e diferenciável pelo menos duas vezes, pelo teorema de Young[11], tem-se que $D_{12} = \frac{\partial^2 [D(P_1, U)]}{\partial P_1 \partial P_2} = D_{21} = \frac{\partial [H_1(P_1, U)]}{\partial P_2 \partial P_1}$, ou seja, a matriz Hessiana da função de dispêndio é simétrica.

As implicações da equação de Slutsky, baseadas na compensação de Hicks, são empiricamente testáveis? De alguma maneira, sim, elas

---

[11] De acordo com o teorema de Young, desde que as derivadas parciais cruzadas de uma função sejam contínuas, pode-se dizer que elas são iguais. Assim, as derivadas parciais cruzadas de segunda ordem, da FID, devem ser tais que $D_{Q_1Q_2} = D_{Q_2Q_1}$, ou, generalizando, $\frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial |D(P_i, U)|}{\partial P_j}\right) = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial |D(P_i, U)|}{\partial P_i}\right) \forall i \neq j$. Apresentação detalhada deste teorema pode ser encontrada em Chiang (1982).

podem ser testadas como se segue.

Suponha que sejam obtidas estimativas econométricas de um sistema de demanda ordinária:

$$\hat{Q}_i = Q(P_i, R) \tag{4.21}$$

Da equação (4.21), pode-se testar se para as funções estimadas tem-se: $\frac{\partial Q_i}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial R}\hat{Q}_i < 0$, isto é, o efeito substituição de Hicks é, de fato, negativo? Pode-se testar também se os efeitos de substituição cruzada são iguais. Ou seja, para o caso de dois bens, é verdadeiro que $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial R}\hat{Q}_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial R}\hat{Q}_1$? Generalizando para *n* bens denotados por *i* e *j*, é verdadeiro que $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial R}\hat{Q}_j = \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_j}{\partial R}\hat{Q}_i \;\; \forall\, i \neq j$?

Assim, testa-se uma hipótese mista, que inclui a hipótese de que o sistema de equações estaria corretamente especificado.

4.5. Aplicação da dualidade: problemas *primal* e *dual*

Para melhor ilustrar as relações teóricas expostas, suponha que a soma dos coeficientes α e β, da equação (4.10), seja igual à unidade, sendo $\alpha = 0{,}5$ e $\beta = 0{,}5$. Como são elaborados os problemas *primal* e *dual* para um consumidor de dois bens Q_1 e Q_2, cujos preços são P_1 e P_2?

4.5.1. Problema primal

Como já mencionado, consideramos que o problema *primal* corresponde à maximização da utilidade do consumidor, dadas as quantidades adquiridas dos bens Q_1 e Q_2. Assim, o problema *primal* pode ser resolvido respondendo a seguinte pergunta: quais são as

quantidades de Q_1 e Q_2, cujos preços de mercados são P_1 e P_2, que maximizam a satisfação do consumidor que possui uma renda disponível R para gastar com ambos os bens?

Para responder a essa pergunta, pode-se montar o seguinte problema de maximização:

$$\begin{aligned} &Max\ U = U\left(Q_1^{0,5} Q_2^{0,5}\right) \\ &s.a\ \ R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Este problema pode ser resolvido montando-se o seguinte Lagrangeano:

$$L = U\left(Q_1^{0,5} Q_2^{0,5}\right) + \lambda\left[R - P_1 Q_1 - P_2 Q_2\right] \tag{4.23}$$

Calculando as derivadas primeiras de (4.23) em relação a Q_1, Q_2 e λ, têm-se as condições de primeira ordem (CPO) do problema de maximização da utilidade do consumidor:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = 0{,}5 Q_1^{-0,5} Q_2^{0,5} - \lambda P_1 = 0 \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = 0{,}5 Q_1^{0,5} Q_2^{-0,5} - \lambda P_2 = 0 \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = 0 \tag{4.26}$$

As condições de primeira ordem são necessárias, mas não suficientes para se garantir um ponto de máximo. Dessa maneira, a condição de segunda ordem (CSO) para um ponto de máximo é que a matriz Hessiana orlado (H), da equação (4.23), seja definida negativa ou, pelo menos, negativa semidefinida. Para isso, o determinante da matriz H deve ser maior que zero, ou seja, obtidas as derivadas parciais segundas para as variáveis Q_1 e Q_2, tem-se:

$$H = \begin{bmatrix} U_{11} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2} = -0{,}25Q_1^{-1.5}Q_2^{0.5} & U_{12} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0{,}25Q_1^{-0.5}Q_2^{-0.5} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1} = -P_1 \\ U_{21} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1} = 0{,}25Q_1^{-0.5}Q_2^{-0.5} & U_{22} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2} = -0{,}25Q_1^{0.5}Q_2^{-1.5} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2} = -P_2 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1} = -P_1 & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2} = -P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|H| = \begin{bmatrix} -0{,}25Q_1^{-1,5}Q_2^{0,5} & 0{,}25Q_1^{-0,5}Q_2^{-0,5} & -P_1 \\ 0{,}25Q_1^{-0,5}Q_2^{-0,5} & -0{,}25Q_1^{0,5}Q_2^{-1,5} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} > 0 \qquad (4.27)$$

$$|H| = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} > 0$$

Das condições de primeira ordem, pode-se isolar λ em (4.24) e, ou, (4.25), obtendo-se a taxa marginal de substituição (TMS) de Q_2 por Q_1:

$$TMS_{2,1} = \frac{\partial U / \partial Q_1}{\partial U / \partial Q_2} = \frac{UMa_1}{UMa_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{P_2}{P_1} \qquad (4.28)$$

Para obter as equações de demanda Marshalianas ou não-compensadas, para Q_1 e Q_2, basta usar a TMS; isolando Q_1 ou Q_2 e substituindo na condição de primeira ordem, dada pela equação (4.26), tem-se:

$$R - P_1 \frac{Q_2 P_2}{P_1} - P_2 Q_2 = 0$$

$$R - P_2 Q_2 - P_2 Q_2 = 0$$

$$Q_2 = \frac{R}{2P_2}$$

$$Q_1 = \frac{R}{2P_1}$$

em que Q_1 e Q_2 são as funções de demanda ordinárias ou Marshalianas, podendo ser escritas também como:

$$Q_1 = Q_1(P_1, R) = \frac{R}{2P_1}$$
$$Q_2 = Q_2(P_2, R) = \frac{R}{2P_2} \quad (4.29)$$

Para encontrar a função indireta de utilidade (FIU), deve-se apenas substituir Q_1 e Q_2 na função de utilidade $U = U(Q_1^{0,5} Q_2^{0,5})$, de forma que:

$$U = V(P_1, P_2, R) = \left(\frac{R}{2P_1}\right)^{0,5} \left(\frac{R}{2P_2}\right)^{0,5}$$
$$= \frac{R}{2P_1^{0,5} P_2^{0,5}} \quad (4.30)$$

Da FIU, aplicando-se a identidade de Roy, dada na equação (4.11), obtêm-se as próprias funções de demanda Marshaliana. Invertendo a FIU, colocando em função dos preços e da utilidade, tem-se a função indireta de dispêndio (FID). Para isso, isola-se R na equação (4.30):

$$R = D(P_1, P_2, U) = 2P_1^{0,5} P_2^{0,5} U \quad (4.31)$$

Aplicando o teorema de Shephard, têm-se as demandas Hicksianas ou compensadas:

$$H_1 = Q_{1C} = \frac{\partial D}{\partial P_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0,5} \cdot U$$
$$H_2 = Q_{2C} = \frac{\partial D}{\partial P_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{0,5} \cdot U \quad (4.32)$$

Pela teoria da Dualidade, os problemas *primal* e *dual* devem gerar os mesmos resultados. Para demonstrar isso, o problema *dual* correspondente ao problema *primal* apresentado será formulado a seguir.

4.5.2. Problema dual

É comum que as pessoas se preocupem em comprar os bens que mais gostam, sendo comum também a preocupação com a quantia que irão gastar. Geralmente, as pessoas têm uma quantia de dinheiro para comprar determinados bens, e o que se quer é comprar a maior quantidade de bens, gastando a menor quantia possível. Disso pode-se formular a seguinte pergunta: supondo que o consumidor goste dos bens Q_1 e Q_2, cujos preços de mercados são P_1 e P_2, qual o menor valor que ele pode gastar na compra desses bens, de forma que ele obtenha a maior satisfação com a compra?

$$Min \ R = P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$S.a \ U = U\left(Q_1^{0,5}Q_2^{0,5}\right) \quad (4.33)$$

Esse problema pode ser resolvido montando-se o seguinte Lagrangeano:

$$Z = P_1Q_1 - P_2Q_2 + \mu\left[U - U\left(Q_1^{0,5}Q_2^{0,5}\right)\right] \quad (4.34)$$

Derivando em relação a Q_1, Q_2 e μ, têm-se as condições de primeira ordem para minimização:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = P_1 - \mu 0{,}5 Q_1^{-0,5} Q_2^{0,5} = 0 \qquad (4.35)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_2} = P_2 - \mu 0{,}5 Q_1^{0,5} Q_2^{-0,5} = 0 \qquad (4.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = U - Q_1^{0,5} Q_2^{0,5} = 0 \qquad (4.37)$$

A condição de segunda ordem para um mínimo é que a matriz Hessiana orlado da equação (4.34) seja definida positiva. As derivações da matriz (H) para minimização podem ser obtidas de forma análoga ao caso de maximização apresentado em (4.27).

Das condições de primeira ordem, pode-se isolar μ em (4.35) e, ou, (4.36), obtendo-se a taxa marginal de substituição (TMS) de Q_1 por Q_2:

$$TMS_{1,2} = \frac{\partial U / \partial Q_2}{\partial U / \partial Q_1} = \frac{UMa_2}{UMa_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (4.38)$$

As equações de demanda compensadas ou Hicksianas, para Q_1 e Q_2, são obtidas isolando Q_1 ou Q_2 na equação (4.38) e substituindo na condição de primeira ordem, dada pela equação (4.37). Disso tem-se:

$$H_1 = Q_{1C} = Q_{1C}(P_1, P_2, U) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0,5} \cdot U$$

$$H_2 = Q_{2C} = Q_{2C}(P_1, P_2, U) = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{0,5} \cdot U \qquad (4.39)$$

Substituindo Q_{1C} e Q_{2C} na equação da renda, tem-se a FID, que

é exatamente igual à equação (4.31):

$$R = D(P_1, P_2, U) = 2P_1^{0,5} P_2^{0,5} U \tag{4.40}$$

Os desenvolvimentos e derivações da teoria do consumidor apresentados neste capítulo, fazendo-se uso da teoria da dualidade, foram condensados na Figura 4.2.

As propriedades das funções apresentadas neste item, bem como nos itens anteriores, não foram demonstradas. Assim, os leitores mais interessados podem consultar as derivações das principais propriedades das funções apresentadas neste item no Apêndice B.

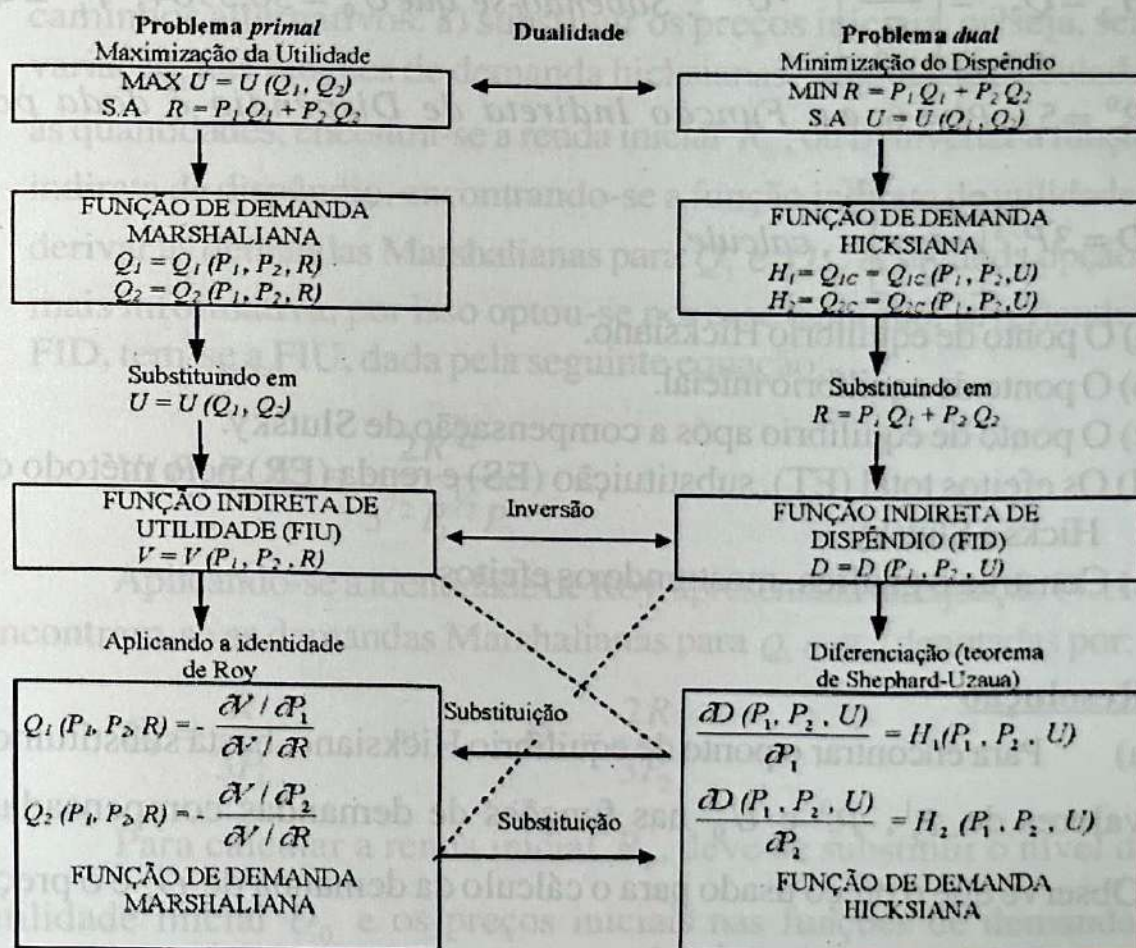



Figura 4.2 - Dualidade aplicada à Teoria do Consumidor

Fonte: Adaptado de Deaton e Muellbauer (1980, p. 38 e 41).

4.6. Exercício resolvido

1) Considere um indivíduo que consumia inicialmente uma cesta de dois bens, Q_1 e Q_2. *Após um aumento de preço de* P_1^0 *para* P_1^1, *foi-lhe dada uma compensação de renda para que atingisse o mesmo nível de satisfação. Neste novo ponto de equilíbrio, são dadas as funções de demanda Hicksiana:* $H_1 = Q_{1C} = \left[\frac{P_2 U}{2P_1}\right]^{2/3}$ *e*

$H_2 = Q_{2C} = \left[\frac{2P_1}{P_2}\right]^{1/3} \cdot U^{2/3}$. *Sabendo-se que* $U_0 = 50{,}5964$, $P_1^0 = 4$, $P_2^0 = 5$, $P_1^1 = 6$ *e a Função Indireta de Dispêndio é dada por*

$D = 3P_1^{1/3}\left[\frac{P_2 U}{2}\right]^{2/3}$, *calcule:*

a) O ponto de equilíbrio Hicksiano.
b) O ponto de equilíbrio inicial.
c) O ponto de equilíbrio após a compensação de Slutsky.
d) Os efeitos total (ET), substituição (ES) e renda (ER) pelo método de Hicks e Slutsky.
e) Construa o **gráfico**, mostrando os efeitos.

Resolução

a) Para encontrar o ponto de equilíbrio Hicksiano, basta substituir os valores de P_1^1, P_2^0 e U_0 nas funções de demandas compensadas. Observe que o preço usado para o cálculo da demanda de Q_1 é o preço após variação, ou seja, $P_1^1 = 6$.

$$H_1 = Q_{1C}^H = \left[\frac{P_2 U}{2P_1}\right]^{2/3} = \left[\frac{5(50{,}5964)}{2(6)}\right]^{2/3} = 7{,}63$$

$$H_2 = Q_{2C}^H = \left[\frac{2P_1}{P_2}\right]^{1/3} \cdot U^{2/3} = \left[\frac{2(6)}{5}\right]^{1/3} \cdot (50{,}5964)^{2/3} = 18{,}31$$

$$R_1^H = P_1^1 Q_{1C}^H + P_2^0 Q_{2C}^H = 6(7{,}63) + 5(18{,}31) = 137{,}33$$

b) Para encontrar o ponto de equilíbrio inicial, podem-se usar dois caminhos alternativos: a) substituir os preços iniciais, ou seja, sem variação, nas funções de demanda hicksianas – depois de calculadas as quantidades, encontra-se a renda inicial R_0; ou b) inverter a função indireta de dispêndio, encontrando-se a função indireta de utilidade e derivar as demandas Marshalianas para Q_1 e Q_2. A segunda opção é mais informativa, por isso optou-se por esse caminho. Invertendo a FID, tem-se a FIU, dada pela seguinte equação:

$$V(P_1, P_2, R) = \frac{2R^{3/2}}{3^{3/2} P_1^{1/2} P_2}$$

Aplicando-se a identidade de Roy, apresentada na equação (4.11), encontram-se as demandas Marshalianas para Q_1 e Q_2, denotadas por:

$$Q_1 = \frac{R}{3P_1} \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{2R}{3P_2}$$

Para calcular a renda inicial R_0, deve-se substituir o nível de utilidade inicial U_0 e os preços iniciais nas funções de demandas Hicksianas. Isso pode ser feito pelo fato de a compensação de Hicks ser obtida sob o princípio de que o consumidor deve permanecer no mesmo nível de utilidade inicial ou na mesma curva de indiferença.

$$Q_1^0 = H_1^0 = Q_{1C}^0 = \left[\frac{P_2 U}{2P_1}\right]^{2/3} = \left[\frac{5(50{,}5964)}{2(4)}\right]^{2/3} = 10$$

$$Q_2^0 = H_2^0 = Q_{2C}^0 = \left[\frac{2P_1}{P_2}\right]^{1/3} \cdot U^{2/3} = \left[\frac{2(4)}{5}\right]^{1/3} \cdot (50{,}5964)^{2/3} = 16$$

$$R_0 = P_1^0 Q_1^0 + P_2^0 Q_2^0 = 4(10) + 5(16) = 120{,}00$$

Observe que, substituindo $P_1^0 = 4$, $P_2^0 = 5$ e $R_0 = 120{,}00$ nas demandas Marshalianas, obtêm-se as mesmas quantidades encontradas anteriormente, e pode-se também calcular o equilíbrio do consumidor sem a compensação de renda após variações dos preços.

Equilíbrio inicial:

$$Q_1^0 = \frac{R_0}{3P_1^0} = \frac{120}{3(4)} = 10 \quad \text{e} \quad Q_2^0 = \frac{2R_0}{3P_2^0} = \frac{2(120)}{3(5)} = 16$$

$$R_0 = P_1^0 Q_1^0 + P_2^0 Q_2^0 = 4(10) + 5(16) = 120{,}00$$

Equilíbrio após variação do preço:

$$Q_1^1 = \frac{R_0}{3P_1^1} = \frac{120}{3(6)} = 6{,}67 \quad \text{e} \quad Q_2^1 = \frac{2R_0}{3P_2^0} = \frac{2(120)}{3(5)} = 16$$

$$R_0 = P_1^0 Q_1^0 + P_2^0 Q_2^0 = 6(6{,}67) + 5(16) = 120{,}00$$

c) A compensação de renda de Slutsky é obtida sob um princípio diferente da compensação de Hicks. Para Slutsky, a compensação de renda deve ser tal que o consumidor possa adquirir, aos novos preços, a mesma cesta inicial. Assim, para encontrar o equilíbrio de Slutsky, deve-se encontrar a variação de renda necessária para adquirir as mesmas quantidades iniciais dos bens Q_1 e Q_2 e substituir os novos valores nas próprias demandas Marshalianas, calculadas na letra (b) deste exercício.

$$R_0 = P_1^0 Q_1^0 + P_2^0 Q_2^0$$
$$R_1^S = P_1^1 Q_1^0 + P_2^0 Q_2^0$$
$$\Delta R = R_1^S - R_0$$
$$\Delta R = P_1^1 Q_1^0 - P_1^0 Q_1^0$$
$$\Delta R = Q_1^0 (P_1^1 - P_1^0)$$
$$\Delta R = 10(2) = 20$$
$$R_0 = 120$$
$$R_1^S = 120 + 20 = 140$$

Substituindo nas demandas Marshalianas, tem-se:

$$Q_1^S = \frac{R_1^S}{3P_1^1} = \frac{140}{3(6)} = 7{,}78 \quad \text{e} \quad Q_2^S = \frac{2R_1^S}{3P_2^0} = \frac{2(140)}{3(5)} = 18{,}67$$

d) Como já foram calculadas as demandas compensadas para Hicks e Slutsky, itens (b) e (c) deste mesmo exercício, basta calcular as variações destas demandas, em relação às demandas iniciais Q_1^0 e Q_2^0 e às demandas finais Q_1^1 e $Q_2^1 = Q_2^0$, após a variação do preço.

Pelo método de Slutsky:

$$ES = Q_1^S - Q_1^0 = 7{,}78 - 10 = -2{,}22$$
$$ER = Q_1^1 - Q_1^S = 6{,}67 - 7{,}78 = -1{,}11$$
$$ET = ES + ER = -2{,}22 - 1{,}11 = -3{,}33$$

Pelo método de Hicks:

$$ES = Q_{1C}^H - Q_1^0 = 7{,}63 - 10 = -2{,}37$$
$$ER = Q_1^1 - Q_{1C}^H = 6{,}67 - 7{,}63 = -0{,}96$$
$$ET = ES + ER = -2{,}37 - 0{,}96 = -3{,}33$$

e) No gráfico a seguir encontra-se a representação dos resultados obtidos nos itens anteriores deste exercício.

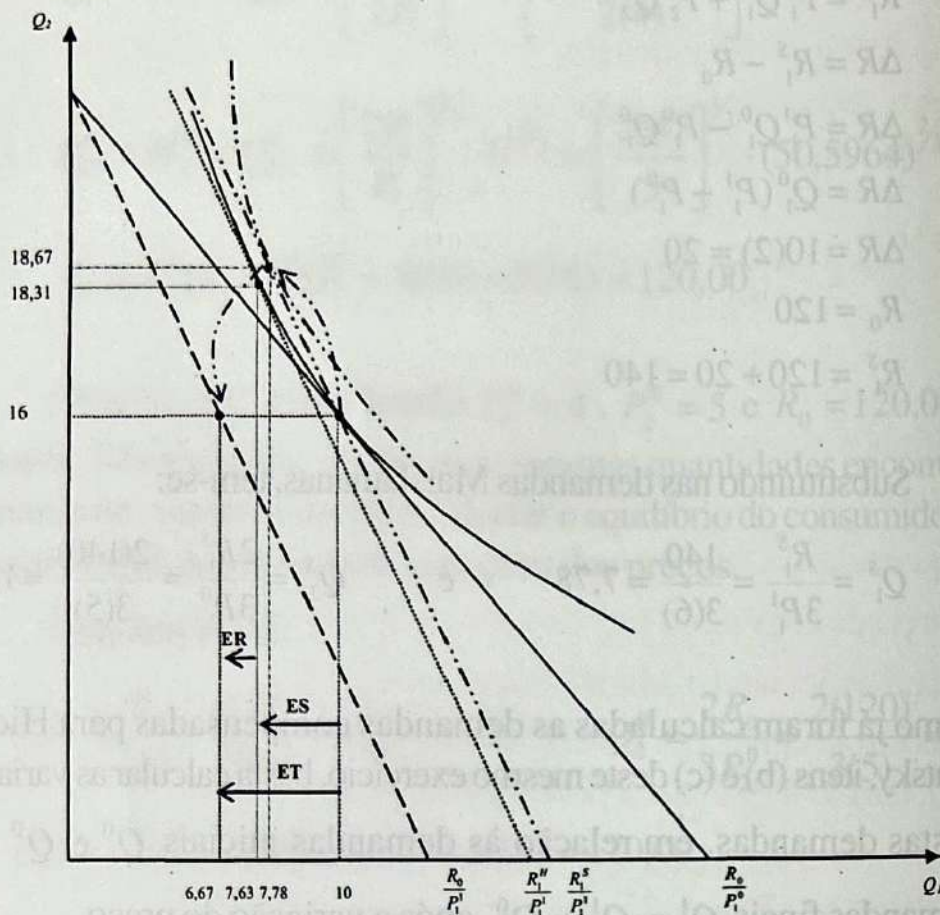



Figura 4.3 - Representação dos efeitos total, substituição e renda para as compensações de renda com os métodos de Hicks e de Slutsky

4.7. Exercícios propostos

Comente as seguintes questões:

1) A Teoria da Dualidade aplicada à Teoria do Consumidor proporciona alternativas à modelagem usual e, portanto, à solução de problemas econômicos.
2) Funções de utilidade que apresentam a mesma taxa marginal de substituição serão, com certeza, transformações monotônicas positivas uma da outra.

3) Um indivíduo que possui função de utilidade homogênea e crescente jamais terá sua satisfação maximizada.

Resolva os seguintes problemas:

1) Um consumidor tem sua função de utilidade representada por: $U(Q_1, Q_2) = \alpha \ln Q_1 + \beta \ln Q_2$, com α e $\beta > 0$; sendo $\alpha \neq \beta$, o dispêndio total do consumidor com cada bem será sempre diferente para quaisquer preços não-nulos dos bens Q_1 e Q_2.

2) Um consumidor tem a função de utilidade para dois bens, 1 e 2, representada por $U = Q_1^{1/3} Q_2^{1/3}$, em que U = utilidade total, Q_1 = quantidade consumida do bem 1 e Q_2 = quantidade consumida do bem 2. As restrições iniciais do consumidor são: renda = R$ 120,00; P_1 = R$5,00; e P_2 = R$4,00. Considere que o preço do bem 1 aumenta de R$5,00 para R$6,00. Utilizando-se os métodos de Hicks e Slutsky, calcule:

a) A curva de renda consumo.

b) A curva de Engel para os dois bens.

c) A função indireta de utilidade.

d) As demandas Marshalianas;

e) As demandas compensadas ou Hicksianas.

f) O ponto de equilíbrio após a compensação de Hicks.

g) O ponto de equilíbrio após a compensação de Slutsky.

h) Os efeitos total, renda e substituição pelos métodos de Hicks e Slutsky.

i) Construa o gráfico, mostrando os efeitos.

O bem 1 é um bem normal, superior ou inferior? Por quê?

3) Um consumidor tem a função de utilidade para dois bens representada por $U = Q_1^{1/3} Q_2^{2/3}$, em que U = utilidade total, Q_1 = quantidade consumida do bem 1 e Q_2 = quantidade consumida do bem 2. As restrições iniciais do consumidor são: renda = R$ 105,00; P_1 = R$ 2,50; e P_2 = R$ 5,00. Considere que o preço do bem 1 aumenta de R$ 2,50 para R$ 5,00. Utilizando-se os métodos de Hicks e Slutsky, calcule:

a) O ponto de equilíbrio após a compensação de Hicks.
b) O ponto de equilíbrio após a compensação de Slutsky.
c) Os efeitos total, renda e substituição pelos métodos de Hicks e Slutsky.
d) Construa o gráfico mostrando os efeitos.
e) As demandas compensadas são menos elásticas que a demanda marshaliana inversa. Explique de forma discursiva porque isso acontece.

4) Considere um indivíduo que consome dois bens, Q_1 e Q_2, cuja Função Indireta de Dispêndio seja dada por $D = 2/3(P_1 \cdot P_2 \cdot U)^{1/3}$. Sabe-se que o nível inicial de renda desse indivíduo é de R$ 300,00 e que os preços iniciais dos bens são P_1 = R$ 5,00 e P_2 = R$ 10,00. Considerando uma redução em P_1 capaz de modificar para 1/4 a relação de preços, calcule os efeitos renda, substituição e total, sob os critérios de compensação de renda de Hicks e Slutsky. Faça a demonstração da forma gráfica.

4.8. Referências

AFRIAT, S.N. **Demand functions and the stutsky matrix.** New Jersey: Princeton University Press, 1980. 269 p.

BINGER, B.R.; HOFFMAN, E. **Microeconomics with calculus**. 2.ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 633 p.

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. 684 p.

DEATON, A.; MUELLBAUER, J. **Economics and consumer behavior**. London: Cambridge University Press, 1980. 450 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1999. 791 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1999. 740 p.

4.9. Apêndices

4.9.1. Apêndice A

Propriedades básicas das funções de demanda Marshalianas – equações (4.3) e (4.29)

1) Aditividade. Por essa propriedade o consumidor deve gastar toda a renda disponível com os bens Q_1 e Q_2 na alocação de equilíbrio. Para testar isso, devem-se substituir as equações de demanda Q_1 e Q_2 na equação de restrição orçamentária.

$$Q_1 = Q_1(P_1, R) = \frac{R}{2P_1}$$

$$Q_2 = Q_2(P_2, R) = \frac{R}{2P_2}$$

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2 \Rightarrow R = P_1\frac{R}{2P_1} + P_2\frac{R}{2P_2} \Rightarrow R = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}$$

Como se queria demonstrar (*c.q.d.*)

2) Homogeneidade de grau zero em preços e renda. Para testar esta propriedade, basta multiplicar todos os argumentos de Q_1 e Q_2 por uma constante $t > 0$.

$$Q(P, R) = Q(tP, tR)$$

$$Q_1 = \frac{tR}{2tP_1} = \frac{tR}{t2P_1} = t^0\ \frac{R}{2P_1} = 1\left[\frac{R}{2P_1}\right] = \frac{R}{2P_1}$$

$$Q_2 = \frac{tR}{2tP_2} = \frac{tR}{t2P_2} = t^0\ \frac{R}{2P_2} = 1\left[\frac{R}{2P_2}\right] = \frac{R}{2P2}$$

c.q.d.

Testando as propriedades das funções indiretas de utilidade (FIU) – equações (4.6) e (4.30)

1) As FIUs são crescentes em R, ou seja, $V(P,tR)=tV(P,R)$.

$$V(P_1,P_2,R)=\frac{R}{2P_1^{0,5}P_2^{0,5}}=\frac{tR}{2P_1^{0,5}P_2^{0,5}}=t\left(\frac{R}{2P_1^{0,5}P_2^{0,5}}\right)$$

Isso significa que, se a renda do consumidor for multiplicada por 2, por exemplo, a FIU também será multiplicada por 2.

2) As FIUs são não-crescentes em P, isto é, $V(tP,R)=\frac{1}{t}V(P,R)$.

$$V(tP_1,tP_2,R)=\frac{R}{2t^{0,5}P_1^{0,5}t^{0,5}P_2^{0,5}}=\frac{1}{t^{0,5}t^{0,5}}\left(\frac{R}{2P_1^{0,5}P_2^{0,5}}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{R}{2P_1^{0,5}P_2^{0,5}}\right)$$

3) Homogeneidade de grau zero em preços e renda.

$$V(tP_1,tP_2,tR)=\frac{tR}{2t^{0,5}P_1^{0,5}t^{0,5}P_2^{0,5}}=\frac{t}{t^{0,5}t^{0,5}}\left(\frac{R}{2P_1^{0.5}P_2^{0.5}}\right)=\frac{t}{t}\left(\frac{R}{2P_1^{0.5}P_2^{0.5}}\right)=\frac{R}{2P_1^{0.5}P_2^{0.5}}$$

c.q.d.

4) As FIUs são convexas nos preços. Para testar essa pressuposição, calculam-se as derivadas primeiras e segundas em relação aos preços, montando-se o Hessiano sem orla (D), o qual deve ser maior que zero. Alternativamente, pode-se montar o Hessiano orlado (H), em que a orla é composta pelas derivadas primeiras, sendo este menor que zero. Derivando a seguinte FIU, tem-se que:

$$V(P_1, P_2, R) = \frac{R}{2P_1^{0.5}P_2^{0.5}}$$

$$H = \begin{bmatrix} V_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial P_1^2} = \frac{0{,}375R}{P_1^{2.5}P_2^{0.5}} & V_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial P_1 \partial P_2} = \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} & V_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1} = -\frac{R}{4P_1^{1.5}P_2^{0.5}} \\ V_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial P_2 \partial P_1} = \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} & V_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial P_2^2} = \frac{0{,}375R}{P_1^{0.5}P_2^{2.5}} & V_2 = \frac{\partial V}{\partial P_2} = -\frac{R}{4P_1^{0.5}P_2^{1.5}} \\ V_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1} = -\frac{R}{4P_1^{1.5}P_2^{0.5}} & V_2 = \frac{\partial V}{\partial P_2} = -\frac{R}{4P_1^{0.5}P_2^{1.5}} & 0 \end{bmatrix}$$

A convexidade da FIU é garantida se:

$$|H| = \begin{bmatrix} \frac{0{,}375R}{P_1^{2.5}P_2^{0.5}} & \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} & -\frac{R}{4P_1^{1.5}P_2^{0.5}} \\ \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} & \frac{0{,}375R}{P_1^{0.5}P_2^{2.5}} & -\frac{R}{4P_1^{0.5}P_2^{1.5}} \\ -\frac{R}{4P_1^{1.5}P_2^{0.5}} & -\frac{R}{4P_1^{0.5}P_2^{1.5}} & 0 \end{bmatrix} < 0 \text{ e, ou,}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} \frac{0{,}375R}{P_1^{2.5}P_2^{0.5}} & \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} \\ \frac{0{,}125R}{P_1^{1.5}P_2^{1.5}} & \frac{0{,}375R}{P_1^{0.5}P_2^{2.5}} \end{bmatrix} \geq 0$$

Observe que, para definir o valor do determinante de H, devem-se conhecer os valores de R, P_1 e P_2. Suponha por exemplo que $R = 100,\ P_1 = 5$ e $P_2 = 10$. Assim:

$$|H| = \begin{bmatrix} 0{,}212113 & 0{,}035355 & -0{,}707107 \\ 0{,}035355 & 0{,}053033 & -0{,}353553 \\ -0{,}707107 & -0{,}353553 & 0 \end{bmatrix} = -0{,}035353 < 0 \text{ e}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} 0{,}212113 & 0{,}035355 \\ 0{,}035355 & 0{,}053033 \end{bmatrix} = 0{,}0099 > 0$$

c.q.d.

Testando as propriedades das funções indiretas de dispêndio (FID) – equações (4.12), (4.31) e (4.40)

1) Homogeneidade de grau 1 em todos os preços, ou seja, não-decrescente em P, implicando que $D(tP,U)=tD(P,U)$.

$$D(P_1,P_2,U)=2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U$$
$$D(tP_1,tP_2,U)=2t^{0,5}P_1^{0,5}t^{0,5}P_2^{0,5}U$$
$$=t^{0,5}t^{0,5}(2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U)$$
$$=t^1(2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U)$$

c.q.d.

2) As FIDs são crescentes em U, significando que $D(P,tU)=tD(P,U)$.

$$D(P_1,P_2,U)=2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U$$
$$D(P_1,P_2,tU)=2P_1^{0,5}P_2^{0,5}tU$$
$$=t(2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U)$$
$$=t^1(2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U)$$

c.q.d.

3) As FIDs são côncavas nos preços. Dada a função $D(P_1,P_2,U)=2P_1^{0,5}P_2^{0,5}U$, calculam-se as primeiras e segundas derivadas parciais da FID com relação aos preços, e, de forma análoga à FIU, pode-se montar o Hessiano e o Hessiano orlado para a FID.

$$H=\begin{bmatrix} D_{11}=\dfrac{\partial^2 D}{\partial P_1^2}=-0{,}5P_1^{-1,5}P_2^{0,5}U & D_{12}=\dfrac{\partial^2 D}{\partial P_1\,\partial P_2}=0{,}5P_1^{-0,5}P_2^{-0,5}U & D_1=\dfrac{\partial D}{\partial P_1}=P_1^{-0,5}P_2^{0,5}U \\ D_{21}=\dfrac{\partial^2 D}{\partial P_2\,\partial P_1}=0{,}5P_1^{-0,5}P_2^{-0,5}U & D_{22}=\dfrac{\partial^2 D}{\partial P_2^2}=-0{,}5P_1^{0,5}P_2^{-1,5}U & D_2=\dfrac{\partial D}{\partial P_2}=P_1^{0,5}P_2^{-0,5}U \\ D_1=\dfrac{\partial D}{\partial P_1}=P_1^{-0,5}P_2^{0,5}U & D_2=\dfrac{\partial D}{\partial P_2}=P_1^{0,5}P_2^{-0,5}U & 0 \end{bmatrix}$$

A concavidade da FID é garantida se:

$$|H| = \begin{bmatrix} -0{,}5P_1^{-1.5}P_2^{0.5}U & 0{,}5P_1^{-0.5}P_2^{-0.5}U & P_1^{-0.5}P_2^{0.5}U \\ 0{,}5P_1^{-0.5}P_2^{-0.5}U & -0{,}5P_1^{0.5}P_2^{-1.5}U & P_1^{0.5}P_2^{-0.5}U \\ P_1^{-0.5}P_2^{0.5}U & P_1^{0.5}P_2^{-0.5}U & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{e, ou,}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} -0{,}5P_1^{-1.5}P_2^{0.5}U & 0{,}5P_1^{-0.5}P_2^{-0.5}U \\ 0{,}5P_1^{-0.5}P_2^{-0.5}U & -0{,}5P_1^{0.5}P_2^{-1.5}U \end{bmatrix} \leq 0$$

Assim como para a FIU, para definir o valor do determinante de H, devem-se conhecer os valores de U, P_1 e P_2. Supondo os mesmos valores para $P_1 = 5$ e $P_2 = 10$, que foram usados para verificar a convexidade da FIU, e um nível de utilidade de $U = 7{,}07$, equivalente às quantidade ótimas consumidas para os valores de R, P_1 e P_2 já informados, é possível montar o seguinte Hessiano:

$$H = \begin{bmatrix} -0{,}999849 & 0{,}499924 & 9{,}998489 \\ 0{,}499924 & -0{,}249962 & 4{,}999245 \\ 9{,}998489 & 4{,}999245 & 0 \end{bmatrix} = 99{,}9576 > 0 \quad \text{e}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0{,}999849 & 0{,}499924 \\ 0{,}499924 & -0{,}249962 \end{bmatrix} = 0{,}00000 = 0$$ sendo, neste caso, negativo semidefinido.

c.q.d.

Testando as propriedades das funções de demanda Hicksianas – equações (4.15), (4.32) e (4.39)

$$H_1 = Q_{1C} = Q_{1C}(P_1, P_2, U) = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0,5} \cdot U$$

$$H_2 = Q_{2C} = Q_{2C}(P_1, P_2, U) = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{0,5} \cdot U$$

1) Homogeneidade de grau zero em preços, ou seja:

$$H_1 = Q_{1C} = Q_{1C}(P_1, P_2, U) = Q_{1C}(tP_1, tP_2, U)$$

$$H_1 = Q_{1C} = Q_{1C}(P_1, P_2, U) = \frac{t^{0.5} P_2^{0.5}}{t^{0.5} P_1^{0.5}} \cdot U$$

$$= t^0 \frac{P_2^{0.5}}{P_1^{0.5}} \cdot U$$

$$= \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^{0.5} \cdot U$$

$$H_2 = Q_{2C} = Q_{1C}(P_1, P_2, U) = Q_{2C}(tP_1, tP_2, U)$$

$$H_2 = Q_{2C} = Q_{2C}(P_1, P_2, U) = \frac{t^{0.5} P_1^{0.5}}{t^{0.5} P_2^{0.5}} \cdot U$$

$$= t^0 \frac{P_1^{0.5}}{P_2^{0.5}} \cdot U$$

$$= \left[\frac{P_1}{P_2}\right]^{0.5} \cdot U$$

c.q.d.

2) As funções de demanda Hicksianas são simétricas, isto é, $\frac{\partial H_1}{\partial P_2} = \frac{\partial H_2}{\partial P_1}$.

$$\frac{\partial H_1}{\partial P_2} = \frac{0{,}5U}{P_1^{0,5} P_2^{0,5}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H_2}{\partial P_1} = \frac{0{,}5U}{P_1^{0,5} P_2^{0,5}} \Rightarrow \frac{\partial H_1}{\partial P_2} = \frac{\partial H_2}{\partial P_1}$$

c.q.d.

3) São semidefinidas negativas. Lembre-se de que as demandas Hicksianas são as primeiras derivadas da FID, em relação aos preços P_1 e P_2. Assim, se a FID é côncava nos preços, logo, esta propriedade é

satisfeita. Para comprovar isso, basta verificar o determinante do Hessiano sem orla, calculado para FID:

$$|D| = \begin{bmatrix} -0,999849 & 0,499924 \\ 0,499924 & -0,249962 \end{bmatrix} = 0,00000 = 0$$

, sendo, neste caso, semidefinido negativo.

4) Deve-se lembrar que o Hessiano deve ser apenas negativo semidefinido, como neste caso.

4.9.2. Apêndice B

De acordo com Binger e Hoffman (1998), podem-se obter funções de demanda marshalianas generalizadas a partir do seguinte problema de maximização da utilidade para dois bens, Q_1 e Q_2, cujos preços são denotados por P_1 e P_2, respectivamente, e R é a renda do consumidor.

$$\begin{aligned} &Max\ U = U(Q_1Q_2 + Q_1 + Q_2) \\ &S.a\ \ R = P_1Q_1 + P_2Q_2 \end{aligned} \tag{4.1B}$$

Montando seguinte Lagrangeano e derivando as condições de primeira ordem, tem-se:

$$L = U(Q_1Q_2 + Q_1 + Q_2) + \lambda\,[R - P_1Q_1 - P_2Q_2] \tag{4.2B}$$

CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = Q_2 + 1 - \lambda P_1 = 0 \tag{4.3B}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = Q_1 + 1 - \lambda P_2 = 0 \tag{4.4B}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1Q_1 - P_2Q_2 = 0 \tag{4.5B}$$

Isolando λ em (4.2A) e (4.3A) e igualando as equações resultantes, tem-se:

$$\lambda = \frac{Q_2 + 1}{P_1} = \frac{Q_1 + 1}{P_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{Q_1 + 1}{Q_2 + 1} \tag{4.6B}$$

Da equação (4.6A) podem-se obter as Curvas de Renda Consumo (CRC) para Q_1 e Q_2:

$$Q_1 = \frac{P_2 Q_2 - P_1 + P_2}{P_1}$$
$$Q_2 = \frac{P_1 Q_1 - P_2 + P_1}{P_2} \tag{4.7B}$$

Substituindo as CRC na restrição orçamentária, equação (4.5A), encontram-se as funções de demanda Marshaliana generalizada para Q_1 e Q_2, denotadas por:

$$Q_1^* = \frac{R - P_1 + P_2}{2P_1}$$
$$Q_2^* = \frac{R - P_2 + P_1}{2P_2} \tag{4.8B}$$

Dessas funções de demanda é possível derivar algumas relações importantes da teoria do consumidor. Para ilustrar melhor o efeito parcial de cada variável sobre as quantidades demandadas de Q_1 e Q_2 devem-se fixar *a priori* os parâmetros $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ e $\overline{R}$. Assim, tem-se:

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - \overline{P}_1 + \overline{P}_2}{2\overline{P}_1}$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - \overline{P}_2 + \overline{P}_1}{2\overline{P}_2} \qquad (4.9B)$$

Para obter a Curva de Engel (CE), deve-se continuar fixando-se os parâmetros $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$, enquanto a renda torna-se variável, de forma que:

$$Q_1^* = \frac{R - \overline{P}_1 + \overline{P}_2}{2\overline{P}_1}$$

$$Q_2^* = \frac{R - \overline{P}_2 + \overline{P}_1}{2\overline{P}_2} \qquad (4.10B)$$

As funções de demanda ordinárias são obtidas fixando-se a renda e os preços dos bens correlatos; assim, tem-se:

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - P_1 + \overline{P}_2}{2P_1}$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - P_2 + \overline{P}_1}{2P_2} \qquad (4.11B)$$

Fixando a renda e o preço do próprio bem em questão, obtém-se o deslocamento da curva de demanda deste bem quando os preços de outros bens variam:

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - \overline{P}_1 + P_2}{2\overline{P}_1}$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - \overline{P}_2 + P_1}{2\overline{P}_2} \qquad (4.12B)$$

Para tornar ainda mais claras as relações econômicas obtidas dessas funções, serão estabelecidos valores para os parâmetros destas. Considere que $\overline{P_1} = 2$, $\overline{P_2} = 4$ e $\overline{R} = 50$. Da equação (4.9B) têm-se as demandas ótimas para Q_1 e Q_2:

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - \overline{P_1} + \overline{P_2}}{2\overline{P_1}} = \frac{50 - 2 + 4}{2(2)} = 13$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - \overline{P_2} + \overline{P_1}}{2\overline{P_2}} = \frac{50 - 4 + 2}{2(8)} = 6$$

Qual a CE para Q_1 e Q_2? Da equação (4.10A) tem-se:

$$Q_1^* = \frac{R - \overline{P_1} + \overline{P_2}}{2\overline{P_1}} = \frac{R - 2 + 4}{2(2)} = \frac{R + 2}{4} = \frac{R}{4} + \frac{1}{2}$$

$$Q_2^* = \frac{R - \overline{P_2} + \overline{P_1}}{2\overline{P_2}} = \frac{R - 4 + 2}{2(4)} = \frac{R - 2}{8} = \frac{R}{8} - \frac{1}{4}$$

Esses bens são bens inferiores, normais ou supérfluos? Sabe-se que a inclinação da Curva de Engel possibilita a classificação dos bens, sendo eles: inferiores, se a inclinação da CE for menor que zero; normais, se a inclinação da CE estiver entre zero e 1; e superiores, se a inclinação da CE for maior que a unidade[12]. Assim, obtendo-se a primeira derivada da CE em relação à renda, tem-se que:

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial R} = \frac{1}{2P_1} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4} \leq 1 \Rightarrow Q_1 \text{ é um bem normal.}$$

$$\frac{\partial Q_2^*}{\partial R} = \frac{1}{2P_2} = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{8} \leq 1 \Rightarrow Q_2 \text{ é um bem normal.}$$

[12] Quando a inclinação da Curva de Engel for igual a zero, é comum classificar o bem como neutro.

As funções de demanda ordinárias são obtidas da equação (4.11A):

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - P_1 + \overline{P_2}}{2P_1} = \frac{50 - P_1 + 4}{2P_1} = \frac{54 - P_1}{2P_1} = \frac{27}{P_1} - \frac{1}{2} \quad (4.13B)$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - P_2 + \overline{P_1}}{2P_2} = \frac{50 - P_2 + 2}{2P_2} = \frac{52 - P_2}{2P_2} = \frac{26}{P_2} - \frac{1}{2} \quad (4.14B)$$

Para testar se as funções de demanda são negativamente inclinadas, basta calcular a primeira derivada destas funções de demanda, equações (4.13A) e (4.14A), em relação a $\overline{P_1}$ e $\overline{P_2}$.

$\frac{\partial Q_1^*}{\partial P_1} = -\frac{27}{(P_1)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1^*$ é uma função de demanda negativamente inclinada.

$\frac{\partial Q_2^*}{\partial P_2} = -\frac{26}{(P_2)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2^*$ é uma função de demanda negativamente inclinada.

Com relação aos preços dos bens correlatos, pode-se definir se os bens são substitutos ou complementares. Assim, tem-se:

$$Q_1^* = \frac{\overline{R} - \overline{P_1} + P_2}{2\overline{P_1}} = \frac{50 - 2 + P_2}{2(2)} = \frac{48}{4} + \frac{P_2}{4} = 12 + \frac{P_2}{4} \quad (4.15B)$$

$$Q_2^* = \frac{\overline{R} - \overline{P_2} + P_1}{2\overline{P_2}} = \frac{50 - 4 + P_1}{2(4)} = \frac{46}{8} + \frac{P_1}{8} = 5{,}75 + \frac{P_1}{8} \quad (4.16B)$$

Então, derivando-se as equações (4.15A e 4.16A), em relação a P_1 e P_2, respectivamente, tem-se:

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial P_2} = \frac{1}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 \text{ é um bem substituto de } Q_2.$$

$$\frac{\partial Q_2^*}{\partial P_1} = \frac{1}{8} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 \text{ é um bem substituto de } Q_1.$$

Outras propriedades podem ser derivadas, porém essa tarefa será deixada para os leitores mais dedicados.

CAPÍTULO 5

Aplicações da teoria da demanda

Alexandre Bragança Coelho[1]
Danilo Rolim Dias de Aguiar[2]

5.1. Introdução

Com base na teoria exposta nos capítulos 3 e 4, muitas aplicações foram desenvolvidas para a estimação econométrica das funções de demanda. Existem basicamente cinco abordagens para obter equações de demanda satisfazendo as propriedades microeconômicas (BARTEN, 1993). A primeira, que tem o Modelo de Despesas Lineares (LES) como o mais conhecido, inicia-se com a especificação de uma forma funcional para a função de utilidade que é maximizada sujeita a uma restrição orçamentária. As condições de primeira ordem são resolvidas para as quantidades como função dos preços e da renda. A segunda abordagem passa pela especificação de uma função linear e pela imposição algébrica das restrições de aditividade, homogeneidade e simetria. Como foi visto no capítulo anterior, essas propriedades garantem que a demanda Marshaliana é derivada de uma estrutura de preferências dos consumidores. O modelo LES também pode ser obtido dessa forma. A terceira abordagem parte da especificação de uma função de utilidade indireta, que permite a estimação de funções de demanda através da Identidade de Roy. Um exemplo desta abordagem é o Sistema de Demanda Translog. A quarta abordagem inicia-se com uma função dispêndio especificada, que resulta

[1] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: acoelho@ufv.br.
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos e bolsista de produtividade do CNPq. e-mail: danilo@power.ufscar.br.

em demandas Hicksianas, após a aplicação do Lema de Shephard, e em demandas Marshalianas, após a substituição da função de utilidade indireta nas demandas Hicksianas. O modelo AIDS (Almost Ideal Demand System) é o mais conhecido exemplo dessa categoria. A quinta e última abordagem utiliza a especificação duplo log e elasticidades constantes, sendo o modelo Rotterdam o seu melhor exemplo.

Esta seção exemplifica como a teoria pode ser utilizada em situações práticas através de somente três formas funcionais. O objetivo aqui é apenas ilustrar a aplicação da teoria econômica na análise de demanda, em vez de oferecer uma completa discussão sobre todas as formas funcionais existentes. Contudo, os exemplos escolhidos não são assim tão restritos: o modelo LES foi um dos primeiros a serem desenvolvidos e ainda é usado em algumas aplicações; já os modelos Rotterdam e AIDS são os mais usados na área de Economia Agrícola e apresentam características similares, pois são ambos formas funcionais flexíveis e igualmente parcimoniosos com respeito ao número de parâmetros, o que os torna objetos de escolha mais prováveis que outras formas funcionais (ALSTON; CHALFANT, 1993).

5.2. Modelo de despesas lineares

Considerando uma especificação linear num sistema de equações de demanda, é possível impor algebricamente as restrições de aditividade, homogeneidade e simetria para determinar o Modelo de Despesas Lineares (LES – Linear Expenditure System) (STONE, 1954). Para entender essa abordagem[3], pode-se iniciar pela equação linear:

$$Q_i = \sum_j \alpha_{ij} P_j + \beta_i R \qquad (5.1)$$

em que Q_i = quantidade demandada do bem i; P_j = preço do bem j; R = dispêndio total com n bens; e α_{ij}, β_i = parâmetros.

[3] O LES também pode ser obtido pela maximização das funções de utilidade direta de Stone-Geary $u = \prod_k (q_k - \gamma_k)^{\beta_k}$ sujeita a restrição orçamentária.

Iniciando pela homogeneidade, podem-se dividir todas as variáveis independentes pelo preço de um bem qualquer, P_i:

$$Q_i = \sum_j \alpha_{ij}\left(\frac{P_j}{P_i}\right) + \beta_i\left(\frac{R}{P_i}\right) \quad (5.2)$$

Ou, de outra forma:

$$P_i Q_i = \sum_j \alpha_{ij} P_j + \beta_i R \quad (5.3)$$

A homogeneidade é assim garantida, pois aumentos iguais de preços e gastos não influenciarão as quantidades demandadas.

Para impor a simetria, sabe-se que a restrição a seguir deve ser observada[4]:

$$\frac{\partial H_i(P,U)}{\partial P_j} = \frac{\partial H_j(P,U)}{\partial P_i} \quad \forall i \neq j \quad (5.4)$$

Como se está trabalhando com demandas não-compensadas, deve-se utilizar a equação de Slutsky para transformar essa restrição:

Para o bem i:

$$\frac{\partial H_i(P,U)}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_i(P,R)}{\partial P_j} + \frac{\partial Q_i(P,R)}{\partial R}.Q_j \quad (5.5)$$

Para o bem j:

$$\frac{\partial H_j(P,U)}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_j(P,R)}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_j(P,R)}{\partial R}.Q_i \quad (5.6)$$

Obtendo-se as derivadas descritas em (5.5) e (5.6) e fazendo a igualdade:

$$\frac{\alpha_{ij}}{P_i} + Q_j\frac{\beta_i}{P_i} = \frac{\alpha_{ji}}{P_j} + Q_i\frac{\beta_j}{P_j} \qquad \forall i \neq j \quad (5.7)$$

[4] Ver capítulo 4.

Multiplicando ambos os lados por $P_i P_j$:

$$\alpha_{ij} P_j + \beta_i P_j Q_j = \alpha_{ji} P_i + \beta_j P_i Q_i \qquad \forall i \neq j \tag{5.8}$$

Substituindo (5.3) em (5.8):

$$\alpha_{ij} P_j + \beta_i \left(\sum_k \alpha_{jk} P_k + \beta_j R \right) = \alpha_{ji} P_i + \beta_j \left(\sum_k \alpha_{ik} P_k + \beta_i R \right) \tag{5.9}$$

Somando e juntando os termos, obtém-se:

$$(\alpha_{ij} + \beta_i \alpha_{jj}) P_j + \beta_i \alpha_{ji} P_i + \beta_i \sum_{k \neq j \neq i}^{n} \alpha_{jk} P_k = (\alpha_{ji} + \beta_j \alpha_{ii}) P_j + \beta_j \alpha_{ij} P_j + \beta_j \sum_{k \neq j \neq i}^{n} \alpha_{ik} P_k \quad \forall i \neq j$$

Como esta equação deve ser verdadeira para qualquer preço, os coeficientes correspondentes a p_k (k=1, ..., n) em cada lado da expressão devem ser iguais: Assim:

$$\alpha_{ij} + \beta_i \alpha_{jj} = \beta_j \alpha_{ij}$$

$$\alpha_{ij} = \beta_i \left[\frac{\alpha_{jj}}{\beta_j - 1} \right] \tag{5.10}$$

Dessa forma, define-se:

$$\gamma_k = -\frac{\alpha_{jk}}{\beta_j} \qquad \forall k \neq j \tag{5.11}$$

$$\gamma_k = \frac{\alpha_{jk}}{1 - \beta_j} \qquad \forall k = j$$

Pode-se obter:

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} \gamma_i - \beta_i \gamma_k \qquad \forall i, k \tag{5.12}$$

em que $\delta_{ik} = 0 \ \forall i \neq k$; $\delta_{ik} = 1 \ \forall i = k$.

Portanto, pode-se agora escrever a equação original e impor a simetria:

$$P_iQ_i = \sum_j \alpha_{ij}P_j + \beta_i R \quad \text{(já imposta a homogeneidade)}$$

Impondo agora a simetria:

$$P_iQ_i = \sum_j (\delta_{ij}\gamma_i - \beta_i\gamma_j)P_j + \beta_i R$$

$$P_iQ_i = -\beta_i \sum_j P_j\gamma_j + P_i\gamma_i + \beta_i R \tag{5.13}$$

$$Q_i = \gamma_i + \frac{\beta_i}{P_i}(R - \sum_j P_j\gamma_j) \tag{5.14}$$

Esta é a forma conhecida do Modelo de Despesas Lineares. Agora, para impor a aditividade, deve-se somar (5.13) para todo i:

$$\sum_i P_iQ_i = \sum_i \beta_i \sum_j P_j\gamma_j - \sum_i P_i\gamma_i + \sum_i \beta_i R$$

Sabendo que $R = \sum_i P_iQ_i$ e juntando os termos, tem-se:

$$R = \sum_j P_j\gamma_j(\sum_i \beta_i - 1) + R\sum_i \beta_i$$

Assim, a aditividade requer que:

$$\sum_i \beta_i = 1 \tag{5.15}$$

Para impor a negatividade, é necessário que:

$$\frac{\partial H_i(P,U)}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_i(P,R)}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_i(P,R)}{\partial R}.Q_i < 0 \tag{5.16}$$

Fazendo a derivada anterior:

$$\frac{-\beta_i}{P_i^2}(R-\sum_j P_j\gamma_j)-\frac{\beta_i\gamma_i}{P_i}+\frac{Q_i\beta_i}{P_i}<0$$

Juntando os termos:

$$-\left(\frac{Q_i-\gamma_i}{P_i}\right)+\frac{\beta_i(Q_i-\gamma_i)}{P_i}<0$$

$$\left(\frac{Q_i-\gamma_i}{P_i}\right)(\beta_i-1)<0$$

Assim:

$$Q_i>\gamma_i \qquad (5.17)$$
$$0<\beta_i<1$$

Dessa maneira, apos a imposição de todas essas restrições, a equação original foi transformada num sistema de demanda teoricamente plausível sem perder sua linearidade. Este é um exemplo de como especificar diretamente as funções de demanda e impor as restrições teóricas para que elas estejam de acordo com a teoria.

Apesar de não haver restrições que garantam que $\gamma_i>0$, esses parâmetros são geralmente considerados como quantidades de subsistência. Isso permite que os gastos numa função de demanda LES possam ser decompostos em duas partes: os gastos para manter um nível mínimo de subsistência, $P_i\gamma_i$; e um termo interpretado como gasto residual ($R-\sum_j P_j\gamma_j$, gasto feito após todos os gastos necessários para manter o nível de subsistência de todos os bens terem sido computados) alocado em proporções fixas, dadas por β_i. Assim:

$$P_iQ_i = P_i\gamma_i + \beta_i\left(R - \sum_j P_j\gamma_j\right) \qquad (5.18)$$

em que, para qualquer bem i, P_iQ_i = gasto total, $P_i\gamma_i$ = gasto de subsistência e $\beta_i\left(R - \sum_j P_j\gamma_j\right)$ = gasto residual.

O grande problema com o LES é que a escolha da forma linear impõe restrições adicionais, que não são desejáveis numa análise empírica. É possível mostrar que o LES é quase-homotético e derivado de uma função de utilidade aditiva, sendo fortemente separável, o que impede a existência de bens inferiores ou bens complementares líquidos.

5.2.1. Modelo Rotterdam

O modelo Rotterdam foi proposto por Barten (1964) e Theil (1965). Considerando a demanda Marshaliana $Q_i = g_i\,(R, P_1,..., P_n)$ e diferenciando sua forma logarítmica, tem-se:

$$d \ln Q_i = e_i d \ln R + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} d \ln P_j \qquad (5.19)$$

em que e_i = elasticidades-renda e e_{ij} = elasticidades-preço.

Usando a equação de Slutsky com elasticidades, $e_{ij}^* = e_i.w_j + e_{ij}$, em que e_{ij}^* é a elasticidade-preço cruzada compensada para mudanças na quantidade do bem i com respeito a mudanças no preço do bem j e w_j é a parcela do dispêndio j, tem-se que:

$$d \ln Q_i = e_i\left(d \ln R - \sum_{j=1}^{n} w_j d \ln P_j\right) + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^* d \ln P_j \qquad (5.20)$$

Multiplicando a restrição anterior por w_i, obtém-se uma forma apropriada para expressar as restrições de demanda:

$$w_i\, d\ln Q_i = \beta_i\left(d\ln R - \sum_{j=1}^{n} w_j\, d\ln P_j\right) + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\, d\ln P_j \quad (5.21)$$

em que $\beta_i = w_i \cdot e_i = P_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial x}$. e $\gamma_{ij} = w_i \cdot e^*_{ij} = \frac{P_i \cdot P_j \cdot s_{ij}}{R}$.

Outra forma possível para o modelo Rotterdam pode ser obtida pela diferenciação do logaritmo da restrição orçamentária[5]; gerando:

$$d\ln R = \sum_{j=1}^{n} w_j\, d\ln P_j + \sum_{j=1}^{n} w_j\, d\ln Q_j = d\ln P + d\ln Q \quad (5.22)$$

em que $d\ln P$ é o diferencial do logaritmo do índice de preços e $d\ln Q$ é o diferencial do índice de quantidades. Dessa forma, substituindo a equação anterior em (5.19):

$$w_i\, d\ln q_i = \beta_i\, dlnQ + \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\, d\ln p_j \quad (5.23)$$

As equações (5.21) e (5.23) permitem a incorporação das restrições teóricas sobre a demanda. A soma dos parâmetros β_i é o mesmo que a condição de Engel:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial R}\right) = 1$$

A soma dos γ_{ij} (usando a equação de Slutsky com elasticidades) origina:

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij} = \sum_{i=1}^{n}[\, w_i(e_i \cdot w_j) + w_i \cdot e_{ij}\,] = w_j \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot e_{ij}) = w_j + \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot e_{ij}) = 0.$$

[5] Ver Barten (1993, p. 134-135).

O último termo da equação anterior é a condição de Cournot. Assim, a condição de aditividade pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1; \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$$

A condição de aditividade não é testável, mas a homogeneidade pode ser testada. Somando para todo j:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = \frac{P_i}{R} \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} . P_j)$$

e usando a condição de homogeneidade:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$$

Assim, a homogeneidade pode ser imposta e testada em cada equação. Já a simetria, usando a definição de γ_{ij}, implica $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ para todo i e j. A negatividade de S implica a negatividade de C (matriz de γ_{ij}), pois γ_{ij} é s_{ij} multiplicada por valores positivos (preços divididos por gastos). Assim, o teste de negatividade pode ser feito em C.

A estimação da equação (5.23) requer sua transformação para diferenças finitas. Assim, o modelo empírico é o seguinte:

$$\overline{w}_{it} \Delta \ln Q_{it} = \beta_i \Delta \ln Q + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \Delta \ln P_{jt} + \mu_{it} \quad (5.24)$$

em que $\overline{w_{it}} = \frac{w_{it} + w_{i(t-1)}}{2}$, $\Delta \ln Q_{it} = \ln Q_{it} - \ln Q_{i(t-1)} = \ln\left(\frac{Q_{it}}{Q_{i(t-1)}}\right)$ e

$\Delta \ln Q = \sum_{i=1}^{n} w_{it} \Delta \ln Q_{it}$.

Nessa formulação, $\Delta \ln Q$ faz o papel do termo de renda real.

5.2.2. Modelo AIDS (Almost Ideal Demand System)

O modelo AIDS é o mais popular sistema de demanda usado na área de economia agrícola, basicamente por duas razões (ALSTON; CHAFANT, 1993). Primeiro, é tão flexível quanto outras formas funcionais flexíveis locais (como a Translog), porém tem a vantagem de ser compatível com a agregação dos consumidores. Em segundo lugar, e mais importante, é fácil de interpretar e estimar. O modelo AIDS foi inicialmente desenvolvido por Deaton e Muellbauer (1980a). Eles iniciaram a partir de uma função dispêndio do tipo PIGLOG (Price Independent Generalized Logarithmic), que pode ser genericamente representada por:

$$\ln D(P,U) = (1-u) \ln \{a(P)\} + u \ln \{b(P)\} \quad (5.25)$$

em que as funções a(P) e b(P) podem ser entendidas como os custos de subsistência e de satisfação ('bliss'), respectivamente. Para obter uma forma funcional flexível, Deaton e Muellbauer definiram a(P) e b(P) como:

$$\ln a(P) = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln P_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma^*_{kj} \ln P_k \ln P_j \quad (5.26)$$

$$\ln b(P) = \ln a(P) + \beta_0 \prod_k P_k^{\beta_k} \quad (5.27)$$

Assim, a função dispêndio AIDS é a seguinte:

$$\ln D(P,U) = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln P_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma^*_{kj} \ln P_k \ln P_j + U\beta_0 \prod_k P_k^{\beta_k} \quad (5.28)$$

O procedimento-padrão é obter as funções de demanda das funções dispêndio através do Lema de Shephard[6]. Entretanto, Deaton e Muellbauer usam uma versão ligeiramente modificada do Lema de Shephard, diferenciando o logaritmo da função dispêndio do logaritmo dos preços. Essa derivação fornece as parcelas de gasto (w_i) em vez das quantidades demandadas (Q_i). Assim, a função de demanda Hicksiana da parcela de gastos é a seguinte:

---

[6] Ver capítulo 4 para a derivação deste importante resultado da Teoria da Demanda.

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j + \beta_i U \beta_0 \prod_k P_k^{\beta_k} \tag{5.29}$$

em que:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*) \tag{5.30}$$

A determinação das demandas Marshalianas se dá pela inversão da função dispêndio e pela substituição do resultado na função de demanda Hicksiana. Assim, a demanda Marshaliana a ser estimada é:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j + \beta_i \ln\left(\frac{R}{P}\right) \tag{5.31}$$

em que P é o índice de preço AIDS, definido por:

$$\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln P_k + 0{,}5 \sum_k \sum_j \gamma_{kj} \ln P_k \ln P_j \tag{5.32}$$

Empiricamente, Deaton e Muellbauer sugerem o uso do Índice de Preços de Stone em vez do Índice AIDS de forma a se obter um modelo linear nos seus parâmetros. O modelo que usa o Índice de Stone é conhecido como Linear Approximate Almost Ideal Demand System (LA/AIDS). O índice de preços de Stone pode ser calculado como:

$$\ln P^* = \sum_{j=1}^{n} w_j \ln P_j. \tag{5.33}$$

Entretanto, Moschini (1995) prova que o índice de Stone não é invariante a mudanças da unidade de medida de preços e quantidades, o que pode levar a sérios problemas de aproximação com o modelo original. Ele sugere como substitutos dos índices de Stone outros índices, como:

Índice de Stone corrigido: $\ln P^* = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\ln P_j}{\ln P_j^o}$

em que P_j^o é o preço no período-base.

Índice Log-linear de Laspeyres: $\ln P^{*} = \sum_{j=1}^{n} w_j^0 \ln P_j$

em que w_j^0 é a parcela média ou parcela no período-base.

As restrições derivadas das propriedades teóricas da demanda[7] são as seguintes:

a) Aditividade

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1; \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0; \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0 \tag{5.34}$$

b) Homogeneidade

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0 \tag{5.35}$$

c) Simetria

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}. \tag{5.36}$$

Uma outra sugestão de Deaton e Muellbauer é usar o modelo em primeira diferença, auxiliando na solução de possíveis problemas relacionados à não-estacionariedade e correlação serial. Diferenciando (5.31), tem-se:

$$dw_i = \sum_j \gamma_{ij} d \ln P_j + \beta_i (d \ln R - d \ln P) \tag{5.37}$$

Como:

$$d \ln R = \sum_{j=1}^{n} w_j d \ln P_j + \sum_{j=1}^{n} w_j d \ln Q_j = d \ln P + d \ln Q \tag{5.38}$$

[7] O significado de cada propriedade está descrito no capítulo 4.

A equação (5.37) transforma-se em:

$$dw_i = \sum_j \gamma_{ij} d \ln P_j + \beta_i d \ln Q \qquad (5.39)$$

De forma similar ao modelo Rotterdam, a expressão anterior deve ser transformada em diferenças finitas para ser estimada. Assim, a forma a ser estimada é:

$$\Delta w_{it} = \beta_i \Delta \ln Q + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \Delta \ln P_{jt} + \mu_{it} \qquad (5.40)$$

em que "$w_{it} = w_{it} - w_{i(t-1)}$", e as demais variáveis são aquelas definidas para a equação (5.24).

5.3. Exercícios resolvidos

1) Um dos primeiros sistemas de demanda a serem desenvolvidos foi o Modelo de Despesas Lineares (LES – Linear Expenditure System). Uma forma de derivar esse sistema é maximizar a função utilidade de Stone-Geary sujeita a restrição orçamentária (EALES, 1997). A função utilidade de Stone-Geary é a seguinte:

$$u = \sum_k \beta_k \ln(q_k - \gamma_k) \text{ em que } \sum_k \beta_k = 1.$$

Assim, pede-se:

a) No caso de apenas dois bens, derive a função de demanda LES.

No caso de dois bens, a função utilidade é a seguinte:

$$u = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2) \text{ com } \beta_1 + \beta_2 = 1$$

O problema da maximização sujeita a restrição orçamentária é o seguinte:

$$\underset{q_1, q_2}{Max}\ u = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2) \text{ sujeito a } \sum_{i=1}^{2} p_i q_i = x$$

Assim, o Lagrangeano é dado por:

$$L = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2) + \lambda(x - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\beta_1}{(q_1 - \gamma_1)} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \frac{\beta_1}{(q_1 - \gamma_1)} = \lambda p_1 \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta_2}{(q_2 - \gamma_2)} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \frac{\beta_2}{(q_2 - \gamma_2)} = \lambda p_2 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 q_1 + p_2 q_2 = x$$

Isolando β_1 e β_2 em (5.41) e (5.42) e somando os dois termos:

$$\beta_1 + \beta_2 = \lambda p_1 (q_1 - \gamma_1) + \lambda p_2 (q_2 - \gamma_2)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \lambda (p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2)$$

Como $\beta_1 + \beta_2 = 1$ e $p_1 q_1 + p_2 q_2 = x$, a expressão anterior fica:

$$\lambda = \frac{1}{(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i)} \quad (5.43)$$

Substituindo (5.43) em (5.41) e (5.42) e isolando q_i:

$$q_1 = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i)$$

$$q_2 = \gamma_2 + \frac{\beta_2}{p_2}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i)$$

a) Derive a função de utilidade indireta correspondente à função utilidade de Stone-Geary

Substituindo as demandas derivadas em (a) na função de utilidade Stone-Geary:

$$u = \beta_1 \ln(\gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i) - \gamma_1) + \beta_2 \ln(\gamma_2 + \frac{\beta_2}{p_2}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i) - \gamma_2)$$

$$u = \beta_1 \ln(\frac{\beta_1}{p_1}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i)) + \beta_2 \ln(\frac{\beta_2}{p_2}(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i))$$

$$u = \sum_{i=1}^{2} \beta_i \ln \beta_i - \sum_{i=1}^{2} \beta_i \ln p_i + \sum_{i=1}^{2} \beta_i \ln(x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i) \qquad (5.44)$$

Como a utilidade é ordinal, pode-se fazer a exponenciação de ambos os lados de (5.44) e definir $\beta_0 = \prod_{i=1}^{2} \beta_i^{-\beta_i}$ para obter a função de utilidade indireta:

$$\exp(u) = u^* = f(x, p) = \frac{x - \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i}{\beta_0 \prod_{i=1}^{2} p_i^{\beta_i}}$$

a) Derive a função dispêndio correspondente à função utilidade de Stone-Geary

Para derivar a função dispêndio e só inverter a função de utilidade indireta anterior, ou seja, resolver para x em termos dos preços e da utilidade:

$$x = c(p, u^*) = u^* \beta_0 \prod_{i=1}^{2} p_i^{\beta_i} + \sum_{i=1}^{2} p_i \gamma_i$$

a) Derive as funções de demanda Hicksianas correspondentes à função utilidade de Stone-Geary

Para derivar a demanda Hicksina, basta usar o lema de Shepard:

$$\frac{\partial c}{\partial p_i} = h_i(p,u) = \gamma_i + u^* \beta_0 \beta_i \prod_{k=1}^{2} \frac{p_k^{\beta_k}}{p_i} \text{ para i=1,2}$$

2) Sob que condições as demandas a seguir satisfazem as propriedades da Aditividade e Homogeneidade (EALES, 1997).

a) $p_i q_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} p_j + \beta_i x$

Para aditividade, somando a equação anterior para todo i:

$$\sum_i p_i q_i = \sum_i \alpha_i + \sum_j (p_j \sum_i \gamma_{ij}) + x \sum_i \beta_i$$

Sabe-se que $\sum_i p_i q_i = x$. Assim, para que o lado esquerdo da equação anterior seja igual ao lado direito para quaisquer preços e quantidades, é necessário que:

$$\sum_i \alpha_i = 0, \sum_i \gamma_{ij} = 0 \text{ e } \sum_i \beta_i = 1$$

Para Homogeneidade, variações iguais de preços e quantidades devem deixar a quantidade demandada inalterada, ou seja, $g_i(\theta p, \theta x) = g_i(p, x)$. Assim:

$\theta p_i q_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \theta p_j + \beta_i \theta x$ deve ser igual a

$$p_i q_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} p_j + \beta_i x$$

Isolando θ anterior, tem-se:

$$\theta p_i q_i = \alpha_i + \theta \sum_j \gamma_{ij} p_j + \theta \beta_i x$$

Fazendo $\alpha_i = 0$, a equação anterior fica:

$\theta p_i q_i = \theta \sum_j \gamma_{ij} p_j + \theta \beta_i x$ e cancelando θ, $p_i q_i = \sum_j \gamma_{ij} p_j + \beta_i x$.

Assim, a condição para homogeneidade é dada por $\alpha_i = 0$.

b) $p_i q_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$

Para aditividade, somando a equação anterior para todo i:

$$\sum_i p_i q_i = \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i x + \sum_i \gamma_i x^2$$

Sabe-se que $\sum_i p_i q_i = x$. Assim, para que o lado esquerdo da equação anterior seja igual ao lado direito para quaisquer preços e quantidades, é necessário que:

$\sum_i \alpha_i = 0$, $\sum_i \beta_i = 1$ e $\sum_i \gamma_i = 0$

Para Homogeneidade, variações iguais de preços e quantidades devem deixar a quantidade demandada inalterada, ou seja, $g_i(\theta p, \theta x) = g_i(p, x)$. Dessa forma:

$\theta p_i q_i = \alpha_i + \beta_i \theta x + \gamma_i (\theta x)^2$ deve ser igual a

Isolando anterior, tem-se:

$\theta p_i q_i = \alpha_i + \theta \beta_i x + \theta^2 \gamma_i x^2$

Fazendo $\alpha_i = 0$ e $\gamma_i = 0$, a equação anterior fica:

$\theta p_i q_i = \theta \beta_i x$ e, cancelando θ, $p_i q_i = \beta_i x$

Assim, a condição para homogeneidade é dada por $\alpha_i = 0$ e $\gamma_i = 0$.

5.4. Exercícios propostos

1) Suponha um conjunto composto por dois bens (1 e 2). A parcela da despesa gasta com cada um é: $w_1 = w_2 = 0{,}5$. Ache as elasticidades não conhecidas da seguinte matriz de demanda (mostre qual é o procedimento usado):

$$\begin{vmatrix} -2 & ? & 1 \\ ? & ? & ? \end{vmatrix}$$

2) Suponha um conjunto de mercadorias composto por n bens. Conhecem-se os seguintes dados dos bens i e j: $w_i=0{,}1$; $w_j=0{,}25$; elasticidades renda $\varepsilon_{iy}=0{,}5$ e $\varepsilon_{jy}=1$; e elasticidade cruzada $\varepsilon_{ij}=-1$. Calcule ε_{ji} (mostre qual procedimento foi usado).

3) Dada a seguinte função dispêndio $c(u,p) = 4p_1^{\frac{1}{4}}p_2^{\frac{3}{4}}u^{\frac{1}{2}}$, *derive:*

a) A função de demanda Hicksiana ou compensada.
b) A função de utilidade indireta.
c) A função de demanda Marshaliana ou não-compensada.

4) Sob que condições a demanda a seguir satisfaz as propriedades da Aditividade e Homogeneidade:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln x$$

5) A concavidade da função dispêndio garante a chamada negatividade das funções de demanda e, assim, a "lei da demanda" para as demandas Hicksianas. Matematicamente, a concavidade é observada quando, dados dois vetores de preços quaisquer, p^1 e p^2 e o escalar λ, $0<\lambda<1$, e um terceiro vetor de preços, p^3, $p^3=\lambda p^1+(1-\lambda)p^2$:

$$c(u,p^3) \geq \lambda c(u,p^1) + (1-\lambda)c(u,p^2)$$

Prove que a função dispêndio é côncava e que a única hipótese necessária para garantir a concavidade é a minimização dos gastos.

6) Mostre por que a propriedade da negatividade não pode ser imposta no modelo AIDS apenas com a restrição sobre os parâmetros do modelo.

5.5. Referências

ALSTON, J.M.; CHALFANT, J.A. The silence of the lambdas: a test of the almost ideal and Rotterdam models. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 75, p. 304-313, May 1993.

BARTEN, A.P. Consumer demand functions under conditions of almost additive preferences. **Econometrica**, v. 32, p. 1-38, Jan. 1964.

BARTEN A.P. Consumer allocation models: choice of functional forms. Empirical **Economics**, v. 18, p. 129-158, 1993.

DEATON, A.; MUELLBAUER, J. An almost ideal demand system. **The American Economic Review**, v. 70, p. 312-326, June 1980a.

DEATON, A.; MUELLBAUER, J. **Economics and consumer behavior.** New York: Cambridge University Press, 1980b.

EALES, J. **AGEC 605 Agricultural price analysis**: lecture notes. Purdue: Department of Agricultural Economics, Purdue University, 1997.

GOLDMAN, S.M.; UZAWA, H. A note on separability in demand analysis. **Econometrica**, v. 32, p. 387-398, 1964.

HICKS, J.R. **Value and capital**. Oxford: Oxford University Press, 1936.

LEONTIEF, W. Composite commodities and the problem of index numbers. **Econometrica**, v. 4, p. 39-59, 1936.

LEWBEL, A. Aggregation without separability: a generalized composite commodity theorem. **The American Economic Review**, v. 86, p. 524-543, June 1996.

MOSCHINI, G. Units of measurement and the stone index in demand system estimation. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 77, p. 63-68, Feb. 1995.

STONE, R. Linear expenditure system and demand analysis: an application to the pattern of British demand. **The Economic Journal**, v. 64, p. 511-527, 1954.

THEIL, H. The information approach to demand analysis. **Econometrica**, v. 33, p. 67-87, 1965.

Capítulo 6

Risco e incerteza

Joelsio José Lazzarotto[1]
Thiago de Melo Teixeira da Costa[2]
Maurinho Luiz dos Santos[3]

6.1. Introdução

Muitas das decisões econômicas são tomadas em ambientes caracterizados por amplo número de incertezas com relação aos possíveis resultados decorrentes da implementação dessas decisões. Assim, para efetuar escolhas diante de determinadas opções, os agentes econômicos deparam-se com alguns questionamentos principais: 1) Diante dos objetivos a serem atingidos, quais são as principais alternativas disponíveis? 2) Quais as chances de sucesso associadas com cada uma das possíveis escolhas? 3) Quais os principais riscos, no curto, médio e longo prazos, vinculados às potenciais alternativas? e 4) Qual a disposição em assumir certos riscos?

A partir dessas quatro questões, verifica-se que, antes da implementação efetiva de certas decisões econômicas, é fundamental identificar os principais benefícios e riscos a elas associados. Com base nessa identificação, podem ser adotadas algumas estratégias no sentido de minimizar riscos de insucesso. Dentre essas estratégias, destacam-se, por exemplo, a realização de contratos, a aquisição de seguros e a diversificação de investimentos.

[1] Pesquisador da EMBRAPA e doutorando em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV. e-mail: joelsio@cnpso.embrapa.br.
[2] Professor do Departamento de Administração da UFV e doutorando em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV. e-mail: thiagocosta@ufv.br.
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

Partindo dessas considerações iniciais, foi desenvolvido este capítulo, em que são abordados relevantes aspectos teóricos e práticos acerca do processo de tomada de decisões em condições de incerteza. Em termos teóricos, são discutidos aspectos relacionados, entre outras coisas, com a função de utilidade esperada e as preferências dos agentes econômicos frente aos riscos. Quanto à parte prática, são abordadas questões envolvendo, sobretudo, medidas e mecanismos, respectivamente, para avaliar e administrar riscos.

6.2. Escolha sob condições de incerteza

Nesta seção, são abordados diversos aspectos teóricos acerca da escolha sob condições de incerteza. Esses aspectos estão enquadrados em sete pontos principais: considerações sobre os termos incerteza e risco; a teoria da utilidade em condições de incerteza; os axiomas da teoria da utilidade esperada; as preferências dos agentes econômicos diante do risco; as medidas de aversão ao risco relacionadas com os coeficientes de Arrow-Pratt; a demanda de seguro; e o Paradoxo de Allais.

6.2.1. Incerteza e risco

A introdução da incerteza nas decisões econômicas aumenta substancialmente a quantidade de variáveis que devem ser conhecidas e analisadas antes de serem tomadas e implementadas decisões referentes, por exemplo, a uma cesta de bens de consumo ou um vetor de produção. Contudo, antes de proceder a discussões específicas referentes ao processo decisório em condições de incerteza, é importante efetuar alguns comentários acerca dos significados dos termos incerteza e risco.

Enquanto o risco corresponde a situações em que a aleatoriedade de resultados pode ser expressa objetivamente em termos de probabilidade, a incerteza refere-se a eventos em que os agentes econômicos não conseguem associar, de forma objetiva, valores de probabilidade. Nessa linha, Varian (2003) destaca que o conceito de risco representa uma medida dos possíveis eventos incertos. Ao contrário da incerteza, a medição do risco é objetiva e utiliza ferramentas probabilísticas e estatísticas.

Portanto, de maneira geral, pode-se dizer que a principal distinção

entre incerteza e risco está associada com a possibilidade de se mensurar ou não a ocorrência futura de determinados eventos aleatórios. Assim, toda vez que for possível quantificar à situação de incerteza por meio de uma distribuição de probabilidades dos resultados previstos, diz-se que a decisão está sendo tomada sob uma situação de risco (ASSAF NETO, 2003).

Apesar de os termos incerteza e risco terem conceitos um tanto distintos, nas próximas seções deste capítulo eles serão usados como sinônimos, uma vez que estarão sendo associados com medidas probabilísticas.

6.2.2. A teoria da utilidade em condições de incerteza

Em certas situações que envolvem decisões econômicas, pode-se trabalhar sob a perspectiva de certeza em relação à ocorrência de determinados resultados. No entanto, em muitos casos relacionados, por exemplo, com loterias, seguros e investimentos, a incerteza constitui aspecto fundamental a ser considerado nas referidas decisões. Nesses casos, deve-se estabelecer um plano de consumo contingente, que representa o consumo em cada possível estado de natureza[4] e as probabilidades associadas com esses estados. Portanto, em situações em que vários resultados distintos podem ocorrer, o conjunto de escolhas será constituído por distribuições de probabilidades sobre esses resultados.

Para desenvolver estudos acerca de escolhas sob condições de incerteza, em geral, utiliza-se o conceito de utilidade, tratado na teoria do consumidor, que é uma medida de bem-estar ou satisfação obtida com o consumo de diferentes cestas de bens e serviços. Assim, a utilidade pode ser vista como a representação, por meio de funções matemáticas, das preferências das pessoas. As funções de utilidade possibilitam avaliar a satisfação dos indivíduos diante de diversas possibilidades de consumo, que podem envolver ganhos ou perdas, ou seja, os agentes econômicos,

[4] Estados de natureza correspondem a diferentes resultados associados com um evento aleatório (por exemplo, em determinada aposta, o jogador pode perder ou ganhar, sendo esses, portanto, dois estados) (VARIAN, 2003).

diante de alternativas arriscadas, podem expressar suas preferências em termos da utilidade associada com os possíveis resultados e suas probabilidades de ocorrência (COIMBRA-LISBOA, 2005).

É importante destacar que existem distinções referentes às funções de utilidade em ambientes de certeza e incerteza. Enquanto em um ambiente de certeza a função de utilidade está muito mais associada com uma função de valor, em um ambiente de incerteza vincula-se à noção de apostas (ou loterias). A escolha sob incertezas mexe com o comportamento dos agentes econômicos, que podem ser mais ou menos propensos a aceitar certas probabilidades de ganhos e, ou, perdas.

Para entender como as pessoas tomam decisões em contextos de incerteza, há necessidade de compreender, também, as noções gerais de loterias simples e composta. Loteria simples (ou plano contingente) corresponde a um conjunto finito de possíveis resultados: $L\{(x_1,\pi_1),(x_2,\pi_2),\cdots,(x_n,\pi_n)\}$, em que $\sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1$ e $0 \leq \pi_i \leq 1$; nesse caso, o resultado x_i ocorre com uma probabilidade π_i. Loteria composta (ou loteria de loterias) é uma loteria cujos prêmios são outras loterias (por exemplo, se no lançamento de uma moeda o resultado for cara, então o indivíduo participará da loteria simples L_1, caso contrário participará da loteria L_2): $L'\{(L_1,\lambda),(L_2,(1-\lambda))\}$, em que λ é a probabilidade de escolha de L_1 e $(1-\lambda)$ a probabilidade de escolha de L_2 (COIMBRA-LISBOA, 2005).

Para ilustrar a influência da incerteza sobre as decisões econômicas, pode-se utilizar um exemplo com três apostas simples, que envolvem resultados associados com o lançamento de uma moeda (Tabela 6.1). Embora nas três apostas cada um dos possíveis resultados (cara ou coroa) tenha 50% de probabilidade de ocorrer, poderá haver diferentes atratividades, por parte dos jogadores, em relação a participar de cada uma das apostas. Possivelmente, a opção *A* será a preferida pela maioria, visto que, além de envolver as menores quantias em dinheiro, em caso de

acerto, o valor recebido pelo jogador é 50 vezes maior que aquele em caso de perda. Por outro lado, a aposta *C*, em relação a *B*, será rejeitada por grande parte dos jogadores, pois o valor das possíveis perdas é muito alto, envolvendo, também, uma grande probabilidade de ocorrência.

Tabela 6.1 - Apostas e resultados hipotéticos associados com o lançamento de uma moeda

Apostas	Resultado	
	Cara	**Coroa**
A	Ganha R$100,0	Perde R$2,0
B	Ganha R$200,0	Perde R$100,0
C	Ganha R$20.000,0	Perde R$10.000,0

Com base nos dados apresentados na Tabela 6.1, pode-se obter, ainda, o valor esperado (*VE*) de cada uma das apostas. Essa medida constitui um peso médio de todos os *n* possíveis resultados (x_i), em que os pesos representam as probabilidades associadas:

$$VE = \sum_{i-1}^{n} \pi_i x_i \tag{6.1}$$

Empregando a expressão (6.1) sobre as apostas destacadas na Tabela 6.1, obtém-se:

$$VE_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)\times(100)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\times(-2) = R\$49{,}00$$

$$VE_2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)\times(200)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\times(-100) = R\$50{,}00$$

$$VE_3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)\times(20.000)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\times(-10.000) = R\$5.000{,}00$$

A partir dos resultados anteriores, poderia se supor que, quanto maior o *VE*, mais atrativa seria uma determinada aposta. Entretanto, dos três casos analisados, embora o VE_3 apresente um valor positivo muito

superior aos demais, essa aposta provavelmente será a menos atrativa, devido à possibilidade de grandes perdas. Dentro dessa linha de pensamento, na teoria econômica tem-se inserida, em termos formais, a teoria da utilidade esperada (*UE*), que é amplamente utilizada para modelar o comportamento dos agentes econômicos, podendo ser considerada, segundo Cusinato (2003), o *core* da teoria econômica sob incerteza.

A teoria da *UE*, cujos fundamentos iniciaram-se, sobretudo, com os estudos de Daniel Bernoulli e consolidaram-se com os trabalhos de John Von Neumann e Oskar Morgenstern na formulação da teoria dos jogos, tem como premissa central que os agentes econômicos, em vez de considerarem a opção que gera o maior *VE*, escolhem a opção que possibilita maximizar a *UE*. Nesse caso, a utilidade pode ser escrita como uma soma ponderada de alguma função de consumo em cada estado de natureza, $u(x_i)$, em que os pesos são as probabilidades π_i. A função de *UE* é, portanto, uma representação da relação de preferências entre bens contingentes por meio dos valores esperados das suas utilidades.

Genericamente, a *UE* pode ser representada pela seguinte expressão:

$$UE = \sum_{i-1}^{n} \pi_i u(x_i) \tag{6.2}$$

em que π_i indica a probabilidade de ocorrência de um determinado resultado; u o a função de utilidade relacionada com cada estado de natureza; e x_i é o resultado associado com π_i.

Considerando o caso de uma aposta envolvendo dois possíveis resultados, a *UE*, de acordo com Frank (1991), poderia ser escrita como:

$$UE = \pi u(W_0 + Ganho) + (1-\pi)u(W_0 - Perda) \tag{6.3}$$

em que W_0 é a riqueza inicial; u é a função de utilidade; e *Ganho* e *Perda* correspondem, respectivamente, ao aumento e à diminuição na riqueza no caso de o jogador vencer ou perder a aposta, com probabilidades π e $(1-\pi)$.

6.2.3. Axiomas da teoria da utilidade esperada

Uma função de utilidade tem a forma de *UE* se e somente se for linear nas probabilidades. Além disso, a teoria da *UE* será válida apenas se a relação de preferências dos agentes econômicos, considerando o contexto de escolhas, satisfizer alguns axiomas principais. Considerando *X* um conjunto finito de escolhas e $\geq$[5] uma relação de preferências sobre essas possíveis escolhas, têm-se seis axiomas:

a) As preferências devem ser completas e consistentes – nesse caso, os agentes podem, diante de diferentes opções, identificar as que mais lhe satisfazem. Isso implica que $\forall x, y \in X$, $x \geq y$ ou $y \geq x$.

b) As preferências devem ser transitivas - se uma pessoa escolhe x ao invés de y e prefere y a z, então x também será preferido a z; em outras palavras, se $\forall x, y, z \in X$, $x \geq y$ e $y \geq z$, então $x \geq z$.

c) Cada loteria composta é equivalente à uma loteria simples com a mesma distribuição sobre os resultados finais.

d) As preferências devem atender a propriedade de monotonicidade - assumindo que a loteria L_1 é preferida à loteria L_2, então a loteria composta $\{(L_1, \alpha), (L_2, (1-\alpha))\}$ é preferível à $\{(L_1, \beta), (L_2, (1-\beta))\}$ se $\alpha > \beta$ (α e β correspondem a probabilidades).

e) As preferências devem ser contínuas - esse axioma diz que, diante de loterias simples, em que $L_1 \geq L_2 \geq L_3$, existe determinado nível de probabilidade $(0 \leq p \leq 1)$ tal que o agente econômico é indiferente entre L_2 e uma loteria composta (formada a partir de L_1 e L_3), com probabilidades, respectivamente, de *p* e (1-*p*).

f) As preferências devem ser independentes - considerando o caso de três loterias, se o agente econômico prefere a loteria L_1 à loteria L_2,

[5] A expressão $x \geq y$ deve ser interpretada como *x é pelo menos tão bom quanto y*.

então qualquer combinação destas duas loterias com qualquer outra (L_3) irá preservar esse ordenamento, isto é: $\{(L_1,\pi),(L_3,(1-\pi))\} \geq \{(L_2,\pi),(L_3,(1-\pi))\}$ (BINGER; HOFFMAN, 1998; CUSINATO, 2003; COIMBRA-LISBOA, 2005).

Na escolha sob condições de incerteza, existe um tipo natural de independência entre os diferentes resultados, pois eles devem ser consumidos em diferentes estados de natureza. As escolhas que as pessoas planejam fazer em um estado deveriam independer das escolhas que desejam fazer nos outros estados de natureza. Essa hipótese, conhecida como hipótese da independência, implica que a função de utilidade para consumo contingente deverá ter uma estrutura muito especial: ela deverá ser aditiva nas diferentes cestas de consumo contingente. Segundo Varian (2003), se c_1, c_2 e c_3 são os consumos em diferentes estados de natureza e π_1, π_2 e π_3 as probabilidades de que esses três diferentes estados de natureza se materializem, a função de utilidade deverá adotar a seguinte forma: $u(c_1,c_2,c_3)=\pi_1 u(c_1)+\pi_2 u(c_2)+\pi_3 u(c_3)$, que corresponde à função de *UE*. Nessa função, a taxa marginal de substituição (TMS[6]) entre dois bens independe da quantidade do terceiro bem. A TMS de substituição entre os bens 1 e 2, por exemplo, depende apenas das quantidades que o indivíduo possui dos bens 1 e 2:

$$TMS_{12} = \frac{\Delta u(c_1,c_2,c_3)/\Delta c_1}{\Delta u(c_1,c_2,c_3)/\Delta c_2} = \frac{\pi_1 \Delta u(c_1)/\Delta c_1}{\pi_2 \Delta u(c_2)/\Delta c_2} \qquad (6.4)$$

[6] TMS mede a taxa exata com que o consumidor está disposto a substituir um bem por outro.

6.2.4. *Preferências relacionadas com o risco*

Ao se discutir a tomada de decisão sob condições de incerteza, deve-se dispensar atenção especial às preferências dos agentes econômicos frente aos possíveis riscos associados com suas escolhas. Nesse contexto, os tomadores de decisão podem ser classificados em três tipos básicos: *avessos, propensos e neutros ao risco.*

Para a maioria das pessoas, assume-se que a utilidade pode ser representada por uma função côncava, $u(x)$, conforme ilustrado na Figura 6.1. Nesse caso, a utilidade inicial, $u(E(x))$, indicada pelo ponto *C*, será rejeitada apenas quando o valor da *UE* for maior. Esse tipo de função, que exibe uma utilidade marginal decrescente para o bem analisado[7], é típico de pessoas com aversão ao risco, indicando que acréscimos do bem propiciarão aumentos cada vez menores na satisfação do indivíduo.

Considerando x uma variável aleatória que pode assumir dois valores, x_1 e x_2, com probabilidades de ocorrência, respectivamente, de π e $(1-\pi)$, o valor esperado, obtido a partir de uma função de utilidade elementar (ou função de Bernoulli) côncava, $u(x)$, representando uma combinação convexa de x_1 e x_2, será dado por $\{E(x) = \pi x_1 + (1-\pi)x_2\}$, que gera uma utilidade igual a $u(E(x))$. Por outro lado, a utilidade esperada, associada com essa função, será dada por $\{UE(u) = \pi u(x_1) + (1-\pi)u(x_2)\}$, que corresponde ao ponto *D* da Figura 6.1. Pode-se observar que, ao serem comparados os pontos *C* e *D*, a concavidade da função de utilidade elementar implica que a utilidade associada com o valor esperado, $u(E(x))$, é maior do que a utilidade esperada, $UE(u)$, isto é, $[\pi x_1 + (1-\pi)x_2 > \pi u(x_1) + (1-\pi)u(x_2)]$. Com relação aos pontos *A* e *B*, eles constituem os pontos, localizados

[7] A utilidade marginal é simplesmente a inclinação da função de utilidade.

sobre a função de utilidade, que representam, respectivamente, as situações associadas com perdas e ganhos em decorrência de o indivíduo participar de uma loteria arriscada.

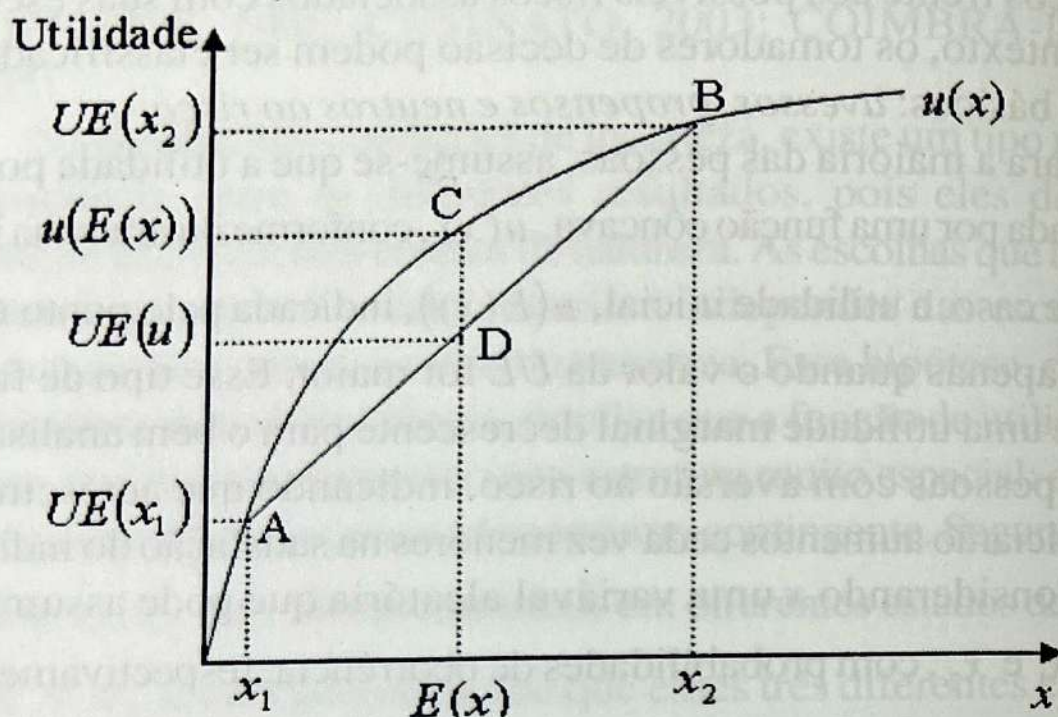



Figura 6.1 - Função de utilidade de um agente econômico avesso ao risco

Para facilitar a compreensão acerca do comportamento de um agente econômico avesso ao risco, ainda com base na Figura 6.1, pode-se supor que o indivíduo tenha a opção de participar de duas loterias: uma que paga $E(x)$, com certeza, e outra que paga x_1 ou x_2, com probabilidades, respectivamente, de π e $(1-\pi)$. A utilidade esperada da primeira loteria será $UE(E(x)) = u(E(x))$, pois é recebido com certeza. Para a segunda loteria, observa-se que $UE(x_1, x_1, \pi, 1-\pi) = \pi u(x_1) + (1-\pi)u(x_2)$. Embora as duas loterias forneçam o mesmo valor esperado para x, um agente avesso ao risco preferirá receber $E(x)$ com certeza do que com risco, ou seja, irá pre-

ferir a primeira loteria à segunda. Portanto, na perspectiva de um agente econômico avesso ao risco, o valor da utilidade esperada entre apostar em A (diminuir a riqueza) ou em B (aumentar a riqueza) é D, que é menor do que a segurança de obter C sem apostar; assim, C será preferido a D.

Além da ilustração gráfica, pode-se utilizar um simples exemplo numérico que envolve aversão ao risco. Para isso, considere uma loteria relacionada com o lançamento de uma moeda: se o resultado for cara, o indivíduo ganha R$ 30,00, caso contrário, perde R$ 30,00; a probabilidade de ocorrência de cada resultado é de 50%; a riqueza inicial (W_0) é de R$ 40,00; e a função de utilidade é dada por $u(W)=\sqrt{W}$. Caso o indivíduo aceitasse ou rejeitasse participar dessa loteria, seriam obtidos os seguintes resultados em termos de UE:

$$UE_{aceitar} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\times\left(\sqrt{40+30}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\times\left(\sqrt{40-30}\right)=5{,}76$$

$$UE_{rejeitar} = \sqrt{40} = 6{,}32$$

Pelos resultados deste exemplo numérico, e considerando a teoria da UE, o indivíduo rejeitaria participar da aposta, pois $UE_{aceitar} < UE_{rejeitar}$.

Embora a maioria dos agentes econômicos seja avessa ao risco, existem aqueles que são mais propensos a aceitar situações mais arriscadas. Nesse caso, dentro do contexto da UE, a função de utilidade para um determinado bem torna-se convexa (Figura 6.2), havendo, assim, uma utilidade marginal crescente, ou seja, acréscimos no consumo do bem propiciarão aumentos cada vezes maiores na satisfação do indivíduo.

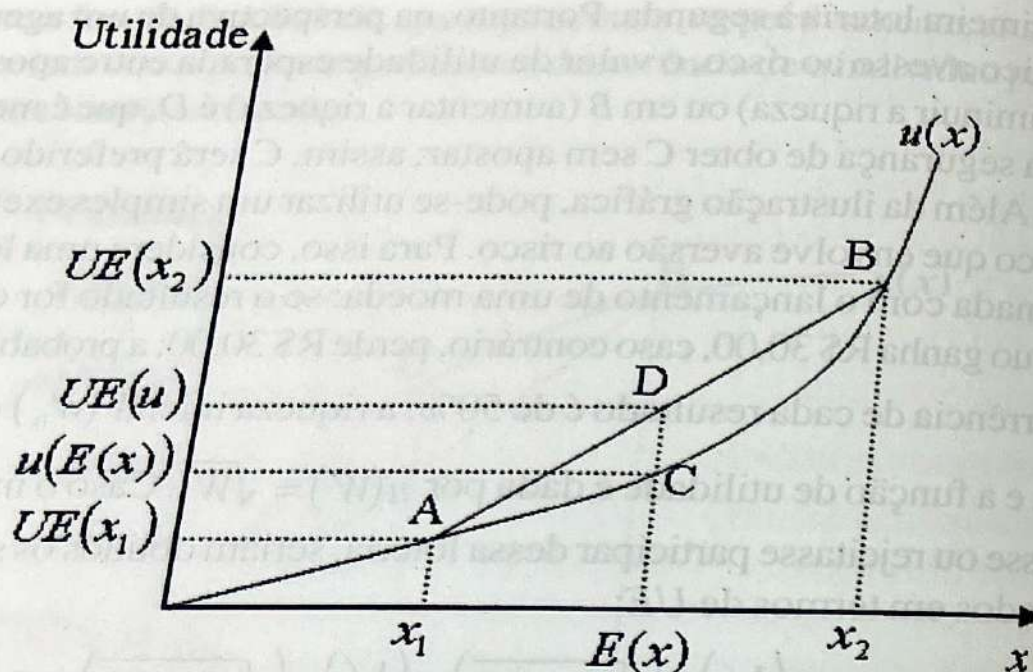



Figura 6.2 - Função de utilidade de um agente econômico propenso ao risco

Considerando a situação apresentada na Figura 6.2, na perspectiva de um agente econômico propenso ao risco, o valor da utilidade esperada ntre apostar em *A* (diminuir a riqueza) ou em *B* (aumentar a riqueza) é *D* $[UE(u)]$, que é maior do que a segurança de obter *C* $[u(E(x))]$ sem postar; assim, *D* será preferido a *C*, ou seja, a *UE* obtida com a ticipação em uma aposta excederá a utilidade de rejeitar a participação posta.

Por fim, um indivíduo que é indiferente entre aceitar ou rejeitar a cipação em uma loteria é classificado como neutro ao risco. Nesse como a função de utilidade é linear, a *UE* de uma loteria é exatamente à utilidade do valor esperado de não participar do jogo. Com relação lade marginal, esta permanece constante, independentemente de tar ou diminuir o consumo do bem (Figura 6.3).

De maneira sintética, podem-se destacar os pontos principais a relação entre as atitudes frente ao risco e o formato das funções de de Bernoulli (*u*):

- *aversão ao risco*: $\forall x$, $u''(x) \leq 0$ e função u côncava, caracterizando a ocorrência de utilidade marginal decrescente;
- *propensão* ao risco: $\forall x$, $u''(x) \geq 0$ e função u convexa, que leva à utilidade marginal crescente; e

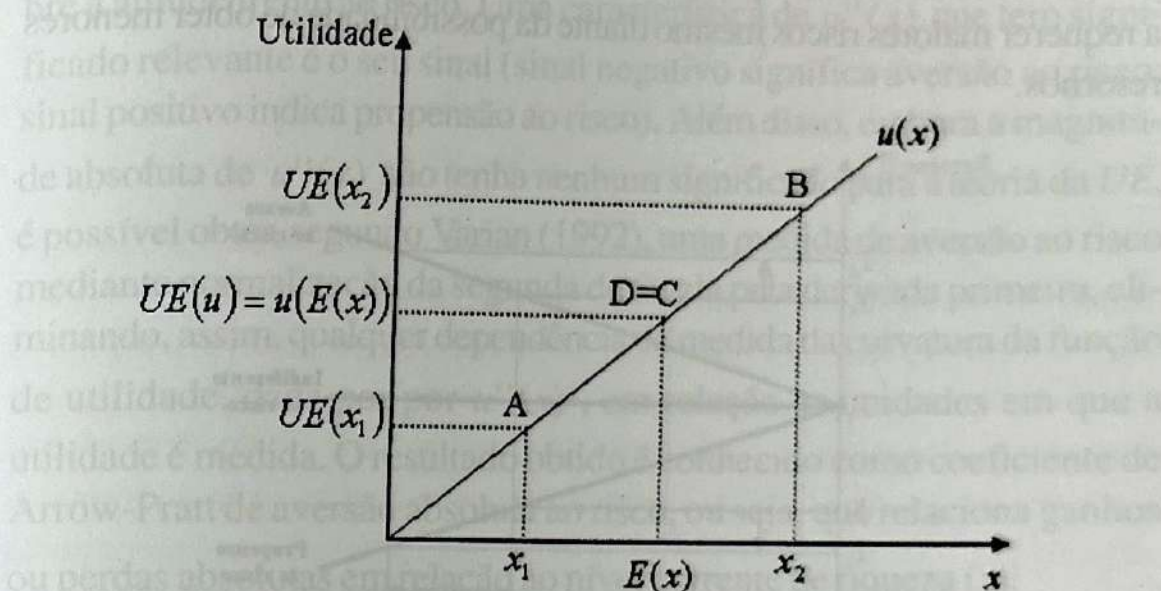



Figura 6.3 - Função de utilidade de um agente econômico indiferente ao risco

- *neutralidade ao risco*: $\forall x$, $u''(x) = 0$ e função u linear, tornando constante a utilidade marginal.

Com base nas preferências relacionadas com o risco, pode-se, ainda, a partir da Figura 6.4, efetuar algumas considerações adicionais envolvendo o *trade-off* entre riscos e retornos:

- para um indivíduo *indiferente ao risco*, o retorno exigido não varia quando o nível de risco vai de X_1 para X_2, ou seja, o retorno exigido permanece constante em Y_3;
- para um indivíduo *avesso ao risco*, o retorno exigido aumenta quando o risco se eleva. Nesse caso, quando o risco passa de X_1 para X_2, o retorno exigido, visando compensar uma possibilidade de perda maior,

eleva-se de Y_4 para Y_5; e

- para um indivíduo *propenso ao risco*, um aumento no risco (X_1 para X_2) ocasiona redução no nível de retorno exigido (Y_2 para Y_1) . Isso é justificado com o fato de que indivíduos com esse comportamento tendem a requerer maiores riscos mesmo diante da possibilidade de obter menores retornos.

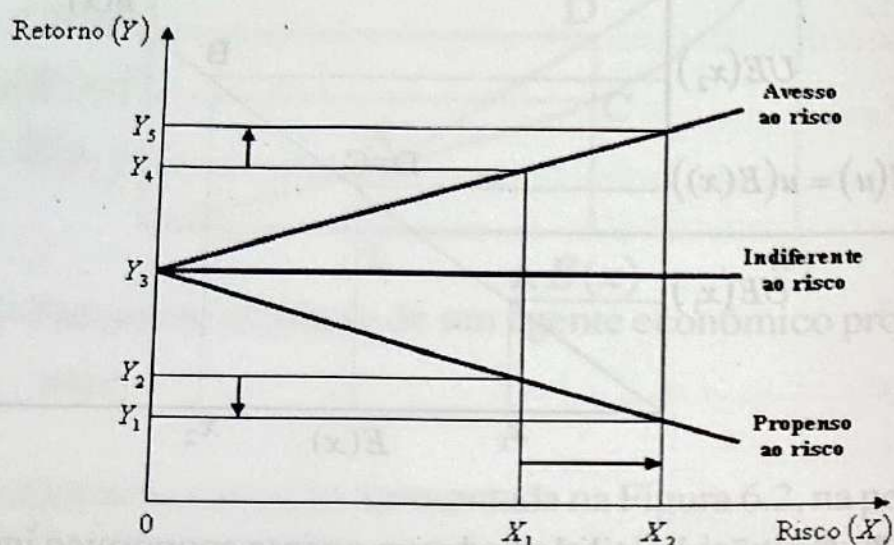



Figura 6.4 - Preferências em relação ao risco

Fonte: Adaptado a partir de Gitman (2004).

6.2.5. Medidas de aversão ao risco

Na prática, a maioria dos agentes econômicos é avessa ao risco. No entanto, o grau de aversão ao risco tende a ser bastante variável entre os diferentes agentes. Diante disso, devem-se empregar medidas que possibilitem avaliar essa variabilidade. Para isso, em um primeiro momento, poderia parecer adequado medir a curvatura da função de utilidade u por meio da sua segunda derivada (u''), pois, quanto mais côncava a função, mais avesso ao risco seria o indivíduo. Contudo, a segunda derivada, de acordo com Varian (1992), não é uma medida apropriada pelo fato de não ser invariante a modificações na função de utilidade esperada: caso

essa função seja multiplicada por 2, o comportamento do consumidor não muda, mas a medida em questão sofre mudanças.

Apesar de a segunda derivada, quando considerada isoladamente, ser pouco útil para medir o grau de aversão ao risco, essa ordem de diferenciação da função de utilidade fornece informações importantes sobre a atitude frente ao risco. Uma característica de $u''(x)$ que tem significado relevante é o seu sinal (sinal negativo significa aversão ao risco; sinal positivo indica propensão ao risco). Além disso, embora a magnitude absoluta de $u''(x)$ não tenha nenhum significado para a teoria da *UE*, é possível obter, segundo Varian (1992), uma medida de aversão ao risco mediante normalização da segunda derivada pela derivada primeira, eliminando, assim, qualquer dependência da medida da curvatura da função de utilidade, dada por por $u''(x)$, em relação às unidades em que a utilidade é medida. O resultado obtido é conhecido como coeficiente de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco, ou seja, que relaciona ganhos ou perdas absolutas em relação ao nível corrente de riqueza (x):

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{6.5}$$

Para justificar o uso da expressão (6.5), tomando como base as discussões em Varian (1992), pode-se utilizar uma loteria que apresenta dois resultados possíveis, x_1 e x_2, com probabilidades de ocorrência, respectivamente, de p_1 e p_2. Se u (função de utilidade de Bernoulli) é contínua e estritamente crescente, então $x_2(x_1)$ deve satisfazer a identidade (6.6), que representa a curva de loterias indiferentes para uma dada riqueza inicial x. Note que a identidade requer que $x_2(x_1)$ seja o valor que mantenha constante o nível de utilidade esperada na medida em que x_1 varia.

$$u(x) = p_1 u(x + x_1) + p_2 u[x + x_2(x_1)] \tag{6.6}$$

Diferenciando a identidade (6.6) com respeito a x_1 e avaliando-a em $x_1 = 0$, obtém-se a inclinação (expressão 6.7) da fronteira do conjunto de aceitação (FCA) de um indivíduo[8]. A FCA constitui a curva de loterias indiferentes e pode ser dada pela função implícita $x_2(x_1)$ (Figura 6.5).

$$p_1 u'(x + x_1) + p_2 u'[x + x_2(x_1)]x_2'(x_1) = 0$$

$$p_1 u'(x) + p_2 u'(x) x_2'(0) = 0$$

$$x_2'(0) = -\frac{p_1}{p_2} \tag{6.7}$$

Supondo, ainda, que existam dois tomadores de decisão, que se deparam com probabilidades idênticas para os dois resultados possíveis. Nesse caso, a partir da Figura 6.5, é natural afirmar que, para um dado nível de riqueza *x*, o tomador de decisão 1 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 2. Isso se justifica, pois o conjunto de aceitação do tomador de decisão 1 está contido no conjunto de aceitação do tomador de decisão 2, ou seja, este tomador de decisão aceitará qualquer aposta que o tomador de decisão 1 aceita.

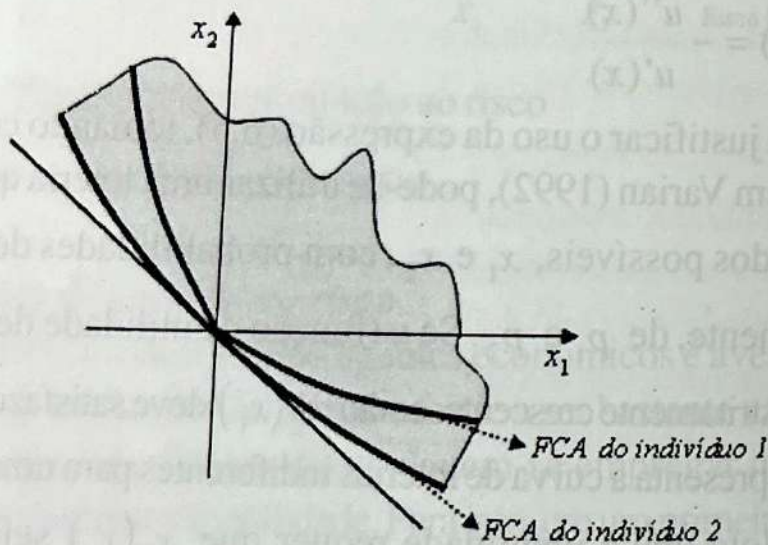



Figura 6.5 - Comparação de aversão ao risco por meio do conjunto de aceitação

Fonte: Adaptado a partir de Varian (1992).

[8] O conjunto de aceitação corresponde ao conjunto de todas as loterias que um indivíduo aceitaria em um dado nível de riqueza *x*.

Diferenciando agora a expressão (6.7) com respeito a x_1 e avaliando a derivação resultante em $x_1 = 0$, pode-se obter a curvatura do conjunto de aceitação na vizinhança de (0,0), notando-se que $x_2(x_1) = 0$ quando $x_1 = 0$:

$$p_1 u''(x + x_1) + p_2 u''[x + x_2(x_1)]x_2'(x_1)^2 + p_2 u'[x + x_2(x_1)]x_2''(x_1) = 0$$
$$p_1 u''(x) + p_2 u''(x)x_2'(0)^2 + p_2 u'(x)x_2''(0) = 0 \qquad (6.8)$$

Ao substituir o resultado final da expressão (6.7) em (6.8), obtém-se:

$$p_1 u''(x) + p_2 u''(x)\left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right) + p_2 u'(x)x_2''(0) = 0$$

$$p_2 u'(x)x_2''(0) = -p_1 u''(x) - p_2 u''(x)\left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right)$$

$$p_2 u'(x)x_2''(0) = -u''(x)\left(p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}\right)$$

$$(6.9)$$

Como $p_2 = (1 - p_1)$, tem-se:

$$p_2 u'(x)x_2''(0) = \left(\frac{p_1 - p_1^2 + p_1^2}{p_2}\right)[-u''(x)]$$

$$x_2''(0) = \frac{p_1}{p_2^2}\left[-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right] \qquad (6.10)$$

Com base em (6.10), é possível perceber que a curvatura do conjunto de aceitação é proporcional à medida de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco. Isso porque, fazendo $\beta = \frac{p_1}{p_2^2}$, que é uma constante,

obtém-se a seguinte expressão:

$$x_2''(0) = \beta A(x) \tag{6.11}$$

Outro aspecto importante relacionado com a medida em questão diz respeito à forma com que o grau de aversão ao risco varia frente a variações na riqueza (x). Se a derivada do coeficiente de $A(x)$ for negativa, positiva ou igual a zero, diz-se que o indivíduo, diante do aumento da riqueza, por exemplo, tem aversão absoluta ao risco, respectivamente, decrescente, crescente e constante.

Além de medir o grau de aversão absoluta ao risco, pode-se determinar esse grau em termos relativos (em valores percentuais) ao nível corrente de riqueza. Desse modo, ao participar de uma loteria, o valor que o indivíduo poderá ganhar ou perder, em termos absolutos, dependerá de seu nível de riqueza inicial, pois a aposta é feita em termos relativos a essa riqueza. Para isso, a partir de uma função de utilidade u, que seja duas vezes diferenciável, côncava e estritamente crescente, pode-se obter o coeficiente de Arrow-Pratt de aversão relativa ao risco, que é igual à medida de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco multiplicada pelo nível de riqueza x:

$$R(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{6.12}$$

Do mesmo modo que discutido para a diferenciação do coeficiente $A(x)$, é possível avaliar como varia o risco relativo frente a variações na riqueza (x). Se a derivada do coeficiente $R(x)$ for negativa, positiva ou igual a zero, diz-se que o indivíduo, diante do aumento da riqueza, por exemplo, tem aversão relativa ao risco, respectivamente, decrescente, crescente e constante.

Na Tabela 6.2, apresenta-se uma sumarização acerca do comportamento do indivíduo, em termos de aversão ao risco, frente a variações na riqueza (x).

Tabela 6.2 - Síntese do resultado da diferenciação (primeira derivada) dos coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco

Condição	Definição	Comportamento frente ao crescimento de x
$A'(x) > 0$	Aversão absoluta ao risco crescente	Menos capital é mantido em ativos arriscados
$A'(x) = 0$	Aversão absoluta ao risco constante	Não varia o volume de capital mantido em ativos arriscados
$A'(x) < 0$	Aversão absoluta ao risco decrescente	Mais capital é mantido em ativos arriscados
$R'(x) > 0$	Aversão relativa ao risco crescente	Menor proporção da riqueza é mantida em ativos arriscados
$R'(x) = 0$	Aversão relativa ao risco constante	Não varia a proporção da riqueza mantida em ativos arriscados
$R'(x) < 0$	Aversão relativa ao risco decrescente	Maior proporção da riqueza é mantida em ativos arriscados

Fonte: Francis (1991 citado por DANTAS, 2002).

6.2.6. Demanda de seguro

Pelo fato de a maioria dos agentes econômicos ser avessa ao risco é que existe o mercado de seguros. Como esses agentes estão dispostos a pagar um determinado valor para evitar certos riscos, existem companhias que podem se aproveitar desse fato para oferecer apólices de seguro.

Para dar fundamentação à existência do mercado em questão, recorre-se, também, à lei dos grandes números. Segundo essa lei, se um evento com probabilidade de ocorrência p for observado repetidamente, durante repetições independentes, a razão da freqüência observada desse evento, em relação ao número total de repetições, tenderá a convergir em direção a p quando o número de repetições tender para o infinito, ou seja, a freqüência de determinados eventos tenderá a se estabilizar cada vez mais à medida que aumenta o número de casos observados, aproximando-se, assim, dos valores previstos pela teoria das probabilidades.

A partir da referida lei, Frank (1991) destaca que as companhias de seguro privado podem prever, com muita acurácia, qual o montante de recursos que será necessário para cobrir as possíveis reivindicações de

seguros. Para ilustrar esse ponto, pode-se tomar, como exemplo, o mercado de seguro de automóveis. Um acidente que causa morte ou sérios ferimentos pode fazer com que o motorista responsável seja condenado a pagar uma considerável quantia em dinheiro. Embora a probabilidade seja bastante baixa de que um acidente específico venha a ocorrer, as conseqüências podem ser extremamente horrendas, fazendo com que apenas poucas famílias consigam arcar com os danos. Diante disso, companhias de seguro oferecem um meio para os consumidores dividirem esse risco, pois, a partir de receitas provenientes de um grande número de segurados, essas empresas podem cobrir as despesas anuais resultantes de um pequeno número relativo de casos em que ocorre a condenação do segurado. Portanto, cada indivíduo participante do mercado de seguro aceita arcar com certo dispêndio em troca de uma garantia de não precisar responsabilizar-se por um possível dispêndio muito maior.

Com base no exemplo discutido, pode-se inferir, ainda, que um tomador de decisão avesso ao risco estaria disposto a reduzir, em certa quantia, o valor esperado de uma loteria como forma de minimizar o risco. Essa constatação remete a um questionamento: quanto um indivíduo avesso ao risco estaria disposto a pagar para eliminar completamente o risco?

Para responder a essa questão, pode-se fazer uso da Figura 6.6. Supondo inicialmente que o indivíduo tenha a opção de participar de duas loterias: uma que paga $E(x)$, com certeza, e outra que paga x_1 ou x_2, com probabilidades, respectivamente, de π e $(1-\pi)$. Embora as duas loterias forneçam o mesmo valor esperado para *x*, conforme já discutido na Figura 6.1, na perspectiva de um agente econômico avesso ao risco, o valor da utilidade esperada entre apostar em *A* (diminuir a riqueza) ou em *B* (aumentar a riqueza) é *D*, que é menor do que a segurança de obter *C* sem apostar; logo, *C* será preferido a *D*. Considerando agora uma terceira loteria que pague, com certeza, o valor $C(x)$, que resulta em utilidade igual à utilidade esperada da loteria arriscada (ponto *E*), ou seja, $u(C(x)) = UE(u)$. Embora essa nova loteria resulte em um nível de riqueza $C(x)$, que é menor do que a riqueza esperada da loteria arriscada, um

indivíduo avesso ao risco seria indiferente entre receber $C(x)$, com certeza, e $E(x)$, com risco, pois a utilidade final seria a mesma. Associado a esse comportamento, tem-se o conceito de *equivalente certeza*, que representa o montante de riqueza que torna o agente econômico indiferente entre participar ou não de uma loteria que envolve riscos. Finalmente, o valor $\Delta(x)$, que corresponde à diferença entre $C(x)$ e $E(x)$, sendo denominado *prêmio de risco*, representa a quantia máxima de riqueza que o indivíduo estaria disposto a renunciar para evitar completamente o risco.

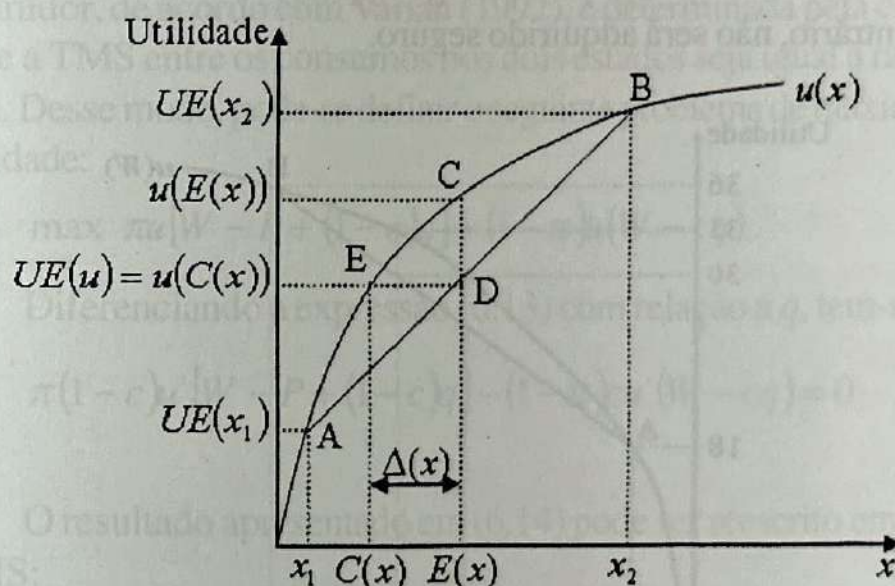



Figura 6.6 - Função de utilidade e prêmio de risco
Fonte: Coimbra-Lisboa (2005).

Para auxiliar a compreensão acerca do conceito de prêmio de risco, tem-se, também, um exemplo numérico. Considere o seguinte caso: 1/3 de probabilidade de ocorrência de uma perda de R$ 600,00; função de utilidade $u(W)$, conforme a Figura 6.7; e riqueza inicial (W_0) de R$ 700,00. Com base nessas informações, são obtidos os seguintes valores em termos de utilidades esperadas, sem e com contratação de seguro:

$$UE_{sem\ seguro} = \left(\tfrac{1}{3}\right)\times u(700-600)+\left(\tfrac{2}{3}\right)\times u(700)=\left(\tfrac{1}{3}\right)\times(18)+\left(\tfrac{2}{3}\right)\times(36)=30$$
$$UE_{com\ seguro} = u(700-330) = u(370) = 30$$

De acordo com o valor da $UE_{com\ seguro}$, se o indivíduo pagar R$ 330,00 de seguro, a utilidade será de 30, que é igual ao valor da $UE_{sem\ seguro}$. Nesse caso, para um valor de compra de seguro igual a R$ 330,00, o consumidor seria indiferente entre adquirir e não adquirir o seguro. Esse valor corresponde, portanto, ao *preço de reserva* para a decisão de compra: se o preço do seguro for menor que o preço de reserva, o consumidor comprará o seguro, pois sua utilidade aumentará; caso contrário, não será adquirido seguro.

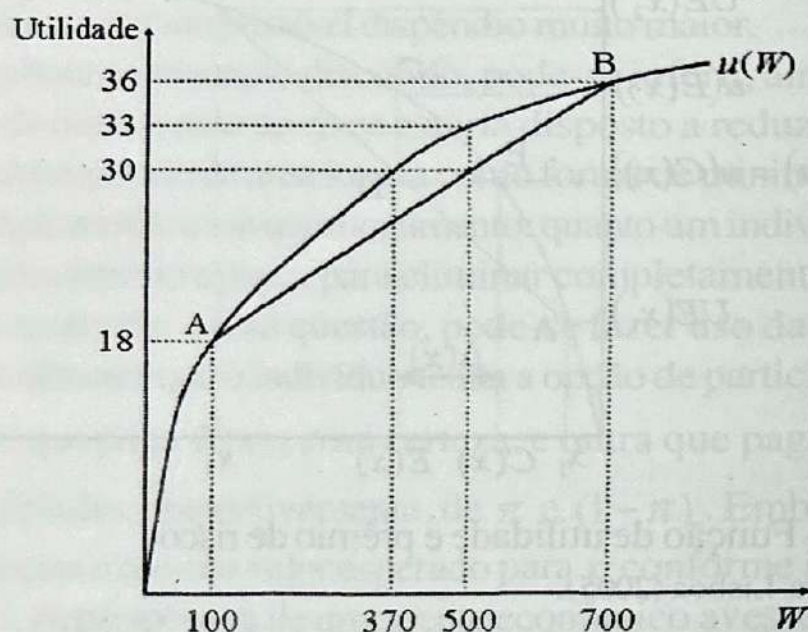



Figura 6.7 - Exemplo numérico de função de utilidade e prêmio de risco
Fonte: Frank (1991).

A análise do seguro baseada na teoria da utilidade esperada pode ser feita, também, em termos algébricos. Nesse caso, considere um indivíduo avesso ao risco, que possui riqueza inicial igual a W e que está sujeito a sofrer uma perda igual a P, com probabilidade π.

Caso o indivíduo não faça a aquisição de um seguro, a sua riqueza será igual a *W-P* e *W*, com probabilidades, respectivamente, de π e $(1-\pi)$. Agora, assumindo que o indivíduo possa adquirir um seguro que custe $R\$c$ e que paga $R\$1{,}00$ para cada unidade adquirida, a sua riqueza será igual a $(W-P+q-cq)$, com probabilidade π (ocorrência efetiva de perda - estado 1), e $(W-cq)$, com probabilidade $(1-\pi)$ (não ocorrência de perda - estado 2), em que q é o número de unidades de seguro adquiridas.

A escolha do nível ótimo de seguro, do ponto de vista do consumidor, de acordo com Varian (1992), é determinada pela condição em que a TMS entre os consumos nos dois estados seja igual à razão dos preços. Desse modo, pode-se definir o seguinte problema de maximização da utilidade:

$$\max_{q} \ \pi u[W-P+(1-c)q]+(1-\pi)u(W-cq) \qquad (6.13)$$

Diferenciando a expressão (6.13) com relação a q, tem-se:

$$\pi(1-c)u'[W-P+(1-c)q]-(1-\pi)cu'(W-cq)=0 \qquad (6.14)$$

O resultado apresentado em (6.14) pode ser reescrito em termos de TMS:

$$TMS=-\frac{u'[W-P+(1-c)q]}{u'(W-cq)}=-\frac{c(1-\pi)}{\pi(1-c)} \qquad (6.15)$$

Analisando agora o seguro do ponto de vista da companhia seguradora, e considerando que esta atue em um mercado de concorrência perfeita, com lucro zero (a receita total proveniente da venda de seguros é exatamente igual ao custo total da companhia), ela terá que pagar, com probabilidade π, o montante q, e, com probabilidade $(1-\pi)$, não pagará nada. Diante disso, o lucro (L) dessa companhia será:

$$L = cq - \pi q - (1-\pi)\times 0 = cq - \pi q \qquad (6.16)$$

Como o lucro da empresa será igual a zero, a partir da equação (6.16), pode-se observar que $c = \pi$. Ao substituir essa igualdade na expressão (6.15), obtém-se:

$$\frac{u'[W - P + (1-c)q]}{u'(W - cq)} = \frac{c(1-c)}{c(1-c)} = 1 \qquad (6.17)$$

A expressão (6.17) pode ser reescrita como em (6.18), indicando que a utilidade marginal de R$ 1,00 de riqueza adicional, caso a perda ocorra, deve ser igual à utilidade marginal de R$ 1,00 de riqueza adicional, caso a perda não ocorra.

$$u'[W - P + (1-c)q] = u'(W - cq) \qquad (6.18)$$

Assim, dada a igualdade das utilidades marginais da riqueza nos dois estados, tem-se:

$$\underbrace{W - P + q - cq}_{Estado1} = \underbrace{W - cq}_{Estado2} \qquad (6.19)$$

Com base na igualdade apresentada em (6.19), pode-se verificar que $q = P$. Esse resultado indica que um consumidor avesso ao risco e maximizador da utilidade esperada, diante da possibilidade de adquirir um seguro a um preço "justo" (companhia de seguro opera com lucro zero), sempre escolherá comprar o seguro total.

6.2.7. O paradoxo de Allais

Embora a teoria da utilidade esperada tenha grande sucesso para explicar as escolhas dos agentes econômicos sob condições que envolvem incerteza, deve-se destacar que existem casos em que são observadas inconsistências comportamentais importantes a ela relacionadas. Isso porque, em muitas situações, os indivíduos têm comportamentos inconsistentes com relação a certos tipos de escolha.

Dentre as principais inconsistências, destaca-se aquela relacionada com o Paradoxo de Allais, pois, conforme destacado por Frank (1991), experimentos conduzidos por Maurice Allais evidenciaram violações do axioma da independência.

Para ilustrar essa inconsistência, utilizam-se dois pares de loterias. Para cada par, o agente econômico questionado deve escolher uma das loterias (Tabela 6.3).

Tabela 6.3 - Pares de loterias para escolha do agente econômico

Primeiro par de loterias		Segundo par de loterias	
A	*A'*	*B*	*B'*
certeza (100%) de ganhar R$ 30,00 0% de chance de não ganhar nada	80% de chance de ganhar R$ 45,00 20% de chance de não ganhar nada	25% de chance de ganhar R$ 30,00 75% de chance de não ganhar nada	20% de chance de ganhar R$ 45,00 80% de chance de não ganhar nada

Fonte: Adaptado a partir do texto de Frank (1991).

Para o primeiro par de loterias, a maioria das pessoas avessas ao risco prefere a loteria A à A'. Essa escolha é plenamente justificada pelo fato de que existe a opção de escolher um valor com certeza a uma opção em que o valor depende de probabilidades. Para o segundo par, a maioria das pessoas escolhe participar da loteria menos certa (B'), pois, além de o valor esperado da loteria B (R$7,50) ser significativamente menor do que o da B' (R$9,50), ambas as loterias envolvem algum nível de risco.

O problema com essas duas loterias escolhidas (A e B') é que, quando analisadas de forma conjunta, contradizem a suposição da maximização da utilidade esperada. Isso porque, considerando um indivíduo com função de utilidade $u(W)$ e renda inicial igual a W_0, a escolha de A em vez de A' implica que:

$$u(W_0+30)>0{,}8u(W_0+45)+0{,}2u(W_0) \tag{6.20}$$

Do mesmo modo que em (6.20), quando o indivíduo escolhe a loteria B' à B, tem-se:

$$0{,}2u(W_0+45)+0{,}8u(W_0)>0{,}25u(W_0+30)+0{,}75u(W_0) \quad (6.21)$$

Rearranjando os termos da inequação (6.21), obtém-se:

$$0{,}25u(W_0+30)<0{,}2u(W_0+45)+0{,}05u(W_0) \quad (6.22)$$

Ao dividir ambos os lados da expressão (6.22) por 0,25, tem-se:

$$u(W_0+30)<0{,}8u(W_0+45)+0{,}2u(W_0) \quad (6.23)$$

O resultado apresentando em (6.23) implica exata reversão da inequação (6.20). Portanto, existe uma contradição, que evidencia inconsistência nas escolhas. Essa contradição, muitas vezes, deve-se ao fato de o agente econômico possuir habilidades limitadas para perceber as diferenças quantitativas entre as opções de escolha, levando, assim, a tomar decisões baseadas, sobretudo, em aspectos qualitativos.

6.3. Aspectos aplicados ao gerenciamento do risco

Buscando dar maior aplicabilidade aos fundamentos teóricos já trabalhados neste capítulo, nesta seção, são abordados alguns aspectos práticos adicionais acerca do cálculo e gerenciamento do risco. Dessa forma, a seção está organizada em dois itens principais: risco de mercado e teoria do portfólio e métodos para quantificação do risco de mercado.

6.3.1. Risco de mercado e teoria do portfólio

Em termos aplicados, risco pode ser visto como um conceito "multidimensional" que, segundo Tosta de Sá (1999), cobre quatro grandes grupos: risco de mercado, risco de liquidez, risco operacional e risco de crédito. Desses, o risco de mercado é que está associado à volatilidade dos preços dos títulos negociados e às correlações entre os movimentos destes[9]. Assim, para entender e medir possíveis perdas causadas por flutuações no mercado, Duarte Júnior (2001) enfatiza a importância de

---

[9] Para mais detalhes, ver Duarte Júnior (2005).

identificar e quantificar o mais corretamente possível as volatilidades e correlações dos fatores que impactam a dinâmica dos preços dos ativos.

Ainda em relação ao risco de mercado, pode-se dizer que ele representa o somatório de dois tipos de risco: o sistemático (ou não-diversificável) e o não-sistemático (ou diversificável). Enquanto um risco sistemático é aquele que influencia grande número de ativos, em maior ou menor grau, um risco não-sistemático é o que afeta um único ativo ou um pequeno número de ativos, podendo, assim, ser minimizado pela diversificação da carteira (ROSS et al., 1998).

O princípio da diversificação mostra que a distribuição de aplicações por muitos ativos eliminará parte do risco de investimento, ou seja, de acordo com Ross et al. (1998), a parte que se refere ao risco não-sistemático pode ser minimizada com a utilização de ativos que se correlacionam de forma inversa, evidenciando que a diversificação representa interessante instrumento para a administração de carteiras de investimento.

Considerando a importância do risco de mercado e da diversificação e partindo do pressuposto de que a utilização de distribuições de probabilidades, mais especificamente o modelo de média, variância e desvio-padrão, constitui um modo para medir a escolha sob incerteza (JORION, 1998), desenvolveu-se a moderna teoria de carteiras. Essa teoria foi proposta inicialmente por Markowitz (1952), a partir da publicação do artigo "Seleção de Carteiras". A grande inovação desse artigo, segundo Baima (1998), está no fato de relacionar o retorno, dado pelo retorno esperado, e o risco, medido pelo desvio-padrão, da carteira de títulos, considerando um infinito número de combinações possíveis que poderiam compor uma carteira. Com base nesse relacionamento, pode-se traçar a curva do conjunto das combinações eficientes da carteira. Assim, dado determinado nível de risco, que pode ser medido pelo desvio padrão, a carteira mais eficiente para investidores racionais é aquela que oferece maior retorno esperado e vice-versa, ou seja, dado um retorno esperado, a melhor opção é aquela cujo risco é o mais baixo.

Enfocando a relação retorno-risco, a Teoria do Portfólio trata da seleção de aplicações financeiras capazes de maximizar a utilidade esperada

identificar e quantificar o mais corretamente possível as volatilidades e correlações dos fatores que impactam a dinâmica dos preços dos ativos.

Ainda em relação ao risco de mercado, pode-se dizer que ele representa o somatório de dois tipos de risco: o sistemático (ou não-diversificável) e o não-sistemático (ou diversificável). Enquanto um risco sistemático é aquele que influencia grande número de ativos, em maior ou menor grau, um risco não-sistemático é o que afeta um único ativo ou um pequeno número de ativos, podendo, assim, ser minimizado pela diversificação da carteira (ROSS et al., 1998).

O princípio da diversificação mostra que a distribuição de aplicações por muitos ativos eliminará parte do risco de investimento, ou seja, de acordo com Ross et al. (1998), a parte que se refere ao risco não-sistemático pode ser minimizada com a utilização de ativos que se correlacionam de forma inversa, evidenciando que a diversificação representa interessante instrumento para a administração de carteiras de investimento.

Considerando a importância do risco de mercado e da diversificação e partindo do pressuposto de que a utilização de distribuições de probabilidades, mais especificamente o modelo de média, variância e desvio-padrão, constitui um modo para medir a escolha sob incerteza (JORION, 1998), desenvolveu-se a moderna teoria de carteiras. Essa teoria foi proposta inicialmente por Markowitz (1952), a partir da publicação do artigo "Seleção de Carteiras". A grande inovação desse artigo, segundo Baima (1998), está no fato de relacionar o retorno, dado pelo retorno esperado, e o risco, medido pelo desvio-padrão, da carteira de títulos, considerando um infinito número de combinações possíveis que poderiam compor uma carteira. Com base nesse relacionamento, pode-se traçar a curva do conjunto das combinações eficientes da carteira. Assim, dado determinado nível de risco, que pode ser medido pelo desvio padrão, a carteira mais eficiente para investidores racionais é aquela que oferece maior retorno esperado e vice-versa, ou seja, dado um retorno esperado, a melhor opção é aquela cujo risco é o mais baixo.

Enfocando a relação retorno-risco, a Teoria do Portfólio trata da seleção de aplicações financeiras capazes de maximizar a utilidade esperada

de um investidor. Para isso, com base em métodos quantitativos e dados históricos, são fornecidos indicativos de como construir uma carteira condizente com a combinação risco-retorno apropriada para cada perfil de investidor (MATTOS, 2000).

A escolha de uma carteira ótima, composta por *N* ativos, seguindo os pressupostos estabelecidos na Teoria do Porftólio, também pode ser feita mediante duas formas: 1) solução de um problema de minimização do risco de investimento, dado um certo nível de retorno esperado (expressão 6.24); e 2) solução de um problema de maximização, onde busca-se encontrar o portfólio que apresenta a mais alta razão do retorno excedente (retorno esperado menos a taxa de retorno de ativos livres de risco) pelo desvio padrão, satisfazendo as duas restrições destacadas na expressão (6.25) (ELTON *et al.*, 2003).

$$a)\ \text{minimizar } Var(R_p) = \sum_{j=1}^{N} Var(X_j) w_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} w_j w_k Cov(X_j, X_k)$$

sujeito a

$$(1)\ E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (6.24)$$

$$(3)\ w_i \geq 0, \forall i$$

$$b)\ \text{maximizar } \theta = \frac{E(R_p) - R_F}{\sigma_p}$$

sujeito a

$$(1)\ \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (6.25)$$

$$(2)\ w_i \geq 0, \forall i$$

sendo: $k \neq j$; $Var(R_p)$ é é a variância do retorno da carteira; w_j é a participação de cada ativo na carteira; $Var(X_j)$ é a variância dos retornos de

cada ativo; $Cov(X_j X_k)$ é a covariância entre os retornos dos ativos; $E(R_p)$ é o retorno esperado da carteira; e R_i indica os retornos de cada um dos ativos da carteira; $\sigma_p = \sqrt{Var(R_p)}$; e R_F corresponde à taxa de retorno de ativos livres de risco.

Na Figura 6.8 tem-se uma síntese da escolha da carteira ótima com base no dilema entre risco e retorno. O segmento MW representa a fronteira eficiente, que insere todas as carteiras racionais possíveis de serem construídas. A escolha da melhor carteira é determinada pela postura demonstrada pelo investidor diante do referido dilema. Considerando os investidores 1 e 2 e suas respectivas curvas de indiferença, que refletem as posturas perante o risco, pode-se identificar o ponto ótimo de escolha de cada investidor. Diante do mesmo conjunto de combinações de ativos, o investidor 2, pelo fato de ser menos avesso ao risco, seleciona o ponto B, onde a utilidade é maximizada frente à fronteira eficiente possível. Analogamente, o investidor 1 seleciona o ponto A, que represente uma carteira que gera risco e retorno menores.

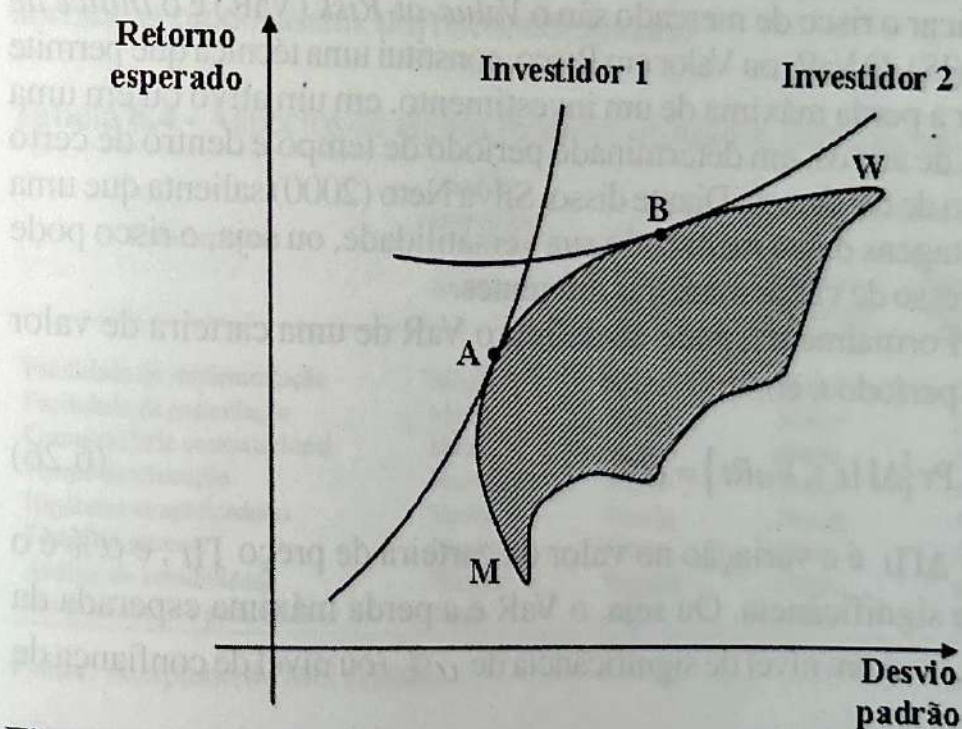



Figura 6.8 - Seleção de carteira pela curva de indiferença

Fonte: Adaptado a partir de Assaf Neto (2003).

6.3.2. *Alguns métodos para quantificar o risco de mercado*

Para calcular o risco de mercado de uma carteira de investimentos, podem ser utilizadas diferentes medidas. Dentre essas medidas, o desvio-padrão, que mede a dispersão em torno de um valor esperado, é o indicador estatístico mais comumente utilizado. Outras medidas de volatilidade visam capturar, por exemplo, características próprias do mercado financeiro, como a correlação dessa dispersão com os erros passados (GUJARATI, 2000).

Para Pereira (2003), em séries de retornos de ativos financeiros é comum o fato de que grandes valores num determinado instante do tempo sejam seguidos por valores também elevados nos períodos subseqüentes, embora não necessariamente na mesma direção. Nessa linha, de acordo com Costa (2005), nota-se que o processo de mensuração do risco pode passar pelo estudo estatístico de séries temporais. Assim, podem ser empregados modelos de análise de séries temporais[10], que têm como finalidades a identificação de padrões no comportamento das variáveis e a tentativa de efetuar previsões acerca dos valores futuros destas (BOX; JENKINS, 1976).

Outras duas medidas que vêm sendo amplamente utilizadas para quantificar o risco de mercado são o *Value-at-Risk* (VaR) e o *Índice de Sharpe* (IS). O VaR, ou Valor em Risco, constitui uma técnica que permite calcular a perda máxima de um investimento, em um ativo ou em uma carteira de ativos, em determinado período de tempo e dentro de certo intervalo de confiança. Diante disso, Silva Neto (2000) salienta que uma das vantagens dessa medida é a sua versatilidade, ou seja, o risco pode ser expresso de várias maneiras diferentes.

Formalmente, pode-se definir o VaR de uma carteira de valor Πt, no período t, como:

$$\Pr\{\Delta\Pi t \leq VaRt\} = \alpha\% \tag{6.26}$$

em que $\Delta\Pi t$ é a variação no valor da carteira de preço Πt; e $\alpha\%$ é o nível de significância. Ou seja, o VaR é a perda máxima esperada da carteira, com um nível de significância de $\alpha\%$ (ou nível de confiança de

---

[10] Dentre esses modelos, destacam-se os de volatilidade condicional. Para mais detalhes, pode-se consultar Enders (1995).

$1-\alpha\%$), dentro de um horizonte de tempo determinado.

O VaR pode ser calculado mediante métodos paramétricos e não-paramétricos. Conforme Silva Neto (2000), nos modelos paramétricos (ou analíticos) calcula-se o risco isoladamente de cada ativo, pressupondo, inicialmente, determinada distribuição de probabilidade. Posteriormente, constrói-se a volatilidade da carteira com base nas correlações entre os ativos. Nos modelos não-paramétricos (ou de simulação), além de não se pressupor, obrigatoriamente, determinada distribuição de probabilidade, os ativos são tratados em bloco.

Na Tabela 6.4 são apresentados alguns aspectos importantes de modelos que podem ser empregados para se obter o VaR. No modelo analítico (Delta Normal), que assume a hipótese de normalidade da série de retornos de cada ativo, são necessários apenas a média e o desvio-padrão para fazer todas as inferências sobre a distribuição e, conseqüentemente, sobre os riscos envolvidos. O grande problema desse modelo parte do próprio pressuposto inicial, tendo em vista que as séries financeiras, muitas vezes, se afastam das características de uma distribuição normal, gerando, assim, um risco subestimado.

Tabela 6.4 - Aspectos de alguns modelos utilizados para cálculo do VaR

Características	Modelo paramétrico	Modelos não-paramétricos		
	Analítico	Simulação histórica	Variância condicional	Simulação de Monte Carlo
Facilidade de implementação	Média	Média	Média	Difícil
Facilidade de assimilação	Média	Média	Média	Difícil
Complexidade computacional	Média	Média	Média	Muita
Tempo de execução	Média	Média	Média	Alto
Hipóteses simplificadoras	Muitas	Poucas	Poucas	Algumas
Testes de estresse[11]	Péssimo	Ótima	Ótima	Ótima
Análise de sensibilidade	Péssimo	Regular	Ótima	Ótima
Modularização e portabilidade	Pouca	Média	Média	Pouca

Fonte: Adaptado de Mol (2003).

[11] O VaR normalmente está associado a um risco de rotina, sendo necessários testes baseados em alguns cenários representativos de choques para capturar efeitos de crise. Esses testes são os chamados *Stress Testing* ou Testes de Estresse.

O método de Simulação Histórica consiste em, a partir de uma carteira previamente estabelecida, realizar uma análise histórica de seus valores até obter uma série de retornos que gerarão uma distribuição empírica, mediante a qual pode-se extrair o VaR como ponto crítico. Nota-se que essa técnica dispensa considerações sobre a distribuição de probabilidade, não sendo necessário assumir previamente nenhum tipo de hipótese. No entanto, como se trata de uma análise puramente histórica, parte-se do pressuposto de que o passado refletirá o futuro, indicando que o tempo (ou janela) considerado na análise é extremamente importante. Além disso, de acordo com Mol (2003), outra limitação verificada nesse tipo de análise relaciona-se com sua falta de adaptabilidade. Isso porque aplica-se o mesmo peso para todas as observações da série, não mostrando, assim, o impacto de fatos mais recentes.

Na Simulação de Monte Carlo, são definidos cenários para simular valores para todos os fatores que podem afetar o preço dos ativos. Com base nos cenários, busca-se prever o VaR para determinado período à frente. No entanto, esse método apresenta como grande problema a dificuldade de implementação e de adaptação.

Como se espera que ativos de menor risco também gerem um retorno mais baixo, torna-se premente considerar que o cálculo do risco, quando tomado isoladamente, pode não trazer conclusões satisfatórias. Dessa forma, Higgins (1995) sugere que o mais importante é o estabelecimento de relações entre risco e retorno. Dentro dessa linha é que se insere o Índice de Sharpe (IS), proposto por Sharpe (1966).

De acordo com Assaf Neto (2003), o IS revela o prêmio oferecido por um ativo para cada percentual adicional de risco assumido, podendo ser calculado a partir da equação (6.27). Mattos (2000) também ressalta que esse índice mede o retorno obtido por unidade de risco assumida pelo investidor. Assim, o referido autor sugere três interpretações: 1) um índice positivo e maior que a unidade indica que o ganho do investidor é proporcionalmente maior que o risco assumido; 2) um índice positivo entre zero e um significa que, mesmo havendo um ganho, este foi proporcionalmente inferior ao risco; e 3) um índice negativo mostra que houve perda em relação ao risco assumido.

$$IS = \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_{R_M}} \tag{6.27}$$

em que $E(R_M)$ é a expectativa do retorno de uma carteira M constituída por ativos de risco; R_F é a taxa de retorno de ativos livres de risco; e σ_{R_M} é o desvio-padrão (risco) da carteira M.

6.4. Exercício resolvido

1) A evasão do imposto sobre a renda, com base na teoria da utilidade esperada, pode ser modelada como um processo de tomada de decisão de portfólio. Nessa modelagem, incorpora-se o fato de que o contribuinte, por meio do conhecimento que possui de todas as suas fontes de renda, pode ocultar (sonegar) uma fração desta, pois existe uma probabilidade de não ser flagrado pela fiscalização. No entanto, caso essa sonegação seja descoberta pelo fisco, o contribuinte deve pagar uma multa sobre o valor sonegado. Nesse contexto, o comportamento ótimo do contribuinte, que possui algum grau de aversão ao risco, origina-se da maximização da sua função de utilidade esperada, que é assumida ser positiva, crescente e côncava. Portanto, para resolver esse modelo, além da função de utilidade, têm-se as seguintes variáveis: rendas verdadeira (W) e declarada (X); probabilidade de ser pego pelo fisco (p); probabilidade de não ser pego pelo fisco (1-p); multa sobre o valor sonegado (π); e alíquota normal do imposto de renda (θ). Considera-se, ainda, que $\theta < 1$ e $\pi > \theta$.

Com base no modelo descrito:

a) Mostre que, quanto maior a probabilidade do indivíduo ser pego pelo fisco, maior será a sua renda declarada.

b) Mostre que, quanto maior for a multa pela sonegação, maior será a renda declarada.

c) Mostre a relação existente entre as rendas declarada e verdadeira.

d) Explique a relação entre a renda declarada e a alíquota do imposto de renda.

Resolução

a) $UE = (1-p)u(W-\theta X) + pu[W - \theta X - \pi(W-X)]$ (6.28)

Considerando $A = W - \theta X$ e $B = W - \theta X - \pi(W - X)$ e substituindo A e B em (6.28), tem-se:

$$UE = (1-p)u(A) + pu(B) \quad (6.29)$$

Para maximizar (6.29), a condição de primeira ordem (CPO) é dada por $\frac{\partial UE}{\partial X} = 0$, logo:

$$\frac{\partial UE}{\partial X} = -\theta(1-p)u'(A) - (\theta - \pi)pu'(B) = 0 \quad (6.30)$$

A condição de segunda ordem (CSO) é dada por:

$$\frac{\partial^2 UE}{\partial X^2} = D = \theta^2(1-p)u''(A) + (\theta-\pi)^2 pu''(B) < 0 \quad (6.31)$$

A CSO é negativa, pois a função de utilidade esperada é côncava. Isso evidencia que o indivíduo é avesso ao risco.

Diferenciando agora a expressão (6.30) em relação a X e p, obtém-se:

$$\theta^2(1-p)u''(A)dX + (\theta-\pi)^2 pu''(B)dX + \theta u'(A)dp - (\theta-\pi)u'(B)dp = 0 \quad (6.32)$$

Rearranjando os termos em (6.32) e dada a CSO apresentada em (6.31), tem-se:

$$\frac{dX}{dp} = \frac{-\theta u'(A) + (\theta-\pi)u'(B)}{\theta^2(1-p)u''(A) + (\theta-\pi)^2 pu''(B)} = \frac{-\theta u'(A) + (\theta-\pi)u'(B)}{D}$$

Como o modelo em questão considera que $u'(.) > 0$ e $\pi > \theta$, o numerador da expressão anterior é negativo. Além disso, a CSO (D) é também negativa, resultando, assim, em $dX / dp > 0$, ou seja, existe relação direta entre a probabilidade de o fisco constatar a sonegação e a renda declarada. Portanto, quanto maior a probabilidade de o indivíduo ser pego pelo fisco, maior será a sua renda declarada.

b) Para responder esta alternativa, parte-se das condições de primeira e segunda ordens já demonstradas na alternativa (a):

$$\frac{\partial UE}{\partial X} = -\theta(1-p)u'(A) - (\theta - \pi)pu'(B) = 0 \qquad (6.33)$$

$$\frac{\partial^2 UE}{\partial X^2} = D = \theta^2(1-p)u''(A) + (\theta - \pi)^2 pu''(B) < 0 \qquad (6.34)$$

Diferenciando agora a expressão (6.33) em relação a X e π, obtém-se:

$$\theta^2(1-p)u''(A)dX + (\theta-\pi)^2 pu''(B)dX + pu'(B)d\pi + (W-X)(\theta-\pi)pu''(B)d\pi = 0 \qquad (6.35)$$

Rearranjando os termos em (6.35) e dada a CSO apresentada em (6.34), tem-se:

$$\frac{dX}{d\pi} = \frac{-pu'(B) - (W-X)(\theta-\pi)pu''(B)}{\theta^2(1-p)u''(A) + (\theta-\pi)^2 pu''(B)} = \frac{-pu'(B) - (W-X)(\theta-\pi)pu''(B)}{D}$$

Como o modelo em questão considera que $u'(B) > 0$, $\pi > \theta$ e $u''(B) < 0$, o numerador da expressão anterior é negativo. Além disso, a CSO (D) é também negativa, resultando, assim, em $dX / d\pi > 0$, ou seja, existe relação direta entre a multa pela sonegação e a renda declarada. Portanto, quanto maior a multa, maior será a renda declarada.

c) Para mostrar a relação existente entre as rendas declarada e verdadeira, parte-se novamente das condições de primeira e segunda ordens demonstradas na alternativa (a):

$$\frac{\partial UE}{\partial X} = -\theta(1-p)u'(A) - (\theta - \pi)pu'(B) = 0 \qquad (6.36)$$

$$\frac{\partial^2 UE}{\partial X^2} = D = \theta^2(1-p)u''(A) + (\theta - \pi)^2 pu''(B) < 0 \qquad (6.37)$$

Diferenciando agora a expressão (6.36) em relação a X e W,

obtém-se:

$$\theta^2(1-p)u''(A)dX+(\theta-\pi)^2 pu''(B)dX-\theta(1-p)u''(A)dW-(1-\pi)(\theta-\pi)pu''(B)dW=0 \quad (6.38)$$

Rearranjando os termos em (6.38) e dada a CSO apresentada em (6.37), tem-se:

$$\frac{dX}{dW}=\frac{\theta(1-p)u''(A)+(1-\pi)(\theta-\pi)pu''(B)}{\theta^2(1-p)u''(A)+(\theta-\pi)^2 pu''(B)}=\frac{\theta(1-p)u''(A)+(1-\pi)(\theta-\pi)pu''(B)}{D}$$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por $u'(A)$, obtém-se:

$$\frac{dX}{dW}=\frac{1}{D}u'(A)\left[\theta(1-p)\frac{u''(A)}{u'(A)}+(1-\pi)(\theta-\pi)p\frac{u''(B)}{u'(A)}\right] \quad (6.39)$$

A partir da CPO (6.36), tem-se:

$$u'(A)=\frac{(\theta-\pi)pu'(B)}{-\theta(1-p)} \quad (6.41)$$

Substituindo (6.40) em (6.39), chega-se a:

$$\frac{dX}{dW}=\frac{1}{D}u'(A)\left[\theta(1-p)\frac{u''(A)}{u'(A)}+(1-\pi)(\theta-\pi)p\frac{u''(B)}{\frac{(\theta-\pi)pu'(B)}{-\theta(1-p)}}\right]$$
$$=-\frac{1}{D}\theta(1-p)u'(A)\left[-\frac{u''(A)}{u'(A)}+(1-\pi)\frac{u''(B)}{u'(B)}\right] \quad (6.41)$$

Utilizando o coeficiente de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco, representado aqui por ρ , e substituindo $\left\{\rho_A=-\frac{u''(A)}{u'(A)}>0\right\}$ e $\left\{\rho_B=-\frac{u''(B)}{u'(B)}>0\right\}$ em (6.41), obtém-se:

$$\frac{dX}{dW} = -\frac{1}{D}\theta(1-p)u'(A)[\rho_A - (1-\pi)\rho_B] \tag{6.42}$$

De acordo com a teoria de riscos, admite-se que ρ é decrescente com relação à renda, ou seja, um aumento na renda leva à diminuição na aversão absoluta ao risco. Assim, com base na expressão (6.42), a relação só não é verdadeira quando a multa sobre a renda sonegada for superior a 100% $(\pi > 1)$, pois, sendo *A* maior que *B*, ρ_A será menor que ρ_B.

Se $dX/dW > 0$, a sonegação do contribuinte diminui com seu nível de renda verdadeira.

d) Para explicar a relação entre a renda declarada e a alíquota de imposto de renda, recorre-se mais uma vez às condições de primeira e segunda ordens demonstradas na alternativa (a):

$$\frac{\partial UE}{\partial X} = -\theta(1-p)u'(A) - (\theta-\pi)pu'(B) = 0 \tag{6.43}$$

$$\frac{\partial^2 UE}{\partial X^2} = D = \theta^2(1-p)u''(A) + (\theta-\pi)^2 pu''(B) < 0 \tag{6.44}$$

Diferenciando agora a expressão (6.43) em relação a *X* e θ, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\theta^2(1-p)u''(A)dX + (\theta-\pi)^2 pu''(B)dX - (1-p)u'(A)d\theta + \theta X(1-p)u''(A)d\theta - pu'(B)d\theta \\ &+ X(\theta-\pi)pu''(B)d\theta = 0\end{aligned} \tag{6.45}$$

Rearranjando os termos em (6.45) e dada a CSO apresentada em (6.44), tem-se:

$$\frac{dX}{d\theta} = \frac{(1-p)u'(A) - \theta X(1-p)u''(A) + pu'(B) - X(\theta-\pi)pu''(B)}{\theta^2(1-p)u''(A) + (\theta-\pi)^2 pu''(B)}$$

$$= \frac{(1-p)u'(A) - \theta X(1-p)u''(A) + pu'(B) - X(\theta-\pi)pu''(B)}{D}$$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por $u'(A)$, obtém-se:

$$\frac{dX}{d\theta}=\frac{1}{D}\left[(1-p)\frac{u'(A)}{u'(A)}u'(A)-\theta X(1-p)\frac{u''(A)}{u'(A)}u'(A)+pu'(B)\frac{u'(A)}{u'(A)}-X(\theta-\pi)pu''(B)\frac{u'(A)}{u'(A)}\right] \quad (6.46)$$

A partir da CPO (6.43), tem-se:

$$u'(A)=\frac{(\theta-\pi)pu'(B)}{-\theta(1-p)} \quad (6.47)$$

Considerando, ainda, os coeficientes de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco (conforme apresentado na alternativa anterior) e substituindo esses coeficientes, juntamente com a expressão (6.47), em (6.46), obtém-se:

$$\frac{dX}{d\theta}=-\frac{1}{D}\theta X(1-p)u'(A)[\rho_A-\rho_B]+\frac{1}{D}[(1-p)u'(A)+pu'(B)] \quad (6.48)$$

Na expressão (6.48), enquanto o segundo termo do lado direito tem sinal negativo, o sinal do primeiro depende da magnitude de ρ_A e ρ_B. Portanto, a relação (direta ou inversa) entre a renda declarada (X) e a alíquota do imposto de renda (θ) dependerá da magnitude dos referidos coeficientes de aversão ao risco.

6.5. Exercícios propostos

1) Analise e discuta as seguintes afirmativas e questões:

a) Conhecer os possíveis resultados de uma determinada ação, bem como a probabilidade de ocorrência de cada resultado possível, é imprescindível para que se possa descrever o risco de forma quantitativa.

b) A partir da fórmula de medida de risco, elaborada a partir dos estudos de Kenneth Arrow e John W. Pratt, pode-se deduzir que os indivíduos que têm maior riqueza possuem, também, maior grau de aversão ao risco.

c) Se o prêmio de um seguro fosse estabelecido em um nível abaixo da

probabilidade de ocorrência de um dado sinistro, a oferta de seguro seria nula e a demanda seria a máxima possível. Você concorda com essa hipótese? Justifique.

d) Quanto mais côncava for a função de utilidade de um indivíduo, mais avesso ao risco ele será e, conseqüentemente, maior será sua demanda por seguro?

2) Resolva os seguintes problemas:

a) Considere duas opções para realizar um investimento de risco: na opção A, os possíveis retornos de R$ 100,00 e R$ 200,00 possuem probabilidades de ocorrência, respectivamente, de 2/3 e 1/3; e na opção B, os retornos de R$ 50,00, R$ 150,00 e R$ 300,00 apresentam probabilidades, respectivamente, de 1/3, 5/9 e 1/9. Se o investidor é avesso ao risco, e assumindo que ele maximiza sua utilidade esperada de acordo com o modelo de Von Newmann-Morgenstern, qual a opção de investimento que ele escolheria? Obs.: Suponha $u = \sqrt{W}$.

a) Considere dois indivíduos *A* e *B*, respectivamente, com as seguintes funções de utilidade:

$u_A(x) = -e^{-ax} + \alpha$, sendo $a > 0$ e $\alpha > 0$

$u_B(x) = -\beta e^{-bx} + \gamma$, sendo $b > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$

b1) De acordo com a medida de aversão ao risco de Arrow-Pratt, em que condições o indivíduo *A* seria mais avesso ao risco do que o indivíduo *B*?

b2) Se a riqueza (x) do indivíduo *B* fosse maior do que a riqueza do indivíduo *A*, o indivíduo *B* seria considerado mais avesso ao risco quando comparado com o indivíduo *A*?

b3) Qual dos dois indivíduos estaria disposto a pagar maior prêmio por um seguro?

6.6. Referências

ASSAF NETO, A. **Mercado financeiro**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2003. 400 p.

BAIMA, F.R. **Avaliação de desempenho dos investimentos dos fundos de pensão no Brasil**. 1998. Dissertação (Mestrado em Economia da Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

BINGER, B.R.; HOFFMAN, E. **Microeconomics with calculus**. 2.ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 633 p.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. **Time series analysis**: forecasting and control. New York: John Wiley & Sons, 1976.

BRITO, O. **Controladoria de risco-retorno em instituições financeiras**. São Paulo: Saraiva, 2003.

COIMBRA-LISBOA, P.C. **Teoria da escolha envolvendo o risco**: uma abordagem introdutória. Rio de Janeiro: EPGE/FGV, 2005.

COSTA, T.M.T. **Viabilidade da utilização de derivativos agropecuários em carteiras de investimentos de Fundos de Pensão no Brasil**. 2003. Dissertação (Mestrado em Economia Aplicada) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

CUSINATO, R.T. **Teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade esperada**: conceitos analíticos e paradoxos. 2003. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

DANTAS, A.B. **Regra de decisão estocástica não linear dinâmica para o problema de planejamento agregado da produção**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

DUARTE JÚNIOR, A.M. Risco: definições, tipos, medição e recomendações para o seu gerenciamento. In: LEMGRUBER, E.F. et al. (Org.). **Gestão de risco e derivativos**: aplicações no Brasil. São Paulo: Atlas, 2001.

DUARTE JÚNIOR, A.M. **Gestão de riscos para fundos de investimentos**. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; GOETZMANN, W.N. **Modern Portfolio theory and investiment analysis**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, 2003. 705p.

ENDERS, W. **Applied econometric time series**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 433 p.

FRANK, R. **Microeconomics and behavior**. New York: McGraw-Hill, 1991.

GITMAN, L.J. **Princípios de administração financeira**. 10.ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2004. 745 p.

GUJARATI, D.N. **Econometria básica**. São Paulo: Makron Books, 2000. 846 p.

HIGGINS, R.C. **Analysis for financial management**. 4.ed. Richard D. Irwing, 1995.

HULL, J. **Introdução aos mercados futuros e de opções**. 2.ed.rev.ampl. São Paulo: BM&F/Cultura Editores Associados, 1996. 448 p.

JORION, P. **Value at risk**: a nova fonte de referência para o controle do risco de mercado. São Paulo: BM&F, 1998. 305 p.

MARKOWITZ, H.M. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, Mar. 1952.

MATTOS, F.L. **Utilização de contratos futuros agropecuários em carteiras de investimento**: um estudo de viabilidade. 2000. Dissertação (Mestrado em Economia Aplicada) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, SP.

MOL, A.L.R. **Value at risk como medida de risco da volatilidade dos ajustes diários em mercados futuros de café**. 2003. Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

PEREIRA, P.L.V. **Estimação de volatilidades**. São Paulo: RiskTech.com – O Portal Brasileiro de Risco, 2003. Disponível em: <http://www.risktech.com.br/>. Acesso em: 10 out. 2003.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JORDAN, B.D. **Princípios de administração financeira**. São Paulo: Atlas, 1998.

SHARPE, W. Mutual fund performance. **Journal of Business**, p. 119-138, Jan. 1966.

SILVA NETO, L.A. **Derivativos**: definições, emprego e risco. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2000.

TOSTA DE SÁ, G. **Administração de investimentos**: teoria de carteiras e gerenciamento do risco. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1999. 376 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. 6.ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003. 808 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomic analysis**. 3.ed. New York: Norton & Company, 1992. 548 p.

Capítulo 7

Teoria da produção

Eduardo Rodrigues de Castro[1]
Adelson Martins Figueiredo[2]
Carlos Antônio Moreira Leite[3]
Maurinho Luiz dos Santos[4]

7.1. Introdução

Nos capítulos anteriores foi analisado o comportamento do consumidor ao realizar as suas escolhas, tendo como principal critério a maximização da sua utilidade. Da mesma forma, nos sistemas produtivos, de acordo com a análise clássica, o critério que norteia as firmas é a maximização do lucro. Uma vez definida a função de produção e assumindo-se um mercado competitivo, pode-se estabelecer a quantidade ótima a ser produzida, que determinará o maior lucro possível.

A função de produção representa apenas as relações físicas entre os fatores de produção e o produto, ou seja, é a tecnologia de produção. O conhecimento da tecnologia por si só, no entanto, não é suficiente para determinar o nível ideal de produção. A quantidade que maximiza o produto normalmente não é aquela que maximiza o lucro, como será visto mais adiante. Por outro lado, a quantidade ótima que maximiza o lucro pode não ser possível de ser atingida, devido a restrições orçamentárias que impedem a firma de obter todos os insumos necessários para atingir tal nível de produto. Essa situação permite que a firma defina a quantidade

[1] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: eduardo@ufscar.br
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: caml@ufv.br.
[4] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

ótima sob dois enfoques diferentes, que apresentam o mesmo resultado: maximizando a receita, sujeito a uma restrição de custos, ou minimizando os custos, condicionado a um determinado nível de produção. É a dualidade aplicada à teoria da produção.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: será apresentado inicialmente o modelo fator-produto, que é de curto prazo e considera a variação da produção em função de apenas um fator variável, mantendo-se os demais fixos; em seguida é apresentado o modelo fator-fator, que é de longo prazo e considera a variação da produção levando-se em conta todos os fatores variáveis.

7.2. O modelo fator-produto

Considere uma firma qualquer produzindo determinado produto *Y*, que será representado por $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. Esses fatores podem ser combinados de diversas maneiras, obtendo-se diferentes tecnologias de produção, que apresentarão respostas diferentes às combinações dos insumos.

Dado um produto qualquer *Y*, obtido pela combinação de insumos $(X_1, X_2, ..., X_N)$, tal que apenas X_1 seja variável, a resposta da quantidade produzida *Y* a variações na quantidade de X_1 pode ser crescente, constante ou decrescente. Respostas ou retornos de *Y* a variações em X_1 serão crescentes se um aumento na quantidade de X_1 corresponde a um aumento na quantidade mais que proporcional em *Y*; os retornos serão constantes se um aumento na quantidade de X_1 corresponde a um aumento na mesma proporção em *Y*; e os retornos serão decrescentes se, com um aumento de X_1, ocorre aumento menos que proporcional na quantidade produzida de *Y*. A análise a ser apresentada a seguir considera uma forma geral, em que *Y* apresenta retornos crescentes inicialmente, retornos decrescentes a partir de determinada quantidade de X_1, atingindo o máximo, e passa a ter retornos negativos a partir de então. Essa função de produção está representada na Figura 7.1a[5].

[5] Os fatores serão representados daqui para frente na forma de fluxo $\left(X_1 / X_2 ... X_N / u.t. \right)$, indicando que apenas o fator x_1 é variável naquele período de tempo.

Apesar de a variação na produção Y ser conseqüência da variação de X_1, cada unidade produzida utiliza todos os fatores de produção. Assim, para que se possa analisar a relação de produção com o fator X_1, é necessário derivar as curvas de Produto Marginal e Produto Médio, que são apresentadas na Figura 7.1b. O produto marginal representa a variação na produção em Y dada uma variação na quantidade de X_1, podendo ser definido como:

$$PMa = \frac{dY}{dX_1} \tag{7.1}$$

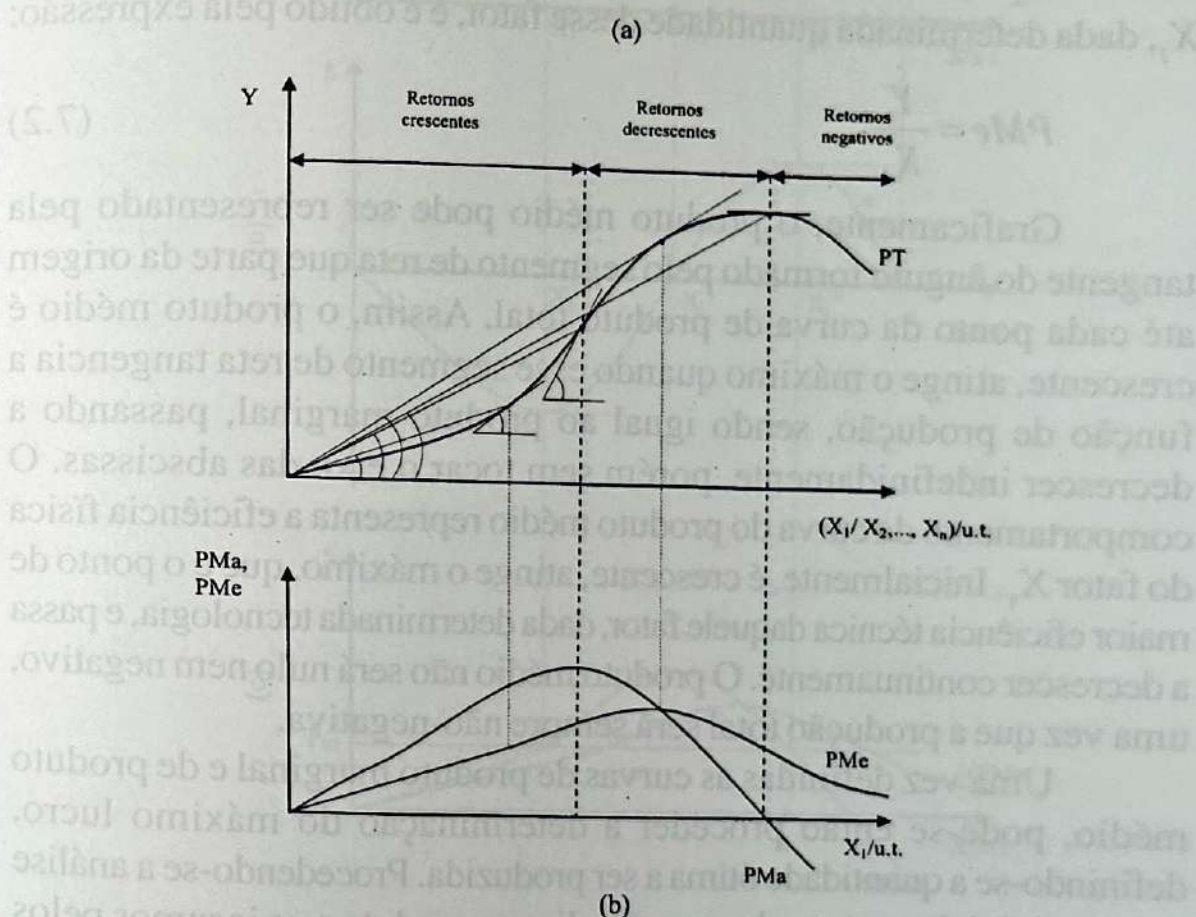



Figura 7.1 - Função de produção, produto marginal e produto médio

Graficamente, o produto marginal pode ser representado pela tangente do ângulo em cada ponto da curva da função de produção. Assim, o produto marginal cresce, atinge seu máximo no ponto de inflexão da

curva, passando a decrescer até o ponto em que o produto total é máximo. O comportamento da curva do produto marginal está relacionado com o tipo de retorno da função de produção a variações em X_l. Com isso, na fase de retornos crescentes, para cada variação em X_l, a produção varia mais que proporcional e a curva de produto marginal é crescente. Na fase de retornos decrescentes, a produção varia menos que proporcional e a curva de produto marginal é decrescente. Após a produção atingir o máximo, os retornos a aumentos de X_l são negativos e a curva do produto marginal é negativa.

O produto médio representa a produção média por unidade de X_l, dada determinada quantidade desse fator, e é obtido pela expressão:

$$PMe = \frac{Y}{X_1} \qquad (7.2)$$

Graficamente, o produto médio pode ser representado pela tangente do ângulo formado pelo segmento de reta que parte da origem até cada ponto da curva de produto total. Assim, o produto médio é crescente, atinge o máximo quando esse segmento de reta tangencia a função de produção, sendo igual ao produto marginal, passando a decrescer indefinidamente, porém sem tocar o eixo das abscissas. O comportamento da curva do produto médio representa a eficiência física do fator X_1. Inicialmente, é crescente, atinge o máximo, que é o ponto de maior eficiência técnica daquele fator, dada determinada tecnologia, e passa a decrescer continuamente. O produto médio não será nulo nem negativo, uma vez que a produção total será sempre não-negativa.

Uma vez definidas as curvas de produto marginal e de produto médio, pode-se então proceder à determinação do máximo lucro, definindo-se a quantidade ótima a ser produzida. Procedendo-se a análise gráfica, inicialmente, pode-se multiplicar o produto e os insumos pelos respectivos preços, sem que isso altere a relação de produção, já que num mercado competitivo os preços são dados. Assim, tem-se a curva do Valor Bruto da Produção (VBP), obtida pela multiplicação de Y pelo seu preço (P_Y), e a curva de Custo Total, obtida pela multiplicação do vetor de insumos X pelo seu respectivo preço (Figura 7.2a).

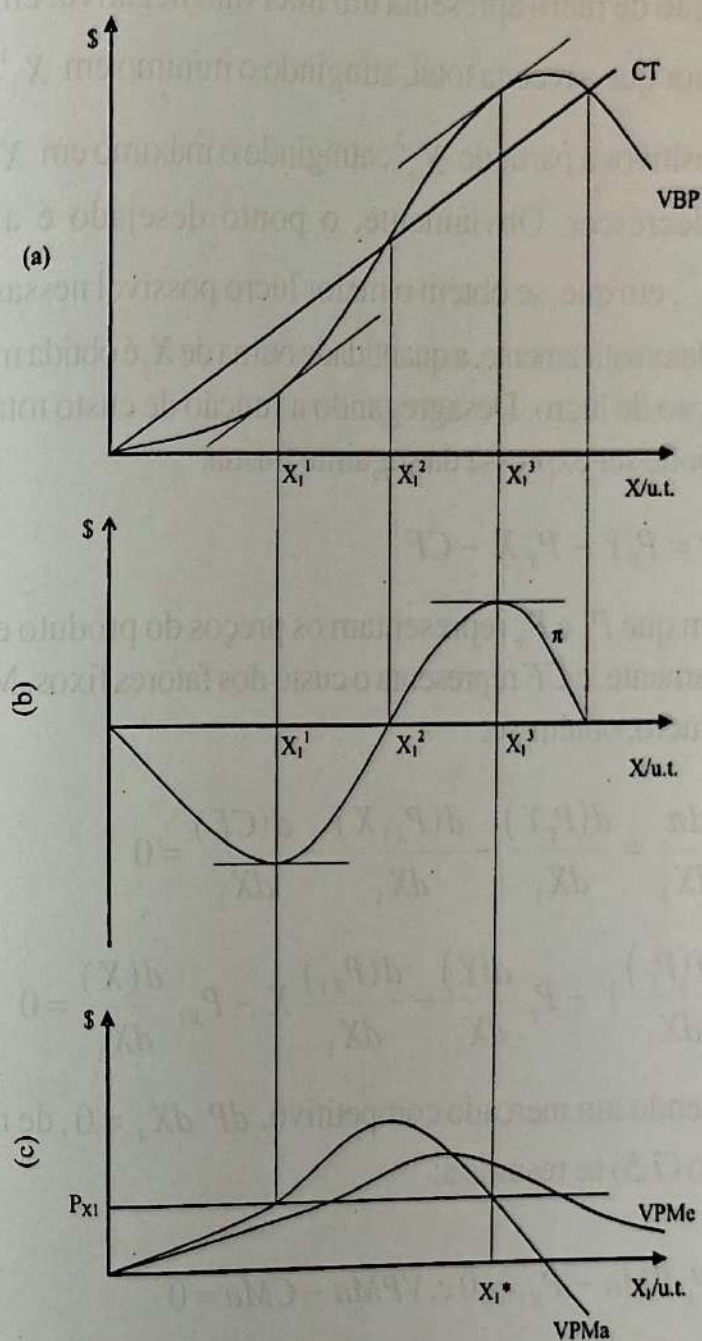



Figura 7.2 - Curvas de valor bruto da produção, custo total, lucro, valor do produto marginal e valor do produto médio.

Definindo-se o lucro como:

$$\pi = RT - CT \tag{7.3}$$

obtém-se a curva de lucro, apresentada na Figura 7.2b. Pode-se observar que a função de lucro apresenta um intervalo negativo, em que o custo total é maior que a receita total, atingindo o mínimo em $X_1^{\ 1}$, passando a valores positivos a partir de $X_1^{\ 2}$, atingindo o máximo em $X_1^{\ 3}$, passando então a decrescer. Obviamente, o ponto desejado é a quantidade $X_1^{\ 3} = X_1^{\ *}$, em que, se obtém o maior lucro possível nessas condições.

Matematicamente, a quantidade ótima de X_1 é obtida maximizando-se a equação de lucro. Desagregando a função de custo total, a equação de lucro pode ser expressa da seguinte forma:

$$\pi = P_Y Y - P_X X - CF \tag{7.4}$$

em que P_Y e P_X representam os preços do produto e dos fatores, respectivamente, e CF representa o custo dos fatores fixos. Maximizando a função lucro, obtém-se:

$$\frac{d\pi}{dX_1} = \frac{d(P_Y Y)}{dX_1} - \frac{d(P_{X1} X)}{dX_1} - \frac{d(CF)}{dX_1} = 0$$

$$\frac{d(P_Y)}{dX_1} Y + P_Y \frac{d(Y)}{dX_1} - \frac{d(P_{X1})}{dX_1} X - P_{X1} \frac{d(X)}{dX_1} = 0 \tag{7.5}$$

Sendo um mercado competitivo, $dP/dX_1 = 0$, de modo que a expressão (7.5) se resume a:

$$P_Y PMa - P_{X1} = 0 \therefore VPMa - CMa = 0 \tag{7.6}$$

$$P_Y PMa = P_{X1} \therefore PMa = \frac{P_{X1}}{P_Y} \therefore \tag{7.7}$$

$$VPMa = P_{X1} \tag{7.8}$$

Pela expressão (7.8), tem-se que o valor do produto marginal

(VPMa) é igual ao preço do fator X_1, e, pela expressão (7.7), o produto marginal (PMa) é igual à razão dos preços. É interessante notar, pela expressão (7.7), que o ponto de máximo lucro corresponde ao ponto de máximo produto somente se o preço do fator for nulo. Nesse caso, trata-se de recurso livre e não faz sentido a análise econômica.

As expressões (7.6) e (7.7) definem apenas o(s) ponto(s) crítico(s) da função lucro, que, conforme apresentado na Figura 7.2b, pode ser mais de um. Pode-se observar pela Figura 7.2c que a curva de custo marginal (P_X) cruza a curva do valor do produto marginal em dois pontos. Desse modo, para garantir que a quantidade encontrada seja aquela que garanta o máximo lucro, é necessário fazer o teste da derivada segunda. Para que o ponto crítico seja um ponto de máximo, a derivada segunda deve ser negativa. Tomando-se a expressão (7.6):

$$\frac{d(VPMa - CMa)}{dX_1} < 0 \therefore$$

$$\frac{d(VPMa)}{dX_1} - \frac{d(CMa)}{dX_1} < 0 \therefore \frac{d(VPMa)}{dX_1} < 0 \qquad (7.9)$$

Por ser a firma tomadora de preços, o segundo termo da expressão (7.9) é nulo, de modo que, para que o ponto crítico encontrado pela expressão (7.6) seja um ponto de máximo, a produção deve se situar na fase decrescente da curva do valor do produto marginal. A razão está no fato de que na fase crescente da curva do valor do produto marginal o custo total normalmente é maior que a receita total, devido ao maior peso dos custos fixos em relação aos custos variáveis, fazendo com que o lucro nesta fase seja negativo. Dessa forma, a maximização do lucro se dará numa fase de maior produção, quando os retornos já são decrescentes[6].

Uma vez definido o intervalo em que ocorrerá a maximização do

[6] Existem situações em que é justificável se produzir na fase crescente da curva do valor do produto marginal. Esta situação será discutida no capítulo que trata de Mercados Imperfeitos. A demonstração matemática para que a maximização do lucro ocorra na região da curva de produto total com retornos decrescentes encontra-se na seção Exercícios Resolvidos.

lucro, pode-se então definir o estágio racional de produção, o que é feito através da elasticidade de produção do fator variável X_l, que é definida como:

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta\% Y}{\Delta\% X} = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} \qquad (7.10)$$

De acordo com as expressões (7.1) e (7.2), a elasticidade pode ser expressa como:

$$\varepsilon_X = \frac{PMa}{PMe} \qquad (7.11)$$

A expressão (7.11)[7] facilita a definição dos estágios de produção, que estão representados na Figura 7.3. No estágio I, o produto marginal é maior que o produto médio, e a elasticidade de produção é maior que 1. Isso indica que a variação de 1% em X_l leva a variações na produção maiores que 1%. Assim, não é racional produzir neste estágio, já que o aumento da receita é maior que o aumento nos custos. A firma deve elevar a produção. No estágio III, o produto marginal é negativo, de modo que a elasticidade de produção também é negativa. Além do mais, neste estágio, já se ultrapassou inclusive o ponto de produção máxima. Resta então o estágio II, em que o produto marginal é menor que o produto médio e a elasticidade de produção se situa entre zero e a unidade. Variações de 1% na quantidade de insumos causam variações menores que 1% na produção, mas positivas. O limite do primeiro para o segundo estágio ocorre quando o produto marginal é igual ao produto médio e a elasticidade de produção é igual à unidade. A partir deste ponto, a curva do produto médio passa a ser decrescente, porém sua inclinação é menor que a curva do produto marginal. O limite do segundo para o terceiro estágio ocorre

[7] Esta expressão poderia também ser definida em função do valor do produto marginal e valor do produto médio, bastando multiplicar ambos os termos por P_y, o que não alteraria o resultado.

no ponto de máxima produção, e a elasticidade de produção é igual a zero.

Definindo-se a função de produção $Y = f(X_1)$, podem-se estabelecer as funções de demanda do fator X_1 e de oferta do produto Y. O desenvolvimento matemático dessas funções encontra-se na seção exercícios resolvidos.

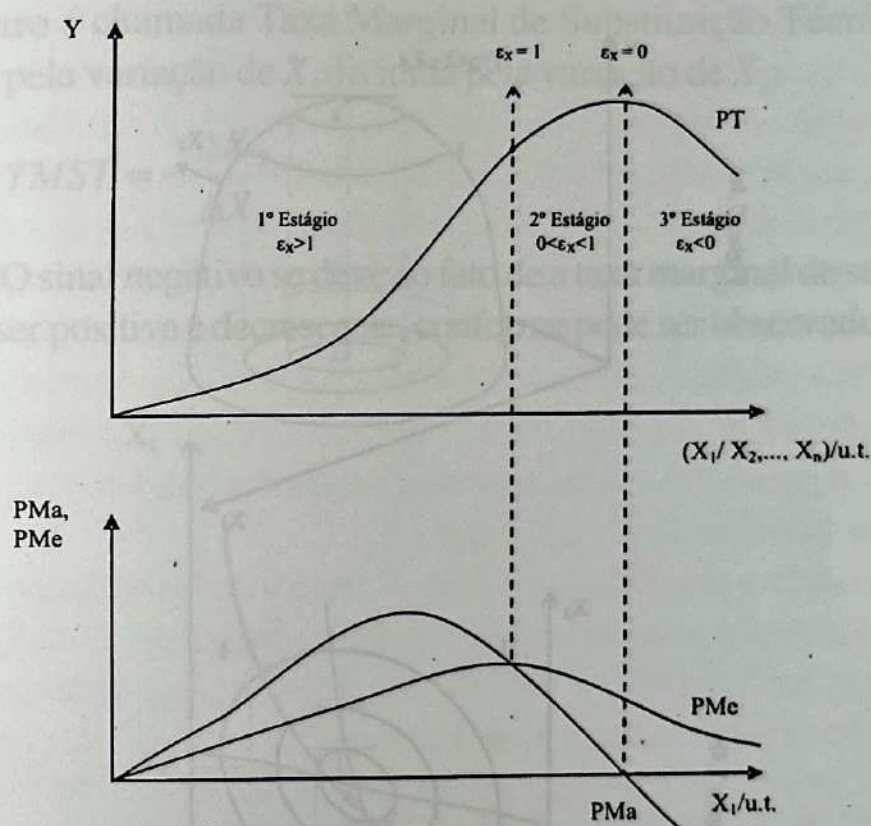



Figura 7.3 - Estágios de produção definidos a partir da elasticidade de produção

7.3. O modelo fator-fator

Trata-se de um modelo de longo prazo em que todos os fatores podem variar ao longo do tempo. Para representar a função de produção, considere-se que todos os insumos possam ser agregados em dois únicos fatores de produção, que vão determinar a função de produção. A Figura

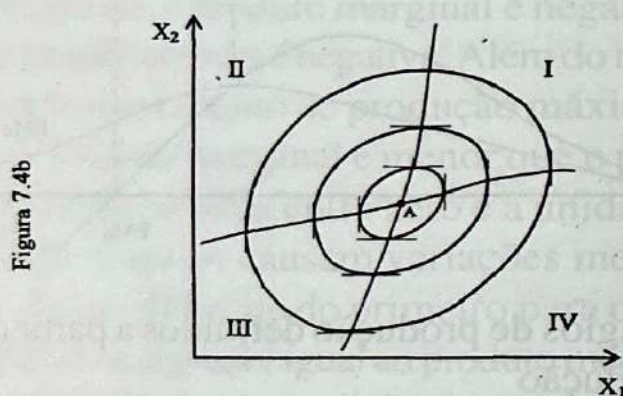
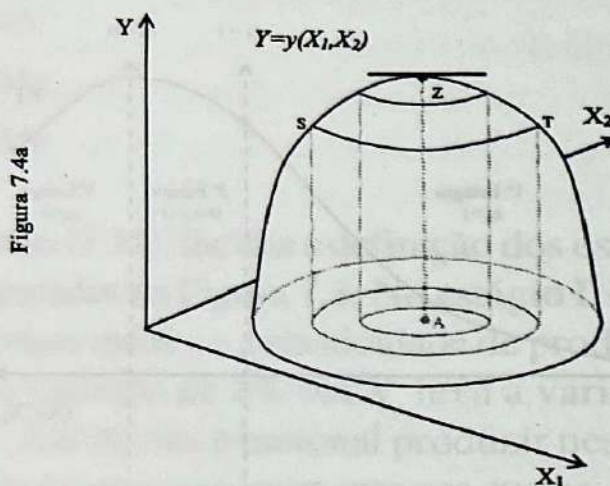
7.4a apresenta uma função de produção côncava[8] com dois fatores (X_1 e X_2) no plano tridimensional, em que a produção Y é representada pela superfície de produção. Ao longo da superfície de produção existem pontos que correspondem ao mesmo nível de produção mesmo com diferentes combinações dos fatores X_1 e X_2, como no caso do arco ST. Projetando esses pontos no plano X_1 X_2, obtêm-se as isoquantas, conforme representado na Figura 7.4b. O ponto A equivale ao ponto Z, que é o Máximo Global de Produto possível para uma determinada tecnologia.

Fonte: Adaptado de Binger e Hoffman (1998).

Figura 7.4 - Derivação das isoquantas no plano X_1X_2 a partir da função de produção $Y=y(X_1, X_2)$.

[8] O formato das isoquantas vai depender da tecnologia empregada, que corresponde à forma funcional utilizada. Mais adiante serão apresentados alguns tipos de função de produção e suas respectivas isoquantas.

A isoquanta representa pontos de mesma produção de Y, porém com a utilização de diferentes combinações dos fatores de produção. Assim, pode-se obter a produção de Y utilizando-se X_1^1 do fator X_1 e X_2^1 do fator X_2, produzindo-se no ponto 1, na Figura 7.5. Pode-se produzir a mesma quantidade de Y no ponto 2, utilizando-se agora as quantidades X_1^2 e X_2^2 dos respectivos fatores. Movendo-se ao longo da isoquanta, mantém-se a mesma quantidade de produto, diminuindo a quantidade de X_2 e aumentando a quantidade de X_1. A taxa de substituição de um fator pelo outro é chamada Taxa Marginal de Substituição Técnica, sendo medida pela variação de X_2 dividida pela variação de X_1:

$$TMST = -\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} \qquad (7.12)$$

O sinal negativo se deve ao fato de a taxa marginal de substituição técnica ser positiva e decrescente, conforme pode ser observado na Figura 7.5[9].

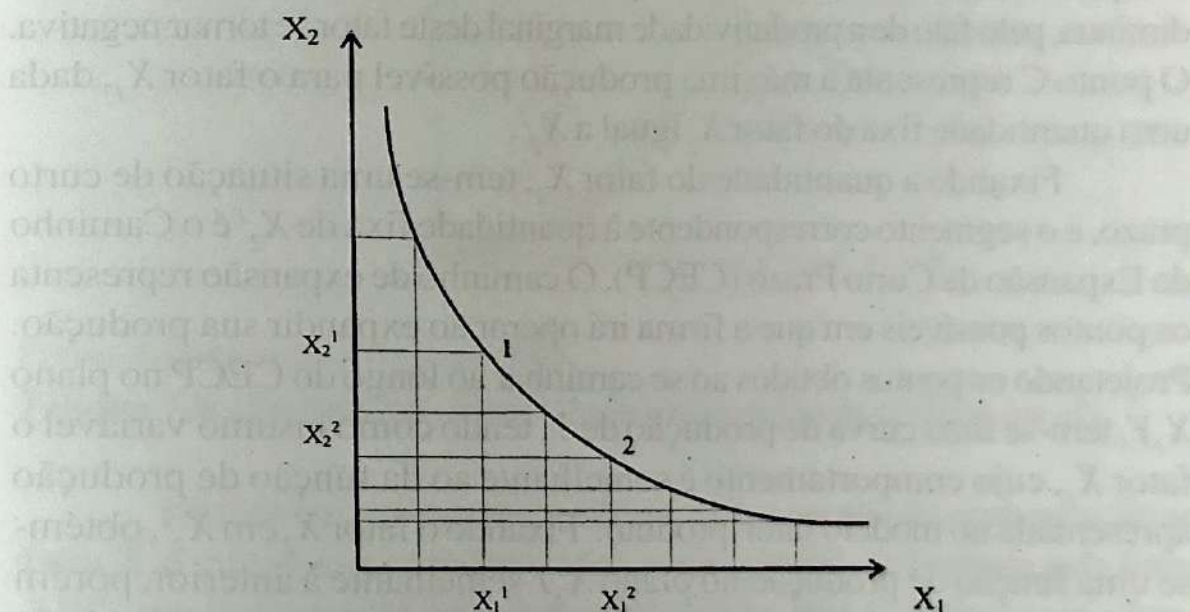



Figura 7.5 - Taxa marginal de substituição técnica.

[9] Como as variações de X_2 são negativas, se não se acrescentar o sinal, a TMST seria negativa e crescente.

Sendo $\partial Y/\partial X_1 = y_1$ e $\partial Y/\partial X_2 = y_2$, pode-se definir a diferencial total de Y em relação aos fatores de produção como:

$$dY = y_1 dX_1 + y_2 dX_2 \qquad (7.13)$$

Como ao longo da isoquanta $dY = 0$, tem-se:

$$-\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{y_1}{y_2} \qquad (7.14)$$

ou seja, a TMST é igual à razão das produtividades marginais dos fatores.

Da mesma forma que no modelo fator-produto, é possível definir uma região racional de produção. Para definir o intervalo racional do fator X_1, fixa-se inicialmente o fator X_2 em X_2^1 (Figura 7.6a). À medida que se aumenta a quantidade de X_1, atinge-se isoquantas cada vez maiores, indicando que a produção está aumentando, até atingir o máximo de produto para o fator X_1, representado pelo ponto C. A partir deste ponto, em que a PMa é nula, quantidades maiores de X_1 farão com que a produção diminua, pelo fato de a produtividade marginal deste fator se tornar negativa. O ponto C representa a máxima produção possível para o fator X_1, dada uma quantidade fixa do fator X_2 igual a X_2^1.

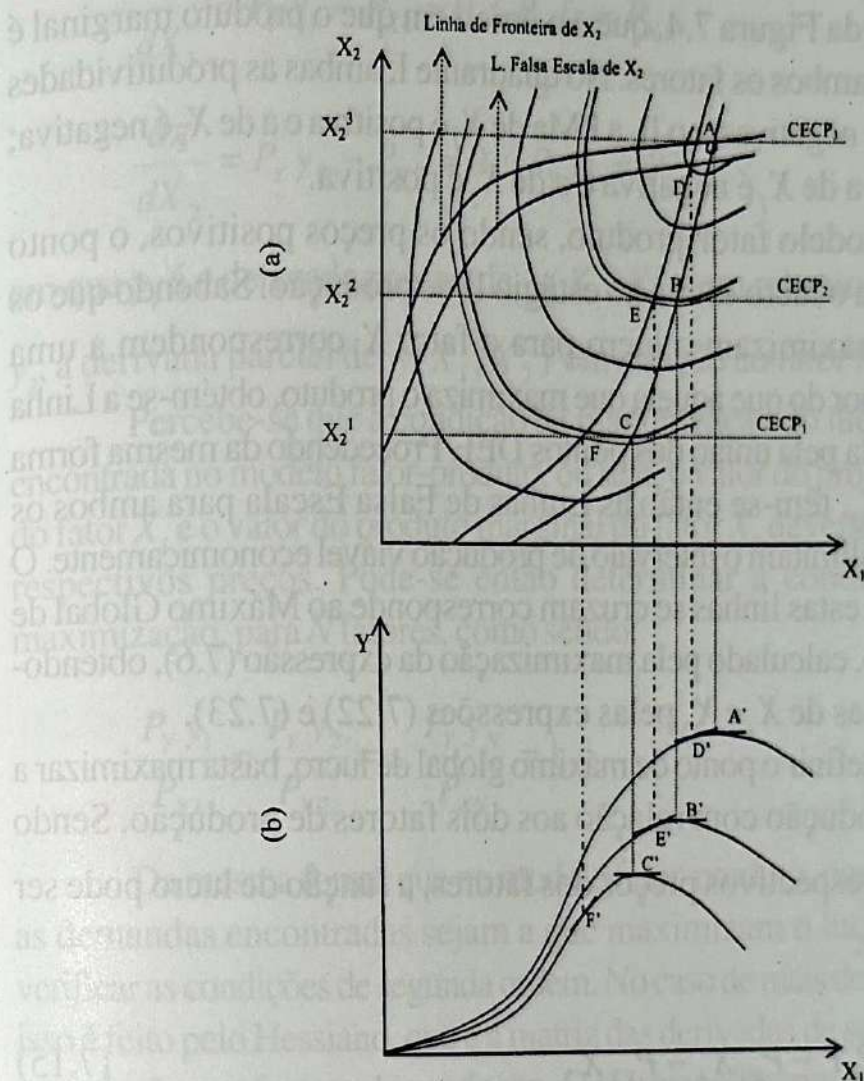
Fixando a quantidade do fator X_2, tem-se uma situação de curto prazo, e o segmento correspondente à quantidade fixa de X_2^1 é o Caminho de Expansão de Curto Prazo (CECP). O caminho de expansão representa os pontos possíveis em que a firma irá operar ao expandir sua produção. Projetando os pontos obtidos ao se caminhar ao longo do CECP no plano X_1Y, tem-se uma curva de produção de Y, tendo como insumo variável o fator X_1, cujo comportamento é semelhante ao da função de produção apresentada no modelo fator-produto. Fixando o fator X_2 em X_2^2, obtém-se uma função de produção no plano X_1Y semelhante à anterior, porém com maior produto médio para cada unidade de X_1, já que a quantidade do fator X_2 agora é maior. Fixando o nível de X_2 em X_2^3, pode-se então obter a produção máxima possível, dada determinada tecnologia, que corresponde ao ponto A. Para cada quantidade fixa de X_2, tem-se um caminho de expansão de curto prazo.

Fonte: Adaptado de Debertin (1986).

Figura 7.6 - Isoquantas, linhas de fronteira e linhas de falsa escala.

Define-se então o intervalo em que a produção com relação ao fator X_1 é viável tecnicamente como sendo a região delimitada pela linha ABC, que é chamada Linha de Fronteira (ou Linha de *Ridge*) para o fator X_1. Essa linha tem como característica o fato de a produtividade marginal do fator X_1 ser igual a zero e representa o máximo de produto para o fator X_1, dado determinado nível de X_2. Procedendo de forma análoga, pode-se encontrar a linha de fronteira para o fator X_2.

A região delimitada pelas linhas de fronteira corresponde ao quadrante III da Figura 7.4, que é o único em que o produto marginal é positivo para ambos os fatores. No quadrante I, ambas as produtividades marginais são negativas; no II, a PMa de X_1 é positiva e a de X_2 é negativa; e no IV, a PMa de X_1 é negativa e a de X_2 é positiva.

No modelo fator-produto, sendo os preços positivos, o ponto que maximiza o lucro estará no estágio II de produção. Sabendo que os pontos que maximizam o lucro para o fator X_1 correspondem a uma produção menor do que aquela que maximiza o produto, obtém-se a Linha de Falsa Escala pela união dos pontos DEF. Procedendo da mesma forma para o fator X_2, têm-se então as Linhas de Falsa Escala para ambos os fatores, que delimitam o intervalo de produção viável economicamente. O ponto em que estas linhas se cruzam corresponde ao Máximo Global de Lucro (MGL), calculado pela maximização da expressão (7.6), obtendo-se as demandas de X_1 e X_2 pelas expressões (7.22) e (7.23).

Para definir o ponto de máximo global de lucro, basta maximizar a função de produção com relação aos dois fatores de produção. Sendo P_{X1} e P_{X2} os respectivos preços dos fatores, a função de lucro pode ser definida como:

$$\pi = P_Y Y - P_{X1} X_1 - P_{X2} X_2 \qquad (7.15)$$

Definindo a tecnologia de produção como sendo $Y = y(X_1, X_2)$, tem-se:

$$\pi = P_Y \left(y(X_1, X_2) \right) - P_{X1} X_1 - P_{X2} X_2 \qquad (7.16)$$

Para maximizar o lucro, basta derivar (7.6) em relação às variáveis X_1 e X_2:

$$\frac{d\pi}{dX_1} = P_Y y_1 - P_{X1} = 0 \therefore P_Y f_1 = P_{X1} \quad (7.17)$$

$$\frac{d\pi}{dX_2} = P_Y y_2 - P_{X2} = 0 \therefore P_Y f_2 = P_{X2} \quad (7.18)$$

em que y_1 é a derivada parcial de $y(X_1, X_2)$ em relação ao fator X_1, e y_2, a derivada parcial de $y(X_1, X_2)$ em relação ao fator X_2.

Percebe-se que a condição de maximização do lucro é a mesma encontrada no modelo fator-produto, ou seja, o valor do produto marginal do fator X_1 e o valor do produto marginal do fator X_2 devem ser iguais aos respectivos preços. Pode-se então determinar a condição geral de maximização, para N fatores, como sendo:

$$\frac{P_Y y_1}{P_{X1}} = \frac{P_Y y_2}{P_{X2}} = \ldots \frac{P_Y y_N}{P_{XN}} = 1 \quad (7.19)$$

Da mesma forma que no modelo fator-produto, para garantir que as demandas encontradas sejam a que maximizam o lucro, devem-se verificar as condições de segunda ordem. No caso de mais de uma variável, isso é feito pelo Hessiano, que é a matriz das derivadas de segunda ordem em relação aos fatores de produção. O Hessiano[10] seria:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{(\partial X_1)^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial X_2 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 \pi}{(\partial X_2)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_Y y_{11} & P_Y y_{12} \\ P_Y y_{21} & P_Y y_{22} \end{vmatrix} \quad (7.20)$$

Para garantir que o ponto encontrado seja o que maximiza o lucro, as condições do Hessiano são:

[10] Mais detalhes sobre as condições de segunda ordem para funções com mais de uma variável podem ser encontrados em Chiang (1982, p. 281).

$$\begin{matrix} H_1 < 0 \\ H_2 > 0 \end{matrix} \quad (7.21)$$

em que $H_1 = y_{11} < 0$; e $H_2 = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} > 0$. Pelo Teorema de Young, $y_{12} = y_{21}$, tem-se que, para que as condições de máximo sejam atendidas, é necessário que y_{11} e y_{22} sejam negativos, ou seja, que o valor do produto marginal para ambos os fatores seja decrescente.

As condições de maximização do lucro permitem obter as demandas dos fatores. Isolando X_1 em (7.17) e substituindo em (7.18), obtém-se a demanda do fator X_2. Fazendo o mesmo para X_2 em (7.18) e substituindo em (7.17), obtém-se a demanda do fator X_1. Assim:

$$X_1 = x_1(P_{X1}, P_{X2}, P_Y) \quad (7.22)$$

$$X_2 = x_2(P_{X2}, P_{X1}, P_Y) \quad (7.23)$$

As quantidades dos fatores X_1 e X_2 encontradas pelas funções de demanda em (7.22) e (7.23) são aquelas necessárias para as firmas atingirem o máximo lucro, dada determinada tecnologia.

Substituindo as demandas dos fatores na equação (7.15), obtém-se a função lucro, definida em termos dos preços dos fatores e preço do produto:

$$\pi = \pi(P_Y, P_{X1}, P_{X2}) \quad (7.24)$$

A função lucro é contínua e diferenciável nos preços dos fatores e do produto, linearmente homogênea nos preços e convexa nos preços (HERTEL, 1984).

Derivando (7.24) em relação ao preço do produto, obtém-se a função de oferta do produto:

$$\frac{d\pi}{dP_Y} = y(P_Y, P_{X1}, P_{X2}) \quad (7.25)$$

Derivando (7.24) em relação ao preço dos fatores, encontram-se as mesmas demandas encontradas em (7.22) e (7.23). A importância da obtenção dessas demandas diretamente através da função lucro em (7.24) está no fato de que a obtenção direta das demandas por meio da substituição em (7.17) e (7.18) costuma ser um processo trabalhoso. Como a expressão (7.24) pode ser obtida de outra forma, conforme será mostrado mais adiante, a obtenção das demandas dos fatores por meio da derivação da função lucro em relação aos respectivos preços pode ser de grande utilidade. Assim:

$$-\frac{d\pi}{dP_{X1}} = X_1 = x_1(P_{X1}, P_{X2}, P_Y) \qquad (7.26)$$

$$-\frac{d\pi}{dP_{X1}} = X_1 = x_1(P_{X1}, P_{X2}, P_Y) \qquad (7.27)$$

As funções de demanda e de oferta são homogêneas de grau zero nos preços dos fatores e do produto, respectivamente (HERTEL, 1984).

O ponto de máximo global de lucro corresponde ao ponto ótimo de produção da firma no longo prazo, dada uma determinada tecnologia. A operação neste ponto pela firma requer que ela tenha recursos suficientes para adquirir todos os fatores necessários, o que muitas vezes não acontece. A firma deve então decidir o quanto produzir levando em conta a sua restrição orçamentária, que é a quantidade de recursos de que a firma dispõe para a aquisição dos fatores de produção. Não sendo possível atingir o máximo global de lucro, a firma deve decidir que quantidade de cada fator deve ser adquirida para lhe proporcionar o maior lucro possível. Graficamente, a situação pode ser representada como na Figura 7.7.

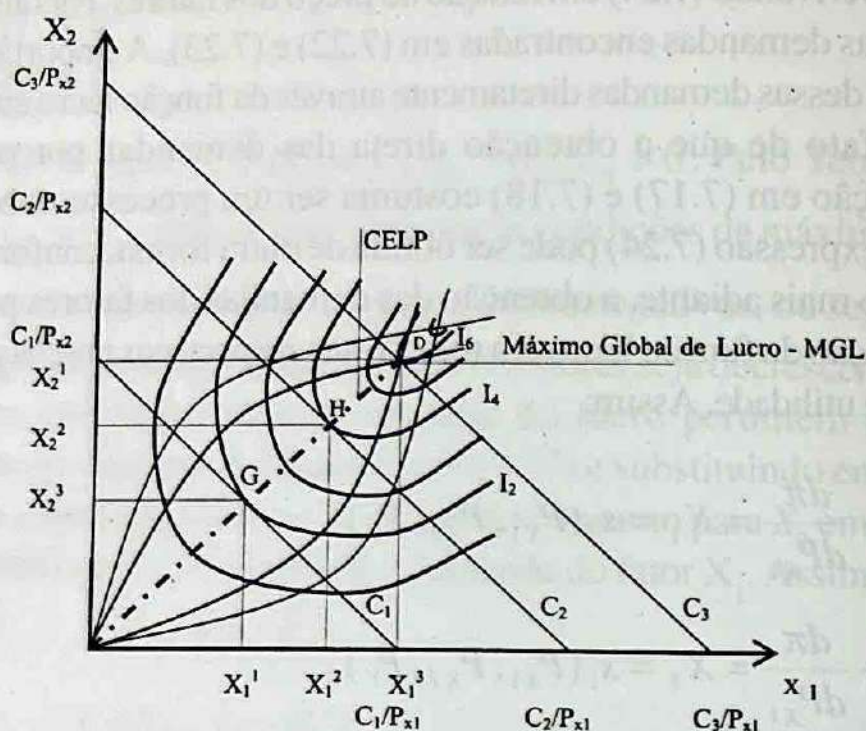



Figura 7.7 - Quantidade produzida pela firma, dada uma restrição orçamentária

Considere-se que a firma tenha recursos equivalentes a C, que corresponde ao custo de determinado nível de produção, menores que o MGL. Dados os preços dos fatores iguais a P_{X1} e P_{X2}, a firma irá definir a quantidade de ambos os fatores, procurando atingir a maior isoquanta possível. Sendo a curva de custos da firma dada por $C = P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2$ e assumindo-se isoquantas convexas, a maior produção possível ocorrerá no ponto em que a curva de custos tangenciar a maior isoquanta[11]. Neste ponto, a taxa marginal de substituição técnica é igual à inclinação da curva

[11] Esta condição pode ser demonstrada através do conceito de conjunto convexo, apresentado no capítulo da teoria do consumidor.

de custos e à inclinação da isoquanta. Se a firma tiver disponibilidade de recursos equivalente a C_1, este ponto ocorrerá em G, em que a curva de custos tangencia a isoquanta I_2. Mantendo constantes os preços, aumentando-se a disponibilidade de recursos para C_2, a firma irá operar em H, em que a curva de custos tangencia a isoquanta I_4. Aumentando os recursos para C_3, a firma poderá operar em D, tangenciando a isoquanta I_6 no máximo global de lucro. O conjunto de pontos de produção que maximizam o lucro, dada uma restrição de custos que não permita à firma atingir o MGL, é chamado de Caminho de Expansão de Longo Prazo (CELP), que são os pontos onde a firma irá operar ao expandir sua produção, podendo variar todos os fatores. O CELP tem como principal característica o fato de a taxa marginal de substituição técnica ser igual à razão dos preços[12].

Matematicamente, o problema pode ser formulado maximizando-se o Valor Bruto da Produção: $VBP = P_y.y(X_1, X_2)$ [13], sujeito ao custo total dos fatores $C \geq P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2$, ou seja:

$$\begin{aligned} &Max.: VBP = P_y.y(X_1, X_2) \\ &S.a.: C \geq P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2 \end{aligned} \qquad (7.28)$$

Solucionando o problema através do Lagrangeano, tem-se:

$$L = P_y.y(X_1, X_2) + \lambda(C - P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2) \qquad (7.29)$$

[12] O Caminho de Expansão de Longo Prazo (CELP) é um tipo especial de Isoclina, que é uma curva que liga os pontos que possuem a mesma Taxa Marginal de Substituição Técnica (TMST). No caso do CELP, além de possuir a mesma TMST é igual à razão dos preços.

[13] As isoquantas observadas na Figura 7.7 representam a produção física. Ao multiplicar a função de produção pelo preço do produto, tem-se uma transformação monotônica da função, o que não altera os resultados obtidos. A maximização da receita (ou do produto) representa os pontos que maximizam o lucro da firma, enquanto o custo de produção for tal que não permita à firma atuar no máximo global de lucro. No entanto, se não houver restrição, a maximização da receita (produto) poderá levar a firma a atuar além do Máximo Global de Lucro. Esse é um dos motivos que fazem com que a maximização da receita (produto) não seja muito utilizada. Na seção Exercícios Resolvidos será apresentado um exemplo que ilustra essa situação.

Derivando-se o Lagrangeano em relação aos fatores X_1 e X_2 obtém-se a condição de maximização da produção:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = P_y.y_1 - \lambda P_{X1} = 0 \therefore \lambda = \frac{P_y.y_1}{P_{X1}} \tag{7.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = P_y.y_2 - \lambda P_{X2} = 0 \therefore \lambda = \frac{P_y.y_2}{P_{X2}} \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2 = 0 \tag{7.32}$$

em que y_i representa a derivada primeira dos respectivos fatores.

Tem-se então a condição de maximização do lucro da firma, dada uma restrição orçamentária, como sendo:

$$\lambda = \frac{P_y y_1}{P_{X1}} = \frac{P_y y_2}{P_{X2}} = ... = \frac{P_y y_N}{P_{XN}} \tag{7.33}$$

ou seja, os valores do produto marginal dos fatores devem ser iguais a λ. Sendo a produtividade marginal dos fatores decrescentes, λ é maior que a unidade, já que o nível de produção é inferior ao MGL.

As condições de segunda ordem são verificadas através do Hessiano Orlado[14], que é obtido derivando-se cada condição de primeira ordem em relação às variáveis:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{(\partial X_1)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{(\partial X_2)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{(\partial \lambda)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_Y y_{11} & P_Y y_{12} & -P_{X1} \\ P_Y y_{21} & P_Y y_{12} & -P_{X2} \\ -P_{X1} & -P_{X2} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

[14] Mais detalhes sobre as condições de segunda ordem para funções com mais de uma variável podem ser encontrados em Chiang (1982, p. 281).

No caso do Hessiano Orlado, o primeiro menor principal válido é H_3 e a condição de máximo é atendida se $H_3 > 0$.

Tomando o valor de λ em (7.30) e (7.31), obtém-se a expressão:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{P_{X1}}{P_{X2}} \tag{7.34}$$

que corresponde à condição de maximização da produção, dada uma restrição orçamentária. De acordo com a expressão (7.34), a taxa marginal de substituição Técnica, dada pela razão das produtividades marginais deve ser igual à razão dos preços, conforme observado na Figura 7.7. Isolando X_2 na expressão (7.34), obtém-se a função do caminho de expansão de longo prazo.

Isolando X_1 em (7.34) e substituindo em (7.32), obtém-se a demanda indireta do fator X_1. Fazendo o mesmo para X_2, encontra-se a demanda indireta do fator X_2. Assim:

$$X_1 = x_1(P_{X1}, P_{X2}, C) \tag{7.35}$$

$$X_2 = x_2(P_{X1}, P_{X2}, C) \tag{7.36}$$

Substituindo as demandas indiretas na função de produção, <u>sem multiplicar pelo preço do produto</u>, obtém-se a função indireta de custo[15]:

$$Y = y(P_{X1}, P_{X2}, C) \tag{7.37}$$

Aplicando o teorema de Roy, deriva-se a função indireta de custo em relação aos preços dos fatores, obtendo-se as demandas indiretas dos fatores encontradas em (7.35) e (7.36).

$$-\frac{\partial Y/\partial P_{X1}}{\partial Y/\partial C} = x_1(P_{X1}, P_{X2}, C) \tag{7.38}$$

$$-\frac{\partial Y/\partial P_{X2}}{\partial Y/\partial C} = x_2(P_{X1}, P_{X2}, C) \tag{7.39}$$

[15] Esta função é chamada função indireta de custo porque, invertendo-a, obtém-se a função de custo de longo prazo, derivada da minimização de custos condicionada a uma quantidade de produto, que será vista no próximo capítulo.

A maximização da produção sujeita a uma restrição de custos é chamada de problema primal. Sua utilização, no entanto, é bastante restrita, sendo normalmente utilizado o problema dual, que corresponde à minimização do custo, sujeito a determinado nível de produção, que será apresentado no próximo capítulo.

O mapa de isoquantas e a condição de maximização poderão apresentar algumas particularidades, dependendo da forma funcional. Na Figura 7.8 são apresentados os mapas de isoquantas de outras formas funcionais. A Figura 7.8a representa uma função de produção decrescente na utilização dos fatores, que não tem o ponto de máximo global de produto. A Figura 7.8b representa uma forma funcional na qual os fatores são substitutos perfeitos, e a firma opta pela utilização do fator que tiver o menor preço. Sendo os preços dos fatores iguais, poderá escolher entre utilizar ambos os fatores ou apenas um deles. A Figura 7.8c representa a tecnologia na qual os fatores são complementares perfeitos e, portanto, utilizados na mesma proporção. Alteração na relação de preços, mantida a disponibilidade de recursos constante, não modifica a proporção de uso dos fatores. Essa tecnologia é conhecida como função de produção do tipo Leontief[16].

7.3. Funções de produção homogêneas

O grau de homogeneidade da função determina o retorno à produção com relação ao uso dos fatores. Seja:

$$Y = y(X_1, X_2) \tag{7.40}$$

Se a função é homogênea, ao multiplicar os fatores por uma constante t, a função de produção será também multiplicada por t^n.

$$t^n Y = y(tX_1, tX_2) \tag{7.41}$$

[16] Mais detalhes a respeito de diferentes formas funcionais podem ser encontrados em Debertin (1986).

O expoente n determinará o grau de homogeneidade da função. Assim, funções homogêneas de grau igual à unidade apresentam retornos constantes à escala; de grau menor que a unidade, retornos decrescentes; e maior que unidade, retornos crescentes. Para verificar o grau de homogeneidade da função, multiplicam-se os fatores por uma constante qualquer e verifica-se a alteração no produto.

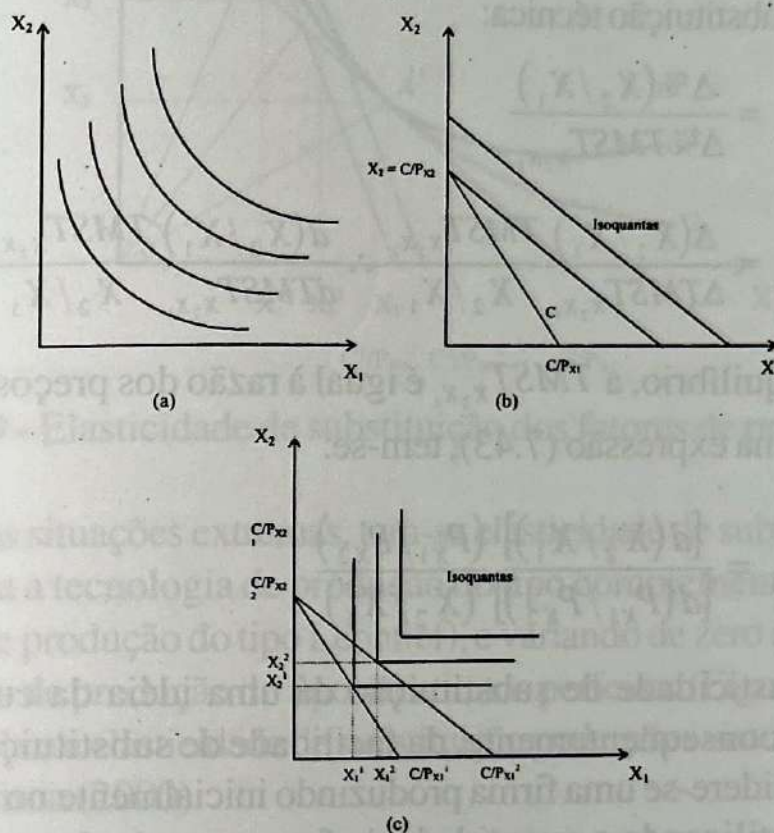



Figura 7.8 - Outras formas funcionais.

Para funções homogêneas, é possível aplicar o teorema de Euler, segundo o qual a soma da produtividade marginal de cada fator multiplicado pela sua respectiva quantidade é igual ao grau de homogeneidade multiplicado pelo produto:

$$y_1 X_1 + y_2 X_2 = nY \tag{7.42}$$

em que y_1 e y_2 representam as produtividades marginais dos fatores X_1 e X_2, respectivamente.

Por meio do teorema de Euler, é possível demonstrar algumas assertivas da teoria da produção.

7.4. Elasticidade de substituição

A elasticidade de substituição corresponde à variação percentual na razão dos fatores de produção, dada uma variação percentual na taxa marginal de substituição técnica:

$$\sigma_{X_2X_1} = \frac{\Delta\%(X_2/X_1)}{\Delta\%TMST_{X_2X_1}}$$

$$\sigma_{X_2X_1} = \frac{\Delta(X_2/X_1)}{\Delta TMST_{X_2X_1}} \frac{TMST_{X_2X_1}}{X_2/X_1} \therefore \frac{d(X_2/X_1)}{dTMST_{X_2X_1}} \frac{TMST_{X_2X_1}}{X_2/X_1} \quad (7.43)$$

No equilíbrio, a $TMST_{X_2X_1}$ é igual à razão dos preços P_{X1}/P_{X2}. Substituindo na expressão (7.43), tem-se:

$$\sigma_{X_2X_1} = \frac{[d(X_2/X_1)]}{[d(P_{X1}/P_{X2})]} \frac{(P_{X1}/P_{X2})}{(X_2/X_1)} \quad (7.44)$$

A elasticidade de substituição dá uma idéia da curvatura da isoquanta e, conseqüentemente, da facilidade de substituição entre os fatores. Considere-se uma firma produzindo inicialmente no ponto A da Figura 7.9, utilizando a quantidade de fatores equivalentes a X_1 e X_2. Supondo um aumento de preço de P_{X1} para P_{X1}^1, para manter o mesmo nível de produção, utilizando-se a tecnologia representada pela isoquanta 1, a firma irá produzir em B (Figura 7.9). Se a firma utiliza a tecnologia representada pela isoquanta 2, produzirá em C. Medindo a razão X_2/X_1 pela tangente do ângulo formado pelo segmento que parte da origem até os pontos de equilíbrio, percebe-se que a variação ocorrida na razão entre os fatores foi maior para a tecnologia representada pela isoquanta 1. Sendo a variação nos preços a mesma, a elasticidade de substituição será maior para a tecnologia 1. Como conseqüência, a firma consegue manter o mesmo nível de produção a um custo menor, já que pode utilizar mais aquele fator que não teve seu preço aumentado.

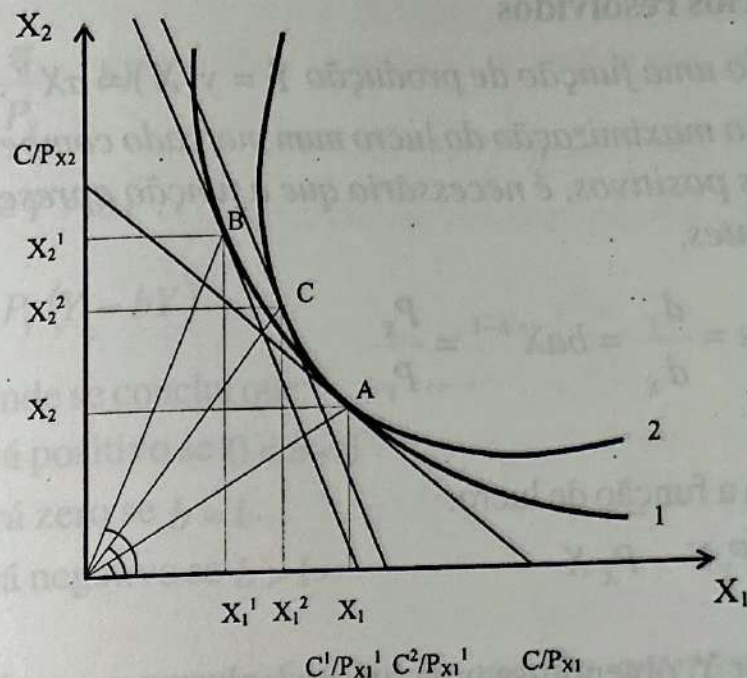



Figura 7.9 - Elasticidade de substituição dos fatores de produção

Nas situações extremas, tem-se elasticidade de substituição igual a zero, para a tecnologia de produção do tipo complementares perfeitos (funções de produção do tipo Leontief), e variando de zero a infinito, para tecnologias de produção do tipo substitutos perfeitos (Figura 7.10). Mais detalhes sobre a elasticidade de substituição podem ser vistos em Debertin (1986) e Lima (2000).

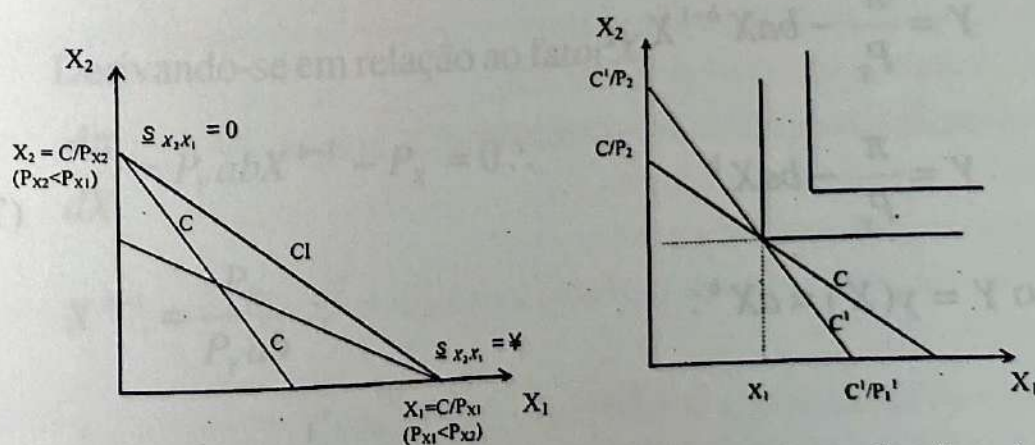



Figura 7.10 - Elasticidade de substituição para tecnologias do tipo substitutos perfeitos e complementares perfeitos

7.5. Exercícios resolvidos

1) Utilizando uma função de produção $Y = y(X) = aX^b$, mostre que, para que a maximização do lucro num mercado competitivo resulte em lucros positivos, é necessário que a função apresente retornos decrescentes.

$$PMa = \frac{d_Y}{d_X} = baX^{b-1} = \frac{P_X}{P_Y} \tag{7.45}$$

Dada a função de lucro:

$$\pi = P_Y Y - P_X X \tag{7.46}$$

pode-se isolar Y, obtendo-se uma função isolucro, em que se mantém o lucro constante e o valor do produto varia em função da quantidade do fator X:

$$Y = \frac{\pi}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X \tag{7.47}$$

Sendo a relação de preços igual ao produto marginal, conforme a expressão (7.45):

$$Y = \frac{\pi}{P_Y} - baX^{b-1} X \therefore$$

$$Y = \frac{\pi}{P_Y} - baX^b \tag{7.48}$$

Como $Y = y(X) = aX^b$:

$$Y = \frac{\pi}{P_Y} - bY \therefore$$

$$\frac{\pi}{P_Y} = Y - bY \therefore$$

$$\pi = P_Y(Y - bY)$$

De onde se conclui que:

- O lucro será positivo se $0 < b < 1$.
- O lucro será zero se $b = 1$.
- O lucro será negativo se $b > 1$.

2) *Utilizando-se a mesma função da questão anterior, encontre a função de oferta do produto Y e a função de demanda do fator X.*

Função de demanda do fator X_1

Sendo a função de produção $Y = aX^b$, define-se a função de lucro como:

$$\pi = P_Y Y - P_X X - CF \quad (7.49)$$

$$\pi = P_Y(aX^b) - P_X X - CF \quad (7.50)$$

Derivando-se em relação ao fator *X*:

$$\frac{d\pi}{dX} = P_Y abX^{b-1} - P_X = 0 \therefore$$

$$X^{b-1} = \frac{P_X}{P_Y ab} \therefore$$

$$X = \left(\frac{P_X}{P_Y ab}\right)^{\frac{1}{b-1}} \quad (7.51)$$

Função de oferta do produto

Para se obter a função de oferta, é necessário inverter a função de produção. Sendo $Y = aX^b$, tem-se a inversa de *Y:* $X = (Y/a)^{\frac{1}{b}}$. A equação de lucro pode então ser escrita na forma:

$$\pi = P_Y Y - P_X \left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{1}{b}} - CF$$

$$\frac{d\pi}{dY} = P_Y \frac{dY}{dY} - P_X \frac{1}{b}(Y)^{\frac{1}{b}-1} a^{\left(-\frac{1}{b}\right)} = 0$$

$$P_X \frac{1}{b}(Y)^{\frac{1-b}{b}} a^{\left(-\frac{1}{b}\right)} = P_Y$$

$$Y = \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{\frac{b}{1-b}} b^{\frac{b}{1-b}} a^{\left(\frac{1}{1-b}\right)} \qquad (7.52)$$

3) Dada a função de produção $Y = K^{1/2}L^{1/4}$ *, encontre:*

a. As funções de demanda dos fatores pela maximização do lucro (RT-CT).

b. A função lucro.

c. A função de demanda dos fatores e a função de oferta do produto, aplicando o teorema de Hotelling.

d. As funções indiretas de demanda dos fatores pela maximização condicionada da produção.

e. A função indireta de custo.

f. As funções indiretas de demanda dos fatores, aplicando o teorema de Roy.

g. Considerando C=315, PK=6, PL=4 e P_Y*=30, em que* P_Y *é o preço do produto, encontre a quantidade produzida pela função de oferta e pela função indireta de custo.*

h. Discuta os resultados.

Resolução

a. $\pi = P_Y K^{1/2} L^{1/4} - P_K K - P_L L$ (7.53)

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{1}{2} P_Y K^{-1/2} L^{1/4} - P_K = 0 \therefore K^{1/2} = \frac{P_Y L^{1/4}}{2P_K} \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{1}{4} P_Y K^{1/2} L^{-3/4} - P_L = 0 \therefore L^{3/4} = \frac{P_Y K^{1/2}}{4P_L} \quad (7.55)$$

Verificando as condições de segunda ordem através do Hessiano, tem-se:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{(\partial K)^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \pi}{(\partial L)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} P_Y K^{-3/2} L^{1/4} & \frac{1}{8} P_Y K^{-1/2} L^{-3/4} \\ \frac{1}{8} P_Y K^{-1/2} L^{-3/4} & -\frac{3}{16} P_Y K^{1/2} L^{-7/4} \end{vmatrix}$$

em que $H_1 < 0$ e $H_2 > 0$.

Substituindo $K^{1/2}$ na expressão (7.55):

$$L^{3/4} = \frac{P_Y \left(\frac{P_Y L^{1/4}}{2P_K} \right)}{4P_L}$$

Resolvendo para L, encontra-se a sua função de demanda:

$$L = \frac{P_Y^{\,4}}{64 P_k^{\,2} P_L^{\,2}} \quad (7.56)$$

Substituindo L em (7.54), encontra-se a função de demanda de K:

$$K = \frac{P_Y^{\ 4}}{32P_k^{\ 3}P_L} \tag{7.57}$$

b. Substituindo as funções de demanda de K e L em (7.58), encontra-se a função lucro:

$$\pi = P_Y\left(\frac{P_Y^{\ 4}}{32P_k^{\ 3}P_L}\right)^{1/2}\left(\frac{P_Y^{\ 4}}{64P_k^{\ 2}P_L^{\ 2}}\right)^{1/4} - P_K\left(\frac{P_Y^{\ 4}}{32P_k^{\ 3}P_L}\right) - P_L\left(\frac{P_Y^{\ 4}}{64P_k^{\ 2}P_L^{\ 2}}\right) \tag{7.59}$$

Elevando-se às potências, multiplicando os termos e tirando o mínimo denominador comum, obtém-se a função lucro:

$$\pi = \frac{P_Y^{\ 4}}{64P_K^{\ 2}P_L} \tag{7.60}$$

c. Aplicando o teorema de Hotelling, encontram-se as funções de demandas observadas em (7.56) e (7.57) e a função de oferta do produto:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial P_K} = \frac{P_Y^{\ 4}}{32P_k^{\ 3}P_L} \tag{7.61}$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial P_L} = \frac{P_Y^{\ 4}}{64P_k^{\ 2}P_L^{\ 2}} \tag{7.62}$$

$$-\frac{\partial \pi}{\partial P_Y} = \frac{P_Y^{\ 3}}{16P_k^{\ 2}P_L} \tag{7.63}$$

d. $Max.: K^{1/2}L^{1/4}$

$S.a.: C = P_K K - P_L L$

$$L = K^{1/2}L^{1/4} + \lambda\left(C - P_K K - P_L L\right) \tag{7.64}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/4} - \lambda P_K = 0 \tag{7.65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = \frac{1}{4} K^{1/2} L^{-3/4} - \lambda P_L = 0 \tag{7.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - P_K K - P_L L = 0 \tag{7.67}$$

Verificando-se as condições de segunda ordem:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{(\partial K)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 L}{(\partial L)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial K} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial L} & \frac{\partial^2 L}{(\partial \lambda)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} K^{-3/2} L^{1/4} & \frac{1}{8} K^{-1/2} L^{-3/4} & P_{X1} \\ \frac{1}{8} K^{-1/2} L^{-3/4} & -\frac{3}{16} K^{1/2} L^{-7/4} & P_{X2} \\ P_{X1} & P_{X2} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Dividindo-se (7.65) por (7.66), obtém-se a TMST:

$$\frac{2L}{K} = \frac{P_K}{P_L} \tag{7.68}$$

Isolando L em (7.68), obtém-se a função do caminho de expansão:

$$L = \frac{P_K K}{2 P_L} \tag{7.69}$$

Substituindo (7.69) em (7.67):

$$C - P_K K - P_L \left(\frac{P_K K}{2 P_L} \right) = 0 \tag{7.70}$$

Resolvendo para K, obtém-se a sua função de demanda:

$$K = \frac{2C}{3 P_K} \tag{7.71}$$

Substituindo (7.71) em (7.68) ou (7.69), obtém-se a função indireta de demanda de L:

$$L = \frac{C}{3P_L} \qquad (7.72)$$

e.

Substituindo as funções indiretas de demanda na função objetivo, obtém-se a função indireta de custo:

$$Y = \left(\frac{2C}{3P_K}\right)^{1/2}\left(\frac{C}{3P_L}\right)^{1/4}$$

$$Y = \frac{2^{1/2}C^{3/4}}{3^{3/4}P_K{}^{1/2}P_L{}^{1/4}} \qquad (7.73)$$

f.

Aplicando-se o teorema de Roy, obtêm-se as funções indiretas de demanda dos fatores:

$$-\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial P_K}}{\dfrac{\partial Y}{\partial C}} = \frac{-\dfrac{1}{2}\dfrac{2^{1/2}C^{3/4}P_K{}^{-3/2}}{3^{3/4}P_L{}^{1/4}}}{\dfrac{3}{4}\dfrac{2^{1/2}C^{-1/4}P_K{}^{-1/2}}{3^{3/4}P_L{}^{1/4}}} = \frac{2C}{3P_K} \qquad (7.74)$$

$$-\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial P_L}}{\dfrac{\partial Y}{\partial C}} = \frac{-\dfrac{1}{4}\dfrac{2^{1/2}C^{3/4}P_L{}^{-5/4}}{3^{3/4}P_K{}^{1/2}}}{\dfrac{3}{4}\dfrac{2^{1/2}C^{-1/4}P_L{}^{-1/4}}{3^{3/4}P_K{}^{1/2}}} = \frac{C}{3P_K} \qquad (7.75)$$

Tomando as expressões (7.74) e (7.75), isolando P_K e P_L e substituindo em (7.73), obtém-se a função de produção.

$$Y = \frac{30^3}{16 \times 6^2 \times 4} = 11{,}72$$

$$Y = \frac{2^{1/2} \times 315^{3/4}}{3^{3/4} \times 6^{1/2} \times 4^{1/4}} = 13{,}53$$

g. A quantidade encontrada através da função indireta de custo é maior do que a quantidade que maximiza o lucro. Isto ocorreu porque o volume de recursos disponíveis é mais que suficiente para atingir o máximo global de lucro. Com isso, ao se maximizar a produção, encontrou-se uma quantidade a ser produzida além do ponto ótimo. Essa é uma das razões por que a maximização da produção pode levar a resultados enganosos, uma vez que existe uma região entre o ponto de máximo global de lucro e o máximo global de produção em que a produção não é viável economicamente. Quando o volume de recursos está aquém do necessário para atingir o máximo global de lucro, encontra-se o mesmo resultado, maximizando-se a produção sujeito a uma restrição de custo, ou minimizando o custo condicionado a uma quantidade de produto. A minimização condicionada será apresentada no próximo capítulo.

7.7. Exercícios propostos

1) *Uma firma que não possa produzir no ponto de máximo global de lucro irá produzir em qualquer ponto do caminho de expansão, desde que atenda à sua restrição orçamentária.*

2) *Dada uma função de produção homogênea qualquer $Y = y(X_1, X_2)$, é possível mostrar, pelo teorema de Euler, que, para maximizar o lucro, o valor de λ será sempre igual a $1/n$, em que n é o grau de homogeneidade.*

3) *Uma firma que esteja maximizando lucro, tendo uma restrição definitiva na utilização do insumo X_2, maximizará seu lucro sobre a Linha de Falsa Escala do fator X_1, independentemente da quantidade em que X_2 foi fixado.*

4) *O Caminho de Expansão representa os pontos de equilíbrio da firma ao expandir sua produção. Assim, para uma determinada*

tecnologia, o ponto de máximo global de lucro corresponde ao custo médio mínimo de longo prazo.

5) *No modelo fator-produto, assumindo que o preço do produto varia em função da quantidade, uma firma que atue na fase inelástica da curva de demanda, para aumentar a receita total, deverá aumentar o preço do produto.*

6) *Considere a seguinte função de produção:* $Q = X_1^{1/4} X_2^{1/4}$, *em que Q é a quantidade produzida e* X_1 *e* X_2 *são as quantidades de insumos utilizados na produção. Encontre para essas funções:*

Pela maximização do lucro

a) Função de demanda dos fatores.
b) Função de lucro.
c) Função de oferta.
d) Função de demanda dos fatores a partir da função de lucro.

Pela maximização do produto

e) Função de caminho de expansão.
f) Função de demanda indireta dos fatores.
g) Função indireta de custom.
h) Função de demanda indireta dos fatores, aplicando teorema de Roy.

Pela minimização do custo

i) Função de demanda condicionada dos fatores.
j) Função de custom.
k) Função de demanda condicionada aplicando teorema de Shephard.
l) Função indireta de custom.
m) Função de oferta.
n) Encontre a demanda condicionada dos fatores a partir da demanda indireta e da função de custo.

o) Encontre a demanda indireta dos fatores a partir da demanda condicionada e da função indireta de custo.

7) O nível de produto ofertado por uma firma para que ela atue no ponto de máximo global de lucro é Y = 16,2. Sabendo-se que a função indireta de custo dessa firma é igual a $Y = \frac{2^{1/2} C^{3/4}}{3^{3/4} P_K^{1/2} P_L^{1/4}}$, *em que* $Y = y(K, L)$ *é a função de produção; C, o custo da firma; e* P_K *e* P_L, *os preços dos fatores de produção K e L, respectivamente. Fornecidos os valores de* P_L*=2,50 e* P_K*=3,00, pede-se:*

a) Qual a demanda condicionada dos fatores e sua quantidade?
b) Qual a demanda indireta dos fatores e sua quantidade?
c) Qual a função de produção?
d) Dada uma restrição de *C=48,00*, qual a quantidade produzida pela firma?
e) Qual o lucro da firma para a quantidade produzida em "d"?
f) Qual a quantidade demandada dos fatores *K* e *L* para o máximo global de lucro?
g) Qual o lucro da firma para a quantidade *Y=16,2*, no ponto de máximo global de lucro?
h) Quais as condições para que a firma se torne mais intensiva no fator L?

7.7. Referências

BINGER, B.R.; HOFFMAN, E. **Microeconomics with calculus.** 2.ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 633 p.

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. 684 p.

DEBERTIN, D.L. **Agricultural production economics.** New York: MacMillan, 1987. 366 p.

HERTEL, T.W. **Applications of duality and flexible functional forms: the case of multiproduct firm**. Purdue: Purdue University, 1984. (Research Bulletin, 980).

LIMA, J.L. Definições e aplicações de elasticidades de substituição: revisão e aplicação. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, Brasília, v. 38, n. 1, 2000.

Capítulo 8

Teoria dos custos

Eduardo Rodrigues de Castro[1]
Erly Cardoso Teixeira[2]
Adelson Martins Figueiredo[3]
Maurinho Luiz dos Santos[4]

8.1. Introdução

No capítulo anterior foi estudada a função de produção, que representa a tecnologia utilizada no processo produtivo de determinado produto. A tecnologia determina quais insumos utilizar, a quantidade destes e a forma de utilização. Afirma se preocupa com a maximização do lucro em vez da maximização da produção. A maximização do lucro está relacionada com a produção, a quantidade de insumos e seus respectivos preços. Uma vez adotada uma tecnologia de produção, a quantidade de insumos que maximiza o lucro para determinada produção pode variar, devido à possibilidade de substituição entre os fatores.

Dada uma tecnologia de produção, os preços e as quantidades de insumos determinarão os custos totais. Em vista das diferentes possibilidades de utilização desses fatores, é possível combiná-los de forma a minimizar os custos de produção. Para uma determinada produção, considerando condições de concorrência perfeita em que os preços são dados, a maximização do lucro pode ser feita via minimização dos custos de produção.

---

[1] Doutorando em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV e Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: edu2110@hotmail.com.
[2] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: teixeira@ufv.br.
[3] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[4] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

A maximização do lucro via minimização dos custos tem algumas vantagens em relação à utilização da função de produção. A função de custo é homogênea de grau 1 nos preços, independentemente do grau de homogeneidade da função de produção. Os preços são variáveis independentes, enquanto a decisão sobre a quantidade de insumo está relacionada ao seu preço, tornando a quantidade uma variável endógena (BINSWANGER, 1974).

Ao se falar em custos, deve-se definir o conceito em termos econômicos. O custo econômico considera os *custos explícitos* e *implícitos*. Custos explícitos se referem ao desembolso efetivamente realizado, como a compra de insumos, o pagamento de mão-de-obra, os encargos e as despesas gerais. Os custos implícitos dizem respeito àqueles para os quais não ocorrem desembolsos efetivos, como a depreciação de máquinas e instalações, e o *custo de oportunidade*, se refere ao valor que um determinado fator poderia receber em algum uso alternativo. Por exemplo, o prédio utilizado para instalação de uma determinada indústria poderia estar sendo alugado, caso a indústria não estivesse ali instalada. Ou seja, é a remuneração que um bem estaria recebendo caso fosse alocado em outra atividade. Existem ainda os *custos irreversíveis*, que são aqueles incorridos na compra de fatores muito específicos que não teriam utilidade em outro uso alternativo.

Este capítulo está organizado em quatro seções além desta introdução: a próxima seção trata dos custos de produção de curto prazo, em que existem fatores fixos que não podem variar no período considerado, sendo apresentada a forma de maximização de lucro de acordo com essa abordagem, derivando-se ainda a curva de oferta da firma. Na terceira seção são abordados os custos de produção considerando o longo prazo, derivando-se a função indireta de custo e as funções de demanda condicionada dos fatores. Na quarta seção são apresentadas as curvas de custo de longo prazo, bem como os conceitos relativos a retornos crescentes, constantes e decrescentes à escala. As duas últimas seções apresentam exercícios resolvidos e exercícios propostos relativos ao assunto abordado. Após essas seções, tem-se no

Apêndice o Mapa da Dualidade, que apresenta a dualidade aplicada à teoria da produção de forma esquemática.

8.2. Custos no curto prazo, maximização de lucro e a função de oferta da firma

Em termos econômicos, a questão relativa ao curto ou longo prazo refere-se à possibilidade de variação dos fatores de produção. Considera-se curto prazo se pelo menos um dos fatores de produção não puder variar no período considerado, ao passo que, no longo prazo, todos os fatores podem variar.

Considerando então o curto prazo, pode-se definir o custo total da firma como a soma dos custos fixos e custos variáveis. Os custos fixos se referem àqueles fatores que não variam com a produção, já que são fixos no período considerado. Por exemplo, as instalações de uma firma terão o mesmo custo se ela utilizar toda a sua capacidade instalada ou se não produzir nada. Já os custos variáveis referem-se àqueles que variam de acordo com a produção. Na análise de curto prazo, esses são os custos relevantes, pois o comportamento do custo total de produção, que varia com os insumos, determina o nível de produção ótima – aquela que maximiza os lucros. Para isso, será necessária uma análise mais detalhada sobre o comportamento desses custos, cuja demonstração é derivada das curvas de custo total, assim como foi visto na teoria da produção.

Para iniciar esta análise, considere a função de produção apresentada no capítulo anterior, em que o fator variável *X* é apresentado nas abscissas e o produto *Y*, nas ordenadas. Ao se multiplicar *X* por P_x, como os preços são dados, ocorrerá apenas um deslocamento da função de produção, não afetando seu comportamento. Feito isso, tem-se agora representado no eixo das ordenadas a produção e, nas abscissas, o custo variável ($P_x X$). No entanto, interessa avaliar o comportamento dos custos para diferentes patamares de produção, de modo que é conveniente que a produção apareça no eixo das abscissas e os custos variáveis no eixo das ordenadas. Para que isso aconteça, basta girar a Figura 8.1 duas vezes, conforme indicado, para se obter a posição desejada das variáveis

na figura. Feito isso, para se obter a função de custo total, basta adicionar o valor dos custos fixos totais (*CFT*), que, da mesma forma, apenas desloca a função de custo total para cima, sem alterar o seu comportamento.

Obtida a curva de custo total, pode-se então passar à obtenção das curvas de custo médio e custo marginal, que permitirão analisar o comportamento dos custos de produção frente a variações na produção.

O custo médio refere-se ao custo unitário de produção de cada unidade adicional produzida. Ele é obtido pela expressão (8.1) e permite avaliar como varia o custo unitário à medida que se aumenta a produção:

$$CMe = \frac{CT}{Y} \tag{8.1}$$

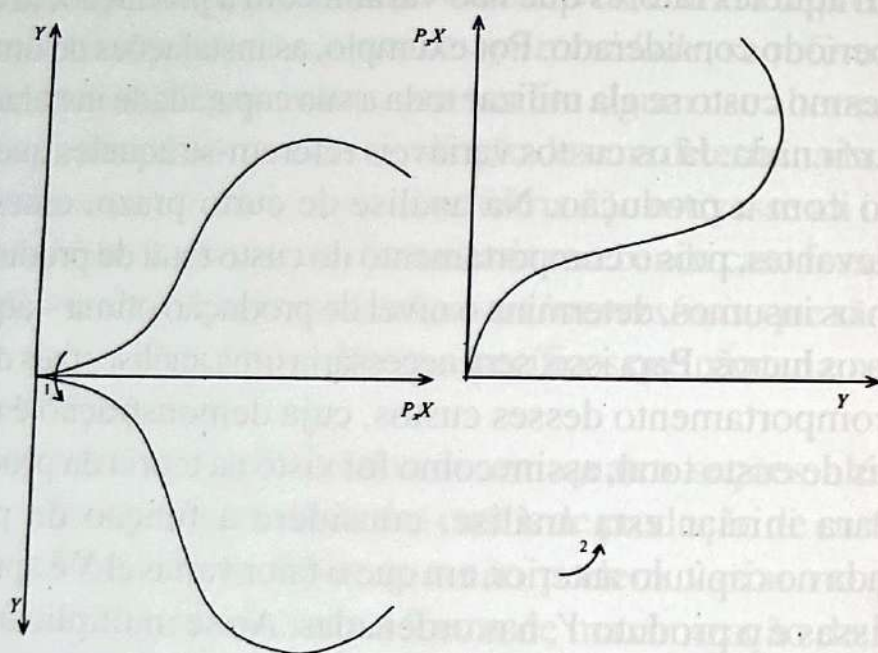



Figura 8.1 - Obtenção da função de custo total a partir da curva de produto total

O custo médio pode ser separado em custo fixo médio e custo variável médio, os quais são obtidos dividindo-se os custos fixos e os custos variáveis pela produção. Graficamente, o custo variável médio pode ser representado pela tangente do ângulo formado pela abscissa e por um

segmento de reta que parte da origem até a curva de custo total, para uma determinada produção. Visto desta forma, é possível perceber que a curva de custo médio variável terá um comportamento decrescente, inicialmente, uma vez que o ângulo formado diminui, atinge um mínimo, depois o ângulo e o custo variável médio crescem. A obtenção da curva de custo variável médio está representada na Figura 8.2.

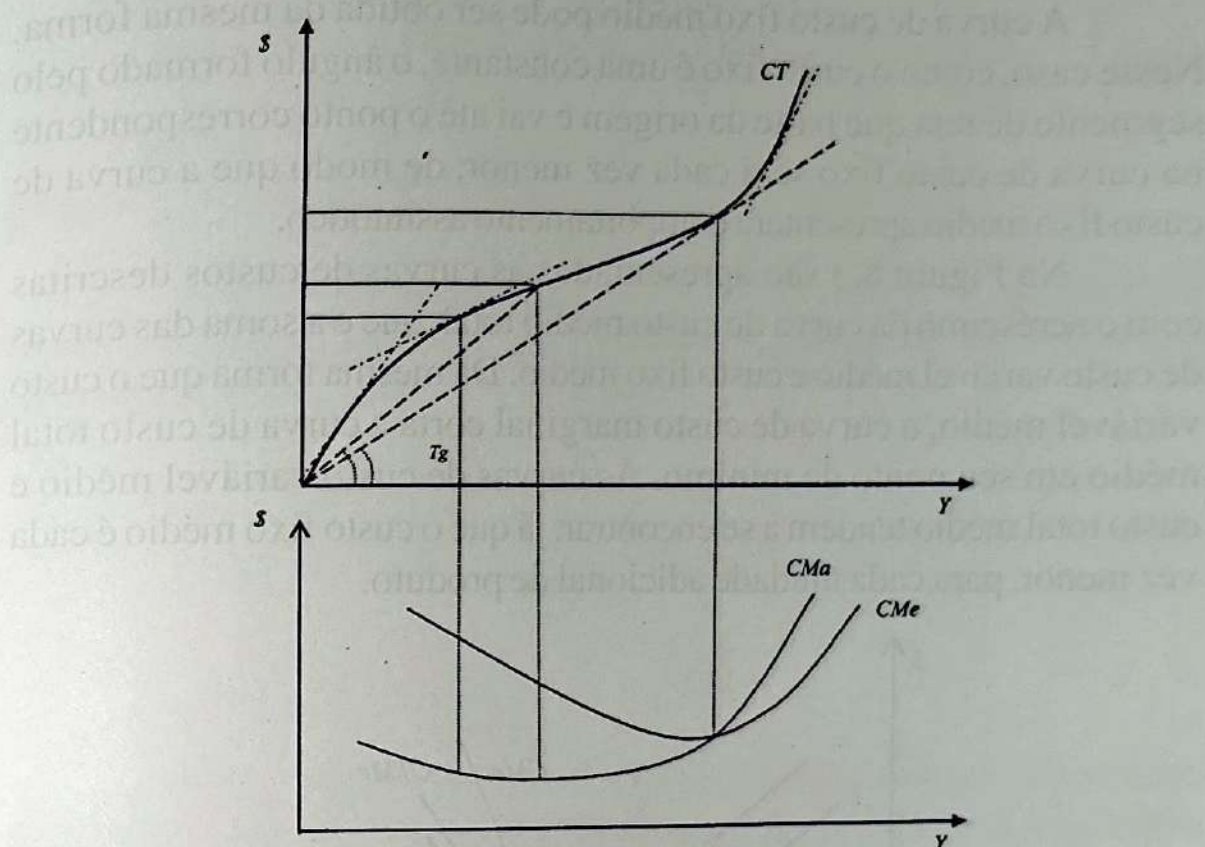



Figura 8.2 - Obtenção das curvas de custo variável médio e custo marginal a partir da curva de custo total.

Outro conceito importante é o do custo marginal que representa o custo adicional de cada nova unidade produzida. Graficamente, a curva de custo marginal é obtida de maneira análoga à curva de custo variável médio, conforme representado na Figura 8.2. Neste caso, porém, para cada unidade produzida traça-se uma tangente à curva de custo total. O custo marginal é representado pela tangente do ângulo formando pelo segmento tangente à curva e o eixo horizontal, e é dado pela expressão:

$$CMa = \frac{\Delta CT}{\Delta Y} = \frac{\partial CT}{\partial Y} \tag{8.2}$$

Pode-se observar que a curva de custo marginal apresenta comportamento decrescente inicialmente, atinge o mínimo onde a curva de custo variável total tem um ponto de inflexão[5], passando a crescer, cortando a curva de custo médio no ponto onde este custo é mínimo.

A curva de custo fixo médio pode ser obtida da mesma forma. Nesse caso, como o custo fixo é uma constante, o ângulo formado pelo segmento de reta que parte da origem e vai até o ponto correspondente na curva de custo fixo será cada vez menor, de modo que a curva de custo fixo médio apresentará comportamento assintótico.

Na Figura 8.3 são apresentadas as curvas de custos descritas com o acréscimo da curva de custo médio total, que é a soma das curvas de custo variável médio e custo fixo médio. Da mesma forma que o custo variável médio, a curva de custo marginal corta a curva de custo total médio em seu ponto de mínimo. As curvas de custo variável médio e custo total médio tendem a se encontrar, já que o custo fixo médio é cada vez menor, para cada unidade adicional de produto.

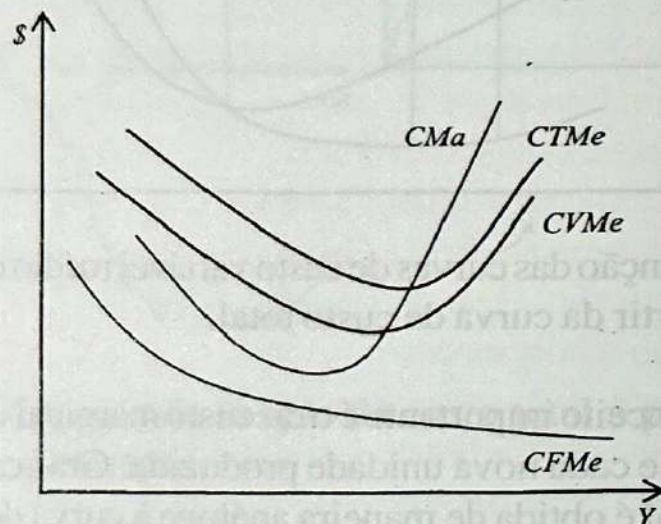



Figura 8.3 - Curvas de custo variável médio, custo fixo médio, custo total médio e custo marginal

[5] Nesta função de produção estão sendo consideradas apenas retornos crescentes e retornos decrescentes. Caso se considere na função de produção retornos constantes à escala, nesse intervalo, o custo marginal não apresentará variações.

As curvas de custo variável médio e custo marginal podem ser definidas a partir do produto médio e marginal. Partindo da expressão definida anteriormente, tem-se que:

$$CVMe = \frac{CTMe}{Y} = \frac{P_x X}{Y} = P_x \frac{1}{PMe} \tag{8.3}$$

Da mesma forma, para o custo marginal:

$$CMa = \frac{\partial CT}{\partial Y} = \frac{\partial P_x X}{\partial Y} = \frac{\partial P_x}{\partial Y} X + P_x \frac{\partial X}{\partial Y} = P_x \frac{\partial X}{\partial Y} = P_x \frac{1}{PMa} \tag{8.4}$$

já que $\frac{\partial P_x}{\partial Y} = 0$, por se tratar de concorrência perfeita.

A partir das expressões (8.3) e (8.4), pode-se então definir a elasticidade de produção como a razão entre o custo variável médio e o custo marginal[6]:

$$\varepsilon_x = \frac{PMa}{PMe} = \frac{P_x \left(1/_{CMa} \right)}{P_x \left(1/_{CMe} \right)} = \frac{CMe}{CMa} \tag{8.5}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y} = \frac{PMa}{PMe}.$$

Na abordagem da função de produção foram definidos os estágios de produção com base na elasticidade de produção. Nesse caso, também é possível definir o estágio racional de produção com base nesta elasticidade. Se $\varepsilon_x > 1$, *CVMe* > *CMa*, corresponde ao estágio 1 de produção. Se $\varepsilon_x < 1$, *CVMe* < *CMa*, corresponde ao estágio 2 de produção[7]. Essa relação pode ser facilmente verificada ao se considerar que as curvas de custo têm o comportamento inverso do das curvas de

---

[6] Relembrando: $\varepsilon_x = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y} = \frac{PMa}{PMe}$.

[7] Não é possível definir o estágio 3, uma vez que os custos continuam crescentes mesmo quando o produto marginal é negativo.

produto médio e marginal. No entanto, isso ficará mais claro a seguir, após a derivação da condição de maximização do lucro.

Para maximizar o lucro, considere a função de lucro dada por:

$$\pi = RT - CT$$
$$\pi = P_Y Y - P_x X - CFT \tag{8.6}$$

Na abordagem dos custos, no espaço produto, a variável de decisão é a produção. Portanto, para maximizar, deve-se derivar a função lucro com relação a Y e igualar a zero. Assim:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = \frac{\partial P_Y}{\partial Y} Y + P_Y \frac{\partial Y}{\partial Y} - \frac{\partial P_X}{\partial Y} X - P_X \frac{\partial X}{\partial Y} - \frac{\partial CFT}{\partial Y} = 0 \tag{8.7}$$

Considerando um mercado competitivo, em que os preços são dados, a expressão anterior se resume a:

$$P_Y = P_X \frac{\partial X}{\partial Y} \therefore RMa = CMa \tag{8.8}$$

que é a condição de primeira ordem, em que a receita marginal deve ser igual ao custo marginal. Como se trata de concorrência perfeita, a firma deve aumentar sua produção até que o custo marginal da última unidade produzida se iguale ao preço do produto (que é a receita marginal). Para garantir que esta é a condição de lucro máximo, as condições de segunda ordem devem ser verificadas, ou seja, a segunda derivada da função lucro deve ser menor que zero, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Y^2} < 0$$

Como $\partial \pi / \partial Y = P_Y - CMa$, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Y^2} = \frac{\partial (P_Y - CMa)}{\partial Y} < 0$$

ou

$$\frac{\partial CMa}{\partial Y} > 0 \tag{8.9}$$

A expressão (8.9) implica que, para maximizar o lucro, deve-se igualar o preço ao custo marginal na fase ascendente da curva de custo marginal.

No entanto, o que aconteceria se a firma produzisse em uma condição diferente desta? Se o nível de produção for tal que $P_Y > CMa$, significa que, aumentando-se a produção em uma unidade, o ganho será maior, já que o preço é maior do que o custo adicional de se produzir esta unidade. Por outro lado, se $P_Y < CMa$, significa que a firma deve reduzir sua produção, porque o custo adicional da última unidade produzida está excedendo o preço de venda do produto. Ao se igualar o preço do produto ao custo marginal, diferentes possibilidades podem surgir, conforme ilustrado na Figura 8.4.

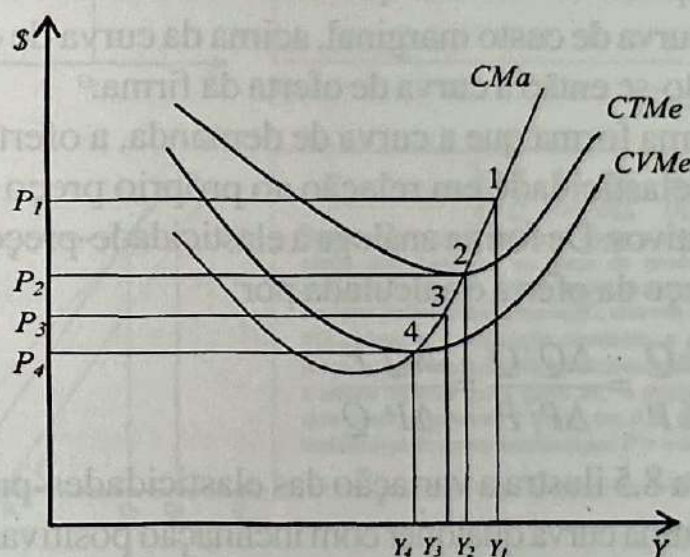



Figura 8.4 - Condições de lucro supernormal, lucro normal, prejuízo e ponto de fechamento da firma

No ponto 1, igualando-se P_Y ao custo marginal, tem-se que o preço do produto está acima do custo total médio e a firma está tendo um lucro supernormal. Ou seja, o preço recebido remunera todos os fatores de produção, inclusive capital, e a firma ainda recebe uma margem de lucro livre de todos os custos. Como se trata de concorrência perfeita,

essa situação atrairá concorrentes para atuar nesse mercado, aumentando a produção e reduzindo o preço, até que se atinja a situação 2. Este é o ponto de equilíbrio, em que não há incentivo nem para a saída nem para a entrada de novas firmas no mercado, sendo considerado lucro normal. A situação 3 corresponde a uma situação indesejável, em que o preço é menor que o custo total médio, mas ainda maior que o custo variável médio. Isso implica que a firma pode continuar atuando no curto prazo, já que cobre os custos variáveis, mas, no longo prazo, deixará a atividade, já que não consegue cobrir os custos fixos. No ponto 4, o preço recebido é exatamente o equivalente para cobrir os custos variáveis médios. Este é o ponto-limite, chamado de ponto de fechamento, uma vez que, abaixo dele, o preço não estará cobrindo nem os custos variáveis totais, incorrendo em prejuízos também no curto prazo.

Assim, pode-se concluir que a firma somente atuará na região ascendente da curva de custo marginal, acima da curva de custo variável médio, definindo-se então a curva de oferta da firma.

Da mesma forma que a curva de demanda, a oferta de produtos apresenta uma elasticidade em relação ao próprio preço e ao preço de produtos alternativos. De forma análoga à elasticidade-preço da demanda, a elastidade-preço da oferta é calculada por:

$$\eta = \frac{\Delta\% Q}{\Delta\% P} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q}$$

A Figura 8.5 ilustra a variação das elasticidades-preço da oferta. A inclinação de uma curva qualquer com inclinação positiva no plano *PxQ* é determinada por:

$$tg\alpha = \frac{\Delta P}{\Delta Q} \therefore \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

A elasticidade-preço da oferta no ponto pode ser determinada pelo inverso da inclinação da curva tangente multiplicado pela razão do preço pela quantidade. Assim:

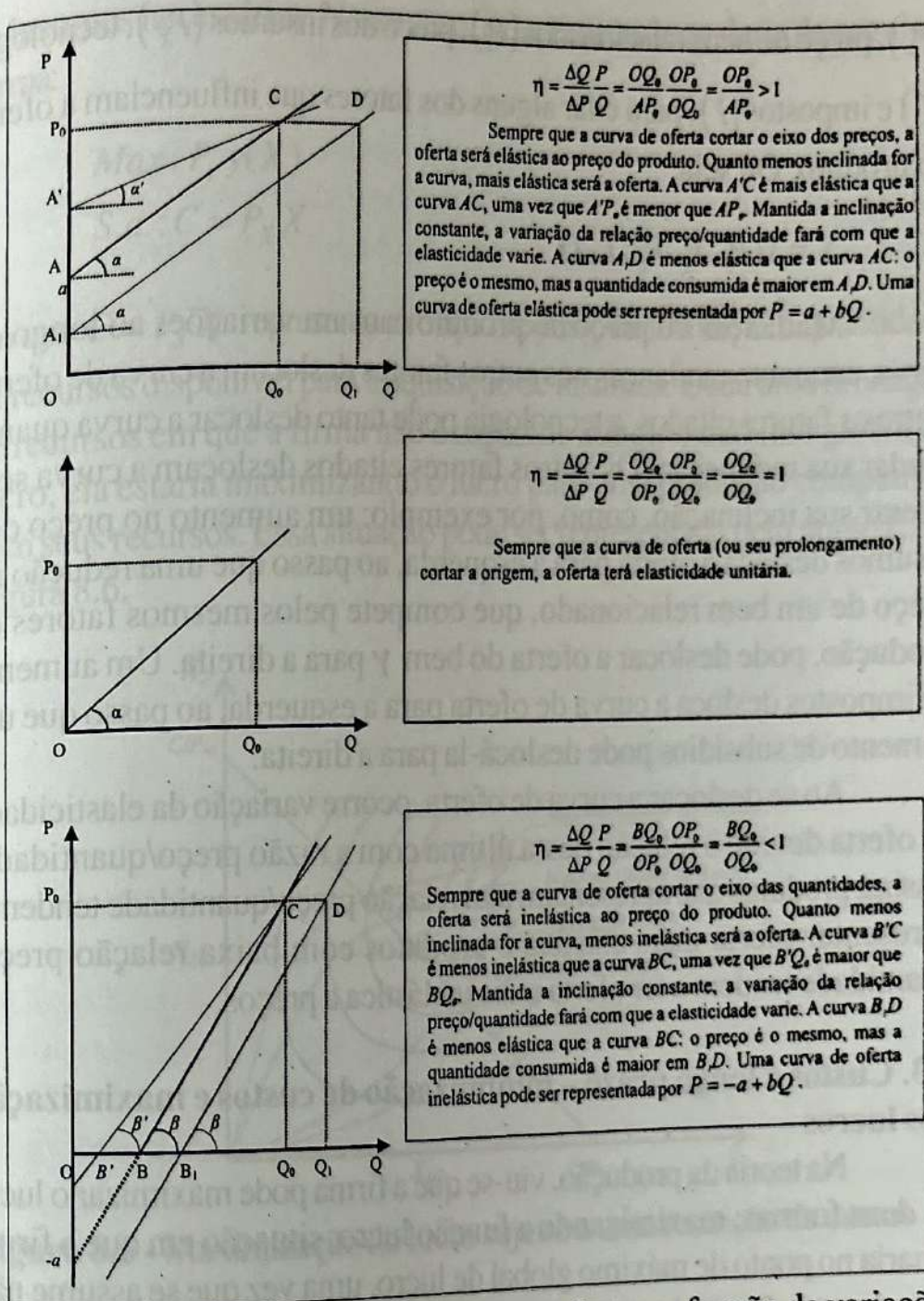



Figura 8.5 - Variações da elasticidade de oferta em função de variações na inclinação e deslocamentos da curva de oferta

Pode-se observar pela Figura 8.5 que mudanças na inclinação e deslocamentos da curva de oferta afetarão a elasticidade-preço da oferta.

Pode-se definir a oferta como sendo função do preço do produto

(P_Y), preço de bens relacionados (P_i), preço dos insumos (P_X), tecnologia (T) e impostos (I), para citar alguns dos fatores que influenciam a oferta do produto. Ou seja:

$$S = s(P_Y, P_i, P_X, T, I)$$

Mudanças no preço do produto causam variações ao longo da curva, enquanto mudanças nos outros fatores deslocam a curva de oferta. Entre os fatores citados, a tecnologia pode tanto deslocar a curva quanto mudar sua inclinação. Os outros fatores citados deslocam a curva sem alterar sua inclinação, como, por exemplo: um aumento no preço dos insumos desloca a oferta para a esquerda, ao passo que uma redução no preço de um bem relacionado, que compete pelos mesmos fatores de produção, pode deslocar a oferta do bem Y para a direita. Um aumento de impostos desloca a curva de oferta para a esquerda, ao passo que um aumento de subsídios pode deslocá-la para a direita.

Ao se deslocar a curva de oferta, ocorre variação da elasticidade da oferta devido à relação desta última com a razão preço/quantidade. Assim, produtos que apresentam alta relação preço/quantidade tendem a apresentar oferta mais elástica e produtos com baixa relação preço/quantidade tendem a ter oferta mais inelástica a preços.

8.3. Custos a longo prazo – minimização de custos e maximização dos lucros

Na teoria da produção, viu-se que a firma pode maximizar o lucro de duas formas: maximizando a função lucro, situação em que a firma atuaria no ponto de máximo global de lucro, uma vez que se assume não haver restrições à obtenção do lucro máximo. Esta condição pode ser representada por:

$$Max: \pi = P_Y y(X) - P_X X \qquad (8.10)$$

em que $y(X)$ representa a função de produção e X o vetor de insumos.

No entanto, a firma pode não ser capaz de produzir no ponto de máximo global de lucro, por não dispor de recursos suficientes para adquirir

os insumos necessários. Nesse caso, a maximização se daria da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &Max: P_Y\, y(X) \\ &S.a.: C = P_X\, X \end{aligned} \qquad (8.11)$$

em que $C = P_X X$ representa a função de custo da firma e C, a quantidade de recursos disponível para a aquisição de insumos. Dada uma limitação de recursos em que a firma não é capaz de atingir o máximo global de lucro, ela estaria maximizando o lucro para uma produção compatível com seus recursos. Essa situação pode ser representada pelo ponto E, na Figura 8.6.

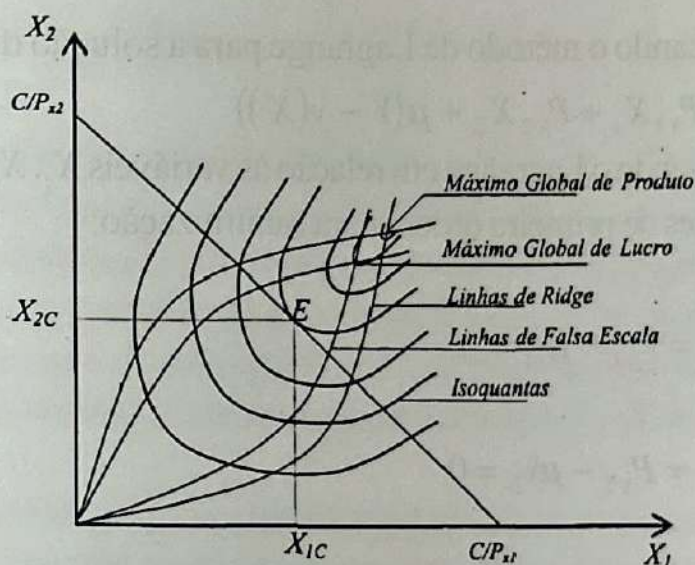



Figura 8.6 - Maximização do lucro sujeito a uma restrição de custos

Segundo essa abordagem, é possível a variação de todos os fatores, motivo pelo qual se considera essa abordagem como de longo prazo.

Considerando que a limitação de recursos impõe uma limitação na quantidade produzida, o problema de maximização dos lucros pode ser elaborado de outra forma, como se segue:

$$Min: P_X X$$
$$S.a.: Y \leq y(X) \tag{8.12}$$

sendo esta a forma *dual* da maximização do lucro da firma, que teria em (8.11) a sua forma *primal*[8]. Esta formulação determina a produção de pelo menos a quantidade Y de produto ao menor custo possível.

A solução desse problema levará à obtenção das demandas condicionadas dos fatores e à função indireta de custo. Para melhor entendimento, considere uma função de produção com dois fatores de produção, X_1 e X_2. A formulação do problema seria:

$$Min: C = P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2$$
$$S.a.: Y \leq y(X) \tag{8.13}$$

Aplicando o método de Lagrange para a solução do problema[9]:

$$L = P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2 + \mu(Y - y(X)) \tag{8.14}$$

Derivando o Lagrange em relação às variáveis X_1, X_2 e μ, obtêm-se as condições de primeira ordem para minimização:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = P_{X1} - \mu y_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = P_{X2} - \mu y_2 = 0 \tag{8.15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = Y - y(X) = 0$$

em que y_i representa as derivadas parciais da função de produção $y(X)$

[8] A dualidade se refere à existência de funções *duais*, que incorporam as mesmas informações essenciais, no que diz respeito à preferência e à tecnologia, que suas respectivas funções *primais* de utilidade e de produção, desde que mantidas determinadas condições de regularidade destas funções, como concavidade, homogeneidade, monotonicidade, entre outras.

[9] Aqui serão apresentados apenas os passos da solução do problema de minimização de forma literal. Na seção Exercícios Propostos será apresentada a solução de um problema de forma completa.

em relação às variáveis X_i. Resolvendo as derivadas parciais para μ, obtém-se:

$$\mu = \frac{P_{X1}}{y_1} = \frac{P_{X2}}{y_2} \tag{8.16}$$

O multiplicador de Lagrange encontrado nesse problema tem relação inversa com o multiplicador encontrado no problema de maximização da receita sujeita a uma restrição de custos, em que o multiplicador era igual à razão das produtividades marginais de X_i pelos respectivos preços. No entanto, rearranjando os termos, verifica-se que o ponto de equilíbrio será o mesmo:

$$\frac{P_{X1}}{P_{X2}} = \frac{y_1}{y_2} = TMS_{X_2,X_1} \tag{8.17}$$

ou seja, a razão dos preços dos fatores deve ser igual à razão das produtividades marginais dos fatores de produção, que é igual à taxa marginal de substituição. Na Figura 8.6 essa relação corresponde ao ponto E, que é o ponto que minimiza o custo de determinada produção, no problema *dual*, ou é o ponto que maximiza a receita, dada uma limitação nos recursos a serem gastos na aquisição de insumos, no seu equivalente *primal*.

Para garantir que a solução encontrada é um ponto de mínimo, devem-se verificar as condições de segunda ordem, o que é feito testando-se o Hessiano Orlado, obtido das condições de primeira ordem derivadas em (8.15):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} \end{vmatrix} < 0 = \begin{vmatrix} \mu y_{11} & \mu y_{12} & y_1 \\ \mu y_{12} & \mu y_{22} & y_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{8.18}$$

em que y_{ij} representa a segunda derivada do Lagrange em relação às respectivas variáveis.

Para que a solução encontrada seja um mínimo, o Hessiano deve ser negativo semidefinido[10].

Continuando a solução do problema a partir da condição de equilíbrio encontrada em (8.17), isola-se X_1 (X_2) e o substitui na última expressão da condição de primeira ordem $(Y - y(X) = 0)$, obtendo-se a demanda condicionada para o fator X_2 (X_1). A demanda encontrada dessa forma é chamada condicionada, uma vez que é condicionada a determinada produção diferente daquelas obtidas da maximização livre, sem restrições.

As demandas encontradas terão a seguinte forma:

$$X_{iC} = X_i(P_{X1}, P_{X2}, Y) \tag{8.19}$$

Tomando as demandas condicionadas X_i^c, substituindo na função objetivo em (8.13) e resolvendo para C, obtém-se a função indireta de custo da forma:

$$C = C(P_{X1}, P_{X2}, Y) \tag{8.20}$$

que é a função de custo de longo prazo, uma vez que considera a possibilidade de variação de todos os fatores e função do nível de produto. Essa função deve apresentar algumas características que podem ser verificadas, quais sejam:

1. Crescente em relação ao nível de produto.
2. Homogênea linear no preço dos insumos.
3. Não-decrescente no preço dos insumos.
4. Côncava no preço dos insumos.

Da condição 1, tem-se que aumentos na produção implicam aumentos no custo de produção, uma vez que não se leva em conta a

[10] Para mais detalhes a respeito das condições de segunda ordem, ver Chiang (1982).

mudança tecnológica, ou seja, aumento na produção utilizando a mesma tecnologia implicará necessariamente aumento no custo mínimo de produção. Pela condição 2, se dobrar o preço dos insumos, dobra-se o custo de produção. A terceira característica é intuitiva, mas pode ser inferida da condição anterior. Uma vez que a função seja linear homogênea, se for aumentado o preço de um insumo qualquer, aumentará o custo de produção. Por fim, a concavidade nos preços, que a princípio não é tão evidente, mas pode ser facilmente explicada. Sendo a função de custo linear homogênea, era de se esperar que a função custo fosse côncava e convexa (que é a característica de funções lineares). Contudo, considere uma função de custo com as características apresentadas anteriormente, com variação em um dos preços e os outros mantidos constantes. Ao elevar o preço do insumo X_1, utilizando-se a mesma proporção de insumos, o custo cresceria linearmente com o aumento de P_{X1}. No entanto, os outros insumos se tornam relativamente mais baratos e, dada a possibilidade de substituição entre os fatores, o aumento no custo será menos que proporcional ao aumento em P_{X1} (VARIAN, 1978).

Por fim, uma vez obtida a função indireta de custo em (8.20), é possível, a partir dela, obter as funções de demanda condicionada dos fatores. Para isso, basta diferenciar a função de custo com relação a P_{Xi} para se obter a demanda do fator X_i.

$$\frac{\partial C}{\partial P_{Xi}} = X_{iC}(P_{X1}, P_{X2}, Y) \tag{8.21}$$

A partir das demandas condicionadas X_i, isolando Y em cada demanda e substituindo em (8.20), pode-se obter a função objetivo em (8.13).

8.4. Curvas de custo de longo prazo

O longo prazo, na teoria econômica, corresponde ao tempo em que é possível variar todos os fatores de produção, ou seja, não existiria custo fixo.

Para derivar as curvas de custo de longo prazo, considere-se como exemplo uma firma que tenha determinado tamanho de planta, com um custo fixo inicial representado na Figura 8.7a pela curva de $CTCP_1$. Essa empresa, ao decidir aumentar sua planta, irá definir um novo tamanho e, conseqüentemente, terá uma nova situação de curto prazo, representada pela $CTCP_2$. Decidindo aumentar novamente, passaria para a curva de $CTCP_3$, $CTCP_4$ e assim por diante. Ou seja, à medida que uma firma altera seus custos fixos, ela cria várias situações de curto prazo, cada uma delas com um custo fixo mais elevado.

A decisão de aumentar o tamanho da planta decorre do fato de que, para aumentar a produção com o tamanho de planta 1, o custo de produção começa a se tornar muito elevado. Na Figura 8.7a, a partir de Y', é possível produzir a mesma quantidade a custo menor, desde que a firma adote o tamanho de planta 2. Por outro lado, ao ampliar a planta, passando da $CTCP_1$ para a curva de $CTCP_2$, a firma estará aumentando sua capacidade produtiva, de modo que para quantidades menores, abaixo de Y', o custo de produção na planta 2 é maior. Do mesmo modo, aumentando-se a produção no tamanho de planta 2, a partir de Y'', é possível a firma produzir a um custo mais barato adotando o tamanho de planta 3. Ou seja, cada curva de CTCP tem um faixa de produção mais eficiente, na qual é mais econômico para a firma produzir neste tamanho de planta.

Para derivar a curva de custo total de longo prazo, consideram-se infinitas situações de curto prazo, de modo que a firma atuará em cada planta de curto prazo, em um ponto daquela faixa de produção que é mais viável em relação aos outros tamanhos. É como se para cada unidade de produto pudesse ser possível variar todos os fatores de produção, inclusive os fatores fixos. Esse ponto é definido quando a curva de CTLP tangencia as curvas de CTCP, conforme representado na Figura 8.7a. Cada ponto de tangência destas curvas corresponde ao nível de produção de longo prazo, no qual o custo médio de curto prazo (CMeCP) é igual ao custo médio de longo prazo (CMeLP) e o custo marginal de curto prazo (CMaCP) é igual ao custo marginal de longo prazo (CMaLP). Deve-se

observar, no entanto, que o ponto definido pela curva de CTLP não corresponde ao ponto ótimo de curto prazo, podendo a firma, no curto prazo, aumentar a produção reduzindo custos. Assim, considerando então o longo prazo como o tempo que permite variar todos os fatores de produção, o nível de produção da firma seria determinado pelas curvas de CMeLP e CMaLP, sendo Y^* a quantidade ótima a ser produzida. Este ponto corresponde ao ponto em que o custo médio é mínimo e a curva de custo marginal corta a curva de custo médio (Figura 8.7b). Contudo, caso a firma não possa atuar neste ponto e tenha que definir uma planta de curto prazo para operar, irá maximizar o lucro para o fator variável, caminhando ao longo do caminho de expansão de curto prazo. Para que isso aconteça, no entanto, é necessário que a firma tenha recursos suficientes para ampliar a produção, conforme representado na Figura 8.8.

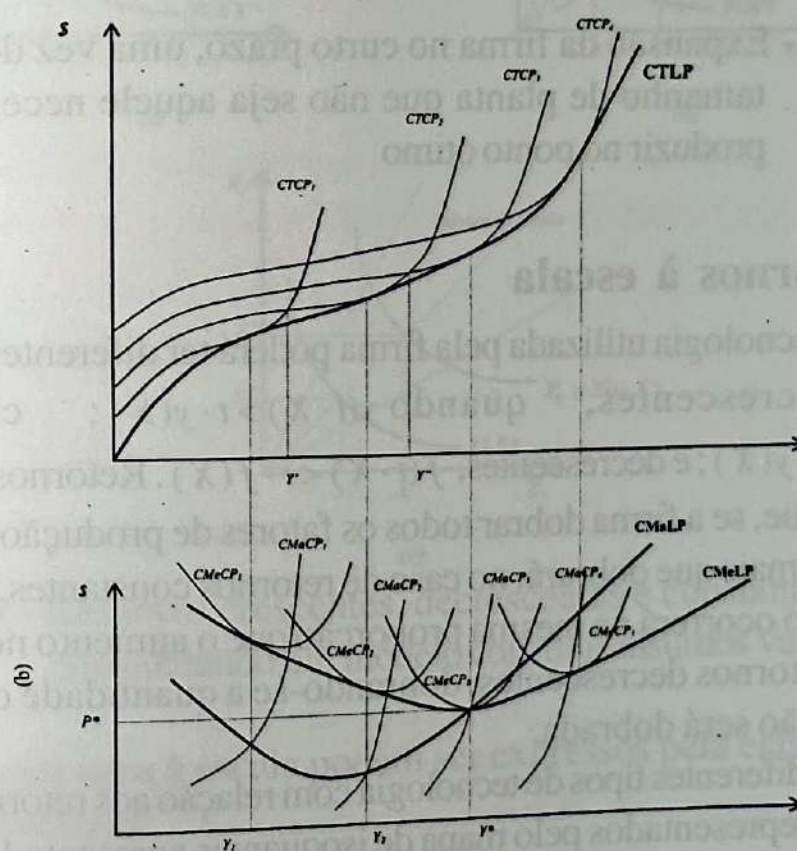



Figura 8.7 - Derivação gráfica das curvas de custo médio e custo marginal de longo prazo a partir das curvas de custo total de curto prazo da firma

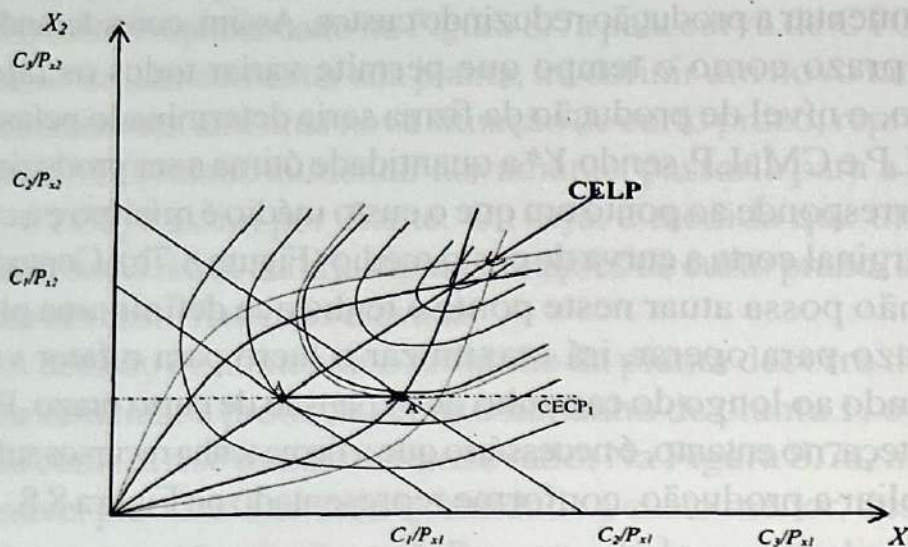



Figura 8.8 - Expansão da firma no curto prazo, uma vez definido um tamanho de planta que não seja aquele necessário para produzir no ponto ótimo

8.5. Retornos à escala

A tecnologia utilizada pela firma poderá ter diferentes retornos à escala: crescentes, quando $y(t \cdot X) > t \cdot y(X)$; constantes $y(t \cdot X) = t \cdot y(X)$; e decrescentes, $f(t \cdot X) < t \cdot f(X)$. Retornos crescentes implicam que, se a firma dobrar todos os fatores de produção existentes, a produção mais que dobrará; no caso de retornos constantes, o aumento na produção ocorrerá na mesma proporção que o aumento nos fatores e havendo retornos decrescentes, dobrando-se a quantidade de fatores a produção não será dobrada.

Os diferentes tipos de tecnologia com relação aos retornos à escala podem ser representados pelo mapa de isoquantas apresentado na Figura 8.8. Com retornos constantes, multiplicando-se os fatores de produção por t, a produção aumenta na mesma proporção (Figura 8.8a); com

retornos crescentes, o aumento no uso de insumos aumenta a produção mais que proporcional (Figura 8.8b); e com retornos decrescentes ocorre o contrário: aumentos no produto fazem com que a produção aumente menos que proporcional. Essa situação está representada na Figura 8.8c, em que, para se dobrar a produção, deve-se mais que duplicar o nível de insumos utilizado. É importante notar que o conceito de retornos à escala vale para qualquer linha de escala no mapa de plano X_1X_2, sendo a cesta ótima de insumos ou não.

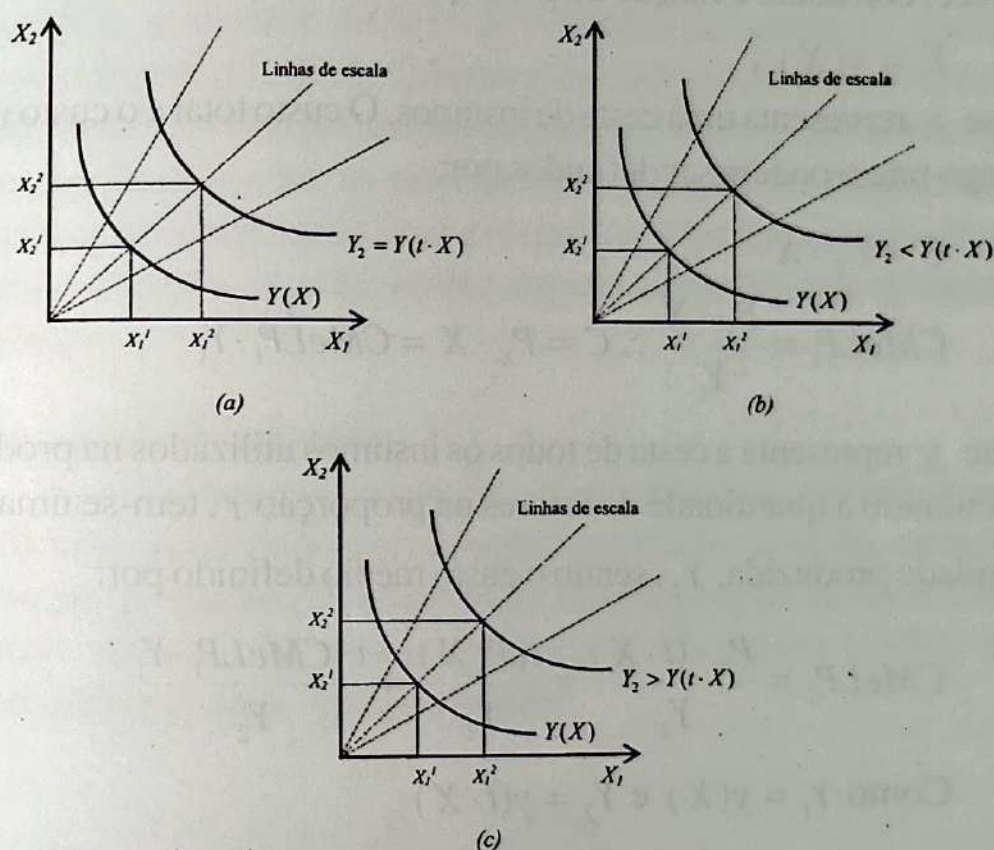



Figura 8.8 - Retornos crescentes, decrescentes e constantes à escala, considerando um modelo com dois insumos variáveis

Os retornos à escala podem ser expressos pela elasticidade de escala, definida por:

$$\varepsilon = \frac{\partial Y(tX)}{\partial t} \frac{t}{Y(tX)}\bigg|_{t=1} = \sum_i \frac{\partial Y}{\partial X_i} \frac{X_i}{Y} = \sum_i \varepsilon_i$$

em que ε representa a elasticidade de escala e ε_i, a elasticidade produção relativa a cada insumo i. Se $\varepsilon > 1$, haverá retornos crescentes; se $\varepsilon < 1$, retornos decrescentes; e se $\varepsilon = 1$, retornos constantes (CHAMBERS, 1988; ALVES, 2007).

Ao se aumentar o uso de insumos, aumenta-se também o custo de produção, e o retorno à escala está diretamente relacionado com a proporção do aumento do custo de produção. Para ver como isso acontece, considere a função de produção:

$$Y_1 = y(X)\ ,$$

em que X representa uma cesta de insumos. O custo total e o custo médio de longo prazo podem ser definidos por:

$$C = P_X \cdot X$$

$$CMeLP_1 = \frac{P_X \cdot X}{Y_1} \therefore C = P_X \cdot X = CMeLP_1 \cdot Y_1$$

em que X representa a cesta de todos os insumos utilizados na produção. Aumentando a quantidade de fatores na proporção t, tem-se uma nova quantidade produzida, Y_2, sendo o custo médio definido por:

$$CMeLP_2 = \frac{P_X \cdot (t \cdot X)}{Y_2} = \frac{t(P_X X)}{Y_2} = \frac{t \cdot CMeLP_1 \cdot Y_1}{Y_2}$$

Como $Y_1 = y(X)$ e $Y_2 = y(t \cdot X)$

$$CMeLP_2 = \frac{t \cdot CMeLP_1 \cdot y(X)}{y(t \cdot X)} = CMeLP_1 \frac{t \cdot y(X)}{y(t \cdot X)}$$

Conforme Looty e Szapiro (2002), o custo médio de longo prazo será:

- Decrescente, se $y(t \cdot X) > t \cdot y(X) \therefore \frac{t \cdot y(X)}{y(t \cdot X)} < 1 \therefore CMeLP_2 < CMeLP_1$

- Crescente, se: $y(t \cdot X) < t \cdot y(X) \therefore \frac{t \cdot y(X)}{y(t \cdot X)} > 1 \therefore CMeLP_2 > CMeLP_1$

- Constante, se $y(t \cdot X) = t \cdot y(X) \therefore \frac{t \cdot y(X)}{y(t \cdot X)} = 1 \therefore CMeLP_2 = CMeLP_1$.

Quando a curva de custo médio de longo prazo é decrescente, têm-se então economias de escala, que correponde a um aumento no custo de produção menos que proporcional ao aumento de todos os fatores de produção e decorre do fato de a função de produção apresentar retornos crescentes à escala. Quando a curva de custo médio é crescente, há então deseconomias de escala, em que o aumento no custo de produção é mais que proporcional ao aumento dos fatores de produção e decorre do fato de a tecnologia apresentar retornos decrescentes à escala. Havendo retornos constantes à escala, não haverá nem economia nem deseconomia de escala.

8.6. Economia de tamanho

A economia de tamanho é uma medida que está relacionada à variação nos custos dada uma variação no tamanho da firma, medido pela quantidade produzida, sem que haja a preocupação de fazer todos os insumos variarem na mesma proporção. Chambers (1988) define flexibilidade de custos[11] pela expressão:

$$\eta = \frac{\partial C(Y, P_X)}{\partial Y} \frac{Y}{C(Y, P_X)} = \frac{CMa}{CMe}$$

A elasticidade de tamanho θ corresponde ao inverso da flexibilidade de custos:

[11] Pindyck e Rubenfeld (2006) referem-se a esta expressão como Elasticidade de Custo.

$$\theta = \frac{1}{\eta} = \frac{\partial Y}{\partial C(Y, P_X)} \frac{C(Y, P_X)}{Y} = \frac{CMe}{CMa}$$

A flexibilidade de custos mede a resposta do custo de produção a movimentos ao longo do caminho de expansão. Por exemplo, seja uma produção inicial $Y_1(X)$, cujo custo mínimo de produção é dado por $C(Y_1, P_X)$; ao se aumentar a quantidade produzida para Y_2, a quantidade de insumos utilizada será aquela que minimizará o custo de produção $C(Y_2, P_X)$, ou seja, $x_c = x(Y_2, P_X)$. Neste caso, a preocupação é determinar o menor custo de se produzir Y_2 mesmo que isso signifique mudar a proporção de uso de insumos. De acordo com Chambers (1988), para pontos de minimização de custos, que representa o caminho de expansão da firma, uma tecnologia apresentará retornos à escala $\varepsilon > 1$ se e somente se apresentar elasticidade de tamanho $\theta > 1$. Isso decorre do fato de que, nos pontos de minimização de custos, no caminho de expansão, $\theta = \varepsilon$, apesar de representarem medidas diferentes.

Nas funções homotéticas, ao se variar o nível do produto, a proporção dos fatores de produção não é alterada. Desse modo, aumentos na produção ocorrerão sem que a razão entre insumos seja alterada, o caminho de expansão é uma linha de escala e ao aumentar o tamanho da firma haverá ao mesmo tempo economias/deseconomias de escala e economias/deseconomias de tamanho. É bom lembrar que funções homogêneas é um caso particular de funções homotéticas. Pindyck e Rubinfeld (2006) avaliam economias/deseconomias de escala como base na mudança nos custos dada a variação no tamanho da firma, ou seja, por meio da elasticidade de custo. Outros autores, como Debertin (1986) e Chambers (1988), deixam clara a distinção entre os conceitos economias de escala e economias de tamanho.

Henderson e Quandt (1977) e Chambers (1988) mostram que, para funções homogêneas, o grau de homogeneidade da função de produção está diretamente relacionado com o comportamento da curva

de custos de longo prazo. Dada a função de produção $Y = y(X)$, multiplicando-se todos os fatores por uma constante t, a produção é multiplicada por t^k em que k é o grau de homogeneidade. Ou seja:

$$Y = y(tX_1, tX_2) = t^k y(X_1, X_2) = q \cdot Y$$

em que q representa o quanto a produção é multiplicada ao se multiplicarem os fatores de produção por t^k, de modo que:

$$q = t^k \therefore t = q^{1/k} \quad (8.22)$$

Uma vez que os fatores de produção são multiplicados por essa constante, os custos também irão se alterar:

$$C = \left(P_{X1}(tX_1) + P_{X2}(tX_2)\right) = \left(P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2\right)t = at \quad (8.23)$$

em que a representa o custo total de produção na situação inicial.

Substituindo (8.22) na expressão (8.23), tem-se:

$$C = aq^{1/k} \quad (8.24)$$

ou seja, a variação nos custos é inversamente proporcional ao grau de homogeneidade da função de produção. Se a função de produção apresenta retornos crescentes ($k > 1$), a firma terá custo médio de longo prazo decrescente. Caso contrário, se a firma apresenta retornos decrescentes à escala ($k < 1$), o aumento dos custos será mais que proporcional ao aumento da produção, e a curva de custo médio de longo prazo será crescente. O custo médio de longo prazo será constante se a firma apresentar retornos constantes à escala ($k = 1$).

De modo geral, assume-se que a curva de custo médio de longo prazo apresenta o formato de U. Tomando-se a derivada do custo médio, definido com sendo $\partial C((Y, P_X)/Y)$ em relação Y, tem-se:

$$\frac{\partial CMe}{\partial Y} = \frac{(\partial C(Y, P_X)/\partial Y) \cdot Y - C(Y, P_X)}{Y^2} = \frac{C(Y, P_X)}{Y^2}[\eta - 1] \quad (8.25)$$

ou , visto de outra forma:

$$\frac{\partial CMe}{\partial Y} = \frac{(\partial C(Y,P_X)/\partial Y) - C(Y,P_X)/Y}{Y}$$

A inclinação da curva de custo médio será negativa se $\eta < 1$, pelo fato de o custo marginal ser menor que o custo médio, e a tecnologia apresenta economias de escala; ao contrário, se $\eta > 1$, haverá deseconomias de escala.

Para se determinar o ponto mínimo da curva de custo médio de longo prazo, basta igualar a derivada acima a zero, de onde se obtém que, nesse ponto, $\eta = 1$, a tecnologia apresenta retornos constantes e o produto marginal é igual ao produto médio. Para verificar que esse ponto é de fato um mínimo, $\partial^2 \left(C(Y,P_X)/Y\right)/(\partial Y)^2 > 0$, o que implica $\partial\eta/\partial Y > 0$ e, conseqüentemente, $\partial\theta/\partial Y < 0$. Como a elasticidade de tamanho θ está diretamente relacionada à elasticidade de escala ε, tem-se que $\partial\varepsilon/\partial Y < 0$. De acordo com Chambers (1988), a curva de custo médio de longo prazo apresentará o formato "U" se no tamanho ótimo $\theta = 1$ e $\partial\theta/\partial Y < 0$. Em outras palavras, a função custo deve ser convexa no tamanho ótimo $Y*$, o que implica que a função $y(X)$ seja côncava (CHAMBERS, 1988; ALVES, 2007).

8.7. Exercícios resolvidos

Nesta seção serão apresentados exercícios resolvidos relativos ao assunto abordado no capítulo. Os dois primeiros referem-se à maximização do lucro pelo lado dos custos no modelo fator-produto, e os demais, no modelo fator-fator.

1) Uma empresa apresenta a seguinte equação de custo total:
$CT = 100 - 7Y + 5Y^2$, em que CT = custo total; Y= quantidade produzida.

Com base na equação anterior, pede-se:

a) A equação de custo é de curto ou longo prazo? Por quê?

b) Se o preço de mercado do produto é $73, que quantidade deveria a empresa produzir para maximizar seu lucro? Qual seria o lucro da empresa?

c) Para a quantidade que maximiza o lucro, qual o custo médio e o custo variável? Qual é a situação da empresa (lucro, prejuízo, etc.)?

d) O mercado em que a empresa está operando é de competição perfeita ou imperfeita? Por quê?

Resolução

a) A equação de custo apresenta um termo que independe da quantidade produzida; logo, se $y = 0, \quad CT = 100$, que é o custo fixo da empresa. Se a equação de custos apresenta custo fixo, então ela se refere ao curto prazo.

b) Para maximizar: $RMa = CMa$;

$$RMa = P_Y = 73$$

$$CMa = \frac{\partial CT}{\partial Y} = -7 + 10Y$$

$$73 = -7 + 10Y \therefore$$

$$Y = 8$$

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = 73 \times 8 - (100 - 7(8) + 5(8)^2) \therefore$$

$$\pi = 220$$

c) Para saber a condição da firma, compara-se o $CMa\,(P_Y)$ com o CMe:

$$CMe = \frac{CT}{Y} = \frac{100}{Y} - 7 + 5Y \therefore$$

$$CMe = 45{,}5$$

$$CMa = -7 + 10(8) = 73 = P_Y$$

$$CMa = P_Y > CMe$$

Lucro supernormal. Para saber o ponto em que ocorre equilíbrio, no lucro normal, basta achar o ponto de mínimo da curva de custo, [illegible]:

$$\frac{\partial CMe}{\partial Y} = -100Y^{-2} + 5 = 0 \therefore$$

$$Y \cong 4,5$$

A situação é de concorrência perfeita, porque o preço é dado. Caso contrário, o preço seria função da quantidade ($P = \gamma(Y)$).

Dada a função de produção $Y = K^{1/2}L^{1/4}$ (a mesma do exercício resolvido do capítulo anterior), encontre:

a) As funções de demanda condicionada dos fatores pela minimização dos custos.

b) A função de custom.

c) A função de demanda condicionada dos fatores aplicando-se o teorema de Shephard.

d) A função indireta de custo.

e) A função de oferta a partir da função de custo.

f) A função lucro.

g) Considerando $C = 200, P_K = 6, P_L = 4, P_Y = 30$, em que P_Y é o preço do produto, encontre a quantidade producida pela função de oferta e pela função indireta de custo.

h) Discuta os resultados.

Resolução

a) $Min.: C = P_K K - P_L L$

$S.a.: K^{1/2}L^{1/4}$

$$L = P_K K + P_L L + \mu(Y - K^{1/2}L^{1/4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = P_K - \mu\left(\frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/4}\right) = 0$$

Lucro supernormal. Para saber o ponto em que ocorre equilíbrio como lucro normal, basta achar o ponto de mínimo da curva de custo médio total:

$$\frac{\partial CMe}{\partial Y} = -100Y^{-2} + 5 = 0 \therefore$$

$$Y \cong 4{,}5$$

d) A situação é de concorrência perfeita, porque o preço é dado. Caso contrário, o preço seria função da quantidade ($P = y(Y)$).

2. *Dada a função de produção* $Y = K^{1/2}L^{1/4}$ *(a mesma do exercício resolvido do capítulo anterior), encontre:*

a) As funções de demanda condicionada dos fatores pela minimização dos custos.

b) A função de custom.

c) A função de demanda condicionada dos fatores aplicando-se o teorema de Shephard.

d) A função indireta de custo.

e) A função de oferta a partir da função de custo.

f) A função lucro.

g) Considerando $C = 200, P_K = 6, P_L = 4, P_Y = 30$*, em que* P_Y *é o preço do produto, encontre a quantidade produzida pela função de oferta e pela função indireta de custo.*

h) Discuta os resultados.

Resolução

a) $Min.: C = P_K K - P_L L$

$$S.a.: K^{1/2}L^{1/4}$$

$$L = P_K K + P_L L + \mu(Y - K^{1/2}L^{1/4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = P_K - \mu\left(\frac{1}{2}K^{-1/2}L^{1/4}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = P_L - \mu\left(\frac{1}{4}K^{1/2}L^{-3/4}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = Y - K^{1/2}L^{1/4} = 0$$

Dividindo $\partial L/\partial K$ por $\partial L/\partial L$, obtém-se a TMST:

$$\frac{2L}{K} = \frac{P_K}{P_L}$$

Isolando L, obtém-se a função do caminho de expansão:

$$L = \frac{P_K K}{2P_L}$$

Substituindo L em $\partial L/\partial \mu$:

$$Y - K^{1/2}\left(\frac{P_K K}{2P_L}\right)^{1/4} = 0$$

Resolvendo para K, obtém-se a sua função de demanda:

$$K = \frac{2^{1/3}Y^{4/3}P_L^{\;1/3}}{P_K^{\;1/3}}$$

Substituindo K na equação do caminho de expansão, obtém-se a função indireta de demanda de L:

$$L = \frac{Y^{4/3}P_K^{\;2/3}}{2^{2/3}P_L^{\;2/3}}$$

b) Substituindo as funções de demanda condicionadas na função objetivo, obtém-se a função de custo:

$$C = P_K\left(\frac{2^{1/3}Y^{4/3}P_L^{\;1/3}}{P_K^{\;1/3}}\right) - P_L\left(\frac{Y^{4/3}P_K^{\;2/3}}{2^{2/3}P_L^{\;2/3}}\right)$$

Multiplicando os termos e tomando-se o mínimo denominador comum, obtém-se a função de custo de longo prazo:

$$C = \frac{3Y^{4/3}P_K^{\ 2/3}P_L^{\ 1/3}}{2^{2/3}}$$

c) Aplicando-se o teorema de Shephard, obtêm-se as funções de demanda condicionada dos fatores:

$$\frac{\partial C}{\partial P_K} = \frac{2}{3}\frac{3Y^{4/3}P_K^{\ -1/3}P_L^{\ 1/3}}{2^{2/3}} = \frac{2^{1/3}Y^{4/3}P_L^{\ 1/3}}{P_K^{\ 1/3}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial P_L} = \frac{1}{3}\frac{3Y^{4/3}P_K^{\ 2/3}P_L^{\ -2/3}}{2^{2/3}} = \frac{Y^{4/3}P_K^{\ 2/3}}{2^{2/3}P_L^{\ 2/3}}$$

Tomando-se essas demandas, isolando P_K e P_L e substituindo na função de custo, obtém-se a equação de custo (função objetivo do problema de minimização).

d) A função de custo pode ser obtida a partir da função indireta de custo, obtida da maximização da produção sujeita a uma restrição. Para mostrar isso, inverte-se a função de custo obtida anteriormente, obtendo-se a função indireta de custo:

$$C = \frac{3Y^{4/3}P_K^{\ 2/3}P_L^{\ 1/3}}{2^{2/3}} \therefore Y^{4/3} = \frac{2^{2/3}C}{3P_K^{\ 2/3}P_L^{\ 1/3}} \therefore Y = \frac{2^{1/2}C^{3/4}}{3^{3/4}P_K^{\ 1/2}P_L^{\ 1/4}}$$

e) A função de oferta obtida no capítulo anterior pelo teorema de Hotelling pode ser obtida também a partir da função custo. Basta derivá-la, encontrando a função e o custo marginal, e igualá-la ao preço do produto ($CMa = P_Y$).

$$\frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{4}{3}\frac{3Y^{1/3}P_K^{\ 2/3}P_L^{\ 1/3}}{2^{2/3}} = \frac{4Y^{1/3}P_K^{\ 2/3}P_L^{\ 1/3}}{2^{2/3}} = P_Y$$

Resolvendo para Y, encontra-se a função de oferta:

$$Y = \frac{P_Y^{\,3}}{16P_k^{\,2}P_L}$$

f) Como a função de oferta pode ser encontrada derivando-se a de lucro em relação ao preço do produto, pode-se encontrar a função lucro a partir da função de oferta, integrando-a em relação ao preço do produto:

$$\int \frac{P_Y^{\,3}}{16P_k^{\,2}P_L}\,dP_Y = \frac{1}{4}\frac{P_Y^{\,4}}{16P_k^{\,2}P_L} = \frac{P_Y^{\,4}}{64P_k^{\,2}P_L}$$

g) $Y = \dfrac{30^3}{16 \times 6^2 \times 4} = 11{,}72$

$$Y = \frac{2^{1/2} \times 200^{3/4}}{3^{3/4} \times 6^{1/2} \times 4^{1/4}} = 9{,}52$$

h) A quantidade de máximo lucro não se alterou, já que os preços continuam os mesmos. No entanto, a quantidade produzida a partir da função indireta de custo (ou da função de custo) agora é de 9,52, menor que a quantidade de máximo lucro. Nessa situação, a firma não tem recursos suficientes para produzir no máximo global de lucro, tendo que se sujeitar a um nível de produção menor. Observa-se que, nessa situação, a quantidade produzida obtida pelo problema primal (maximização da produção) é a mesma obtida pelo problema dual (minimização do custo). No Apêndice encontra-se um quadro resumido da dualidade aplicada à teoria da produção.

3) Considere uma empresa que tenha a seguinte função de produção: $Y = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}}$. Essa firma tem uma restrição orçamentária C que não lhe permite operar no máximo global de lucro. Considerando que os preços dos fatores são P_{x1} e P_{x2}, encontre:

a) A taxa marginal de substituição.

b) A equação do caminho de expansão.

c) As demandas condicionadas dos fatores.

d) A função de custo.

e) As demandas condicionadas obtidas a partir da função de custo.

f) A função de produção original a partir das demandas condicionadas e da função de custo.

Resolução

a) Os três primeiros itens estão relacionados. Como está sendo pedida a demanda condicionada, o problema deve ser escrito da seguinte forma:

$$Min: C = P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2$$

$$S.a.: Y \leq X_1^{1/2} X_2^{1/2}$$

Aplicando-se o método de Lagrange, o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$L = P_{X1}X_1 + P_{X2}X_2 + \mu(Y - X_1^{1/2} X_2^{1/2})$$

$$1) \frac{\partial L}{\partial X_1} = P_{X1} - \frac{1}{2}\mu X_1^{-1/2} X_2^{1/2} = 0$$

$$2) \frac{\partial L}{\partial X_2} = P_{X2} - \frac{1}{2}\mu X_1^{1/2} X_2^{-1/2} = 0$$

$$3) \frac{\partial L}{\partial \mu} = Y - X_1^{1/2} X_2^{1/2} = 0$$

Para verificar as condições de segunda ordem, monta-se o Hessiano Orlado com as segundas derivadas de cada expressão:

$$\begin{vmatrix} \mu\frac{1}{4}X_1^{-3/2}X_2^{1/2} & -\mu\frac{1}{4}X_1^{1/2}X_2^{-1/2} & -\frac{1}{2}X_1^{-1/2}X_2^{1/2} \\ -\mu\frac{1}{4}X_1^{-1/2}X_2^{1/2} & \mu\frac{1}{4}X_1^{1/2}X_2^{-3/2} & -\frac{1}{2}X_1^{1/2}X_2^{-1/2} \\ -\frac{1}{2}X_1^{-1/2}X_2^{1/2} & -\frac{1}{2}X_1^{1/2}X_2^{-1/2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu X_1 - \mu}{16X_1^{1/2}X_2^{1/2}} + \frac{\mu X_2 - \mu}{16X_1^{1/2}X_2^{1/2}} > 0$$

Tomando-se as duas primeiras condições, de primeira ordem (PO), resolvendo para μ e igualando as duas expressões, obtém-se a taxa marginal de substituição[12]:

$$TMS_{X_2,X_1} = \frac{P_{X1}}{P_{X2}} = \frac{X_2}{X_1}$$

b) O caminho de expansão é obtido isolando X_2 na expressão anterior:

$$X_2 = \frac{P_{X1}X_1}{P_{X2}}$$

c) Para obter as demandas condicionadas, substitui-se a expressão do caminho de expansão na terceira expressão obtida das condições de primeira ordem:

$$Y - X_1^{1/2}\left(\frac{P_{X1}X_1}{P_{X2}}\right)^{1/2} = 0$$

Resolvendo para X_1, obtém-se sua demanda condicionada, e substituindo na expressão do caminho de expansão, obtém-se a demanda condicionada para X_2:

$$X_{1C} = \frac{YP_{X2}^{1/2}}{P_{X1}^{1/2}}$$

$$X_{2C} = \frac{YP_{X1}^{1/2}}{P_{X2}^{1/2}}$$

d) Substituindo as demandas condicionadas na função objetivo (Função de Custo) obtém-se a função indireta de custo:

[12] Outra forma de se obter a TMS é dividindo as duas expressões, já que a primeira corresponde ao produto marginal de X_1 e a segunda, ao produto marginal de X_2.

$$C = P_{X1}\frac{YP_{X2}^{\ 1/2}}{P_{X1}^{\ 1/2}} + P_{X2}\frac{YP_{X1}^{\ 1/2}}{P_{X2}^{\ 1/2}}$$

$$C = YP_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2} + YP_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2}$$

$$C = 2YP_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2}$$

Derivando-se a função indireta de custo em relação ao preço do fator, encontram-se as demandas condicionadas derivadas anteriormente

$$\frac{\partial C}{\partial P_{X1}} = X_{1C} = \frac{YP_{X2}^{\ 1/2}}{P_{X1}^{\ 1/2}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial P_{X2}} = X_{2C} = \frac{YP_{X1}^{\ 1/2}}{P_{X2}^{\ 1/2}}$$

f) Isolando Y nas duas expressões e substituindo na função de custo, obtém-se a função objetivo original:

$$C = \frac{X_{1C}P_{X1}^{\ 1/2}}{P_{X2}^{\ 1/2}}P_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2} + \frac{X_{2C}P_{x2}^{\ 1/2}}{P_{X1}^{\ 1/2}}P_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2}$$

$$C = P_{X1}X_{1C} + P_{X2}X_{2C}$$

4) A função de custo de uma indústria é dada por: $C = 2Y^2P_{X1}^{\ 1/2}P_{X2}^{\ 1/2}$.

Dados os valores de C=180, P_{X1}*=2,* P_{X2}*=4 e* P_Y*=20, pede-se:*

a) A função de oferta e a quantidade ofertada.

b) A demanda condicionada dos fatores e sua quantidade.

c) O lucro da indústria operando nessas condições.

d) Compare esta função de custo com a anterior com relação aos retornos à escala.

e) Retorne ao problema anterior e encontre a função de oferta.

Resolução

a) Para achar a função de oferta, basta derivar a função custo em relação a Y, obtendo-se o custo marginal, e igualar ao preço:

$$\frac{\partial C}{\partial Y} = 4YP_{X1}^{\frac{1}{2}}P_{X2}^{\frac{1}{2}} = P_Y \therefore$$

$$Y = \frac{PY}{4P_{X1}^{\frac{1}{2}}P_{X2}^{\frac{1}{2}}}$$

que é a função de oferta da firma. Substituindo os valores, encontra-se:

$$Y = \frac{120}{4(4)^{\frac{1}{2}}(9)^{\frac{1}{2}}} = 5$$

b) A demanda condicionada:

$$X_{1C} = \frac{\partial C}{\partial P_{X1}} = \frac{Y^2 P_{X2}^{\frac{1}{2}}}{P_{X1}^{\frac{1}{2}}} = \frac{(5)^2(9)^{\frac{1}{2}}}{(4)^{\frac{1}{2}}} = 37{,}50$$

$$X_{2C} = \frac{\partial C}{\partial P_{X2}} = \frac{Y^2 P_{X1}^{\frac{1}{2}}}{P_{X2}^{\frac{1}{2}}} = \frac{(5)^2(4)^{\frac{1}{2}}}{(3)^{\frac{1}{2}}} = 16{,}67$$

c) O lucro da firma será:

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = 120 \times 5 - 4 \times 37{,}50 - 9 \times 16{,}67$$

$$\pi = 600 - 150 - 150 = 300$$

d) Na função de custo encontrada no exercício anterior, $C = 2YP_{X1}^{\frac{1}{2}}P_{X2}^{\frac{1}{2}}$, o expoente de Y é a unidade, ou seja, para cada variação em Y, o custo varia na mesma proporção, *ceteris paribus*. Isso pode ser confirmado pela função de produção, cujo grau de homogeneidade é igual a 1, indicando retornos constantes à escala.

Na função dada neste exercício, $C = 2Y^2P_{X1}^{\frac{1}{2}}P_{X2}^{\frac{1}{2}}$, o expoente de

Y é igual a 2, indicando que, para aumentos na produção, o custo aumentará mais que proporcional, indicando que a função está numa fase de retornos decrescentes.

e) Como esta função apresenta retornos constantes à escala, ao derivar a função custo em relação à produção, o termo Y some da expressão, não sendo possível encontrar uma função de oferta. Na verdade, para uma função de retornos constantes, o custo marginal é uma constante, de modo que a curva de oferta da firma é o preço dado, $Y=P_Y$.

5) Estimou-se a Função Indireta de Custo de uma indústria, dada por $Y = \frac{C^{2/3}}{2^{2/3} P_K^{1/3} P_L^{1/3}}$*, em que* $Y = f(K, L)$ *é a função de produção; C, o custo da firma; e* P_K *e* P_L*, os preços dos fatores de produção K e L, respectivamente. Dados os valores de* C = *R\$ 180,* P_L = *R\$ 2,* P_K = *R\$ 4 e* P_Y = *R\$ 20, em que* P_Y *é o preço do produto Y, pede-se:*

a) Achar a demanda indireta de fatores e sua quantidade.
b) Achar a demanda condicionada dos fatores e sua quantidade.
c) Achar a função de produção.
d) Achar a quantidade de máxima produção.
e) Achar a função de oferta.
f) Achar a quantidade ofertada.
g) Calcular a função de lucro e as demandas dos fatores.
h) Achar o lucro dessa indústria.
i) Verificar em que condições essa indústria se tornaria mais intensiva em capital.

Resolução

a) Achar a demanda indireta de fatores e sua quantidade: aplicando-se o teorema de Roy em $Y = \frac{C^{2/3}}{2^{2/3} P_K^{1/3} P_L^{1/3}}$, obtém-se:

$$-\frac{\partial Y/\partial P_K}{\partial Y/\partial C}=\frac{C^{2/3}}{3\cdot 2^{2/3}\cdot P_K^{4/3}\cdot P_L^{1/3}}\cdot\frac{3\cdot 2^{2/3}\cdot P_K^{1/3}\cdot P_L^{1/3}\cdot C^{1/3}}{2}=\frac{C\cdot P_K^{1/3}\cdot P_L^{1/3}}{2\cdot P_K^{4/3}\cdot P_L^{1/3}}$$

$$=\frac{C}{2P_K}=\frac{180}{2\times 4}=22{,}5 \rightarrow \text{demanda indireta de K.}$$

$$-\frac{\partial Y/\partial P_L}{\partial Y/\partial C}=\frac{C^{2/3}}{3\cdot 2^{2/3}\cdot P_K^{1/3}\cdot P_L^{4/3}}\cdot\frac{3\cdot 2^{2/3}\cdot P_K^{1/3}\cdot P_L^{1/3}\cdot C^{1/3}}{2}=\frac{C}{2P_L}$$

$$=\frac{180}{2\times 2}=45 \rightarrow \text{demanda indireta de L.}$$

b) Achar a demanda condicionada dos fatores e sua quantidade: invertendo a função indireta de custo, obtém-se a função de custo:

$$Y=C^{2/3}\cdot 2^{-2/3}\cdot P_K^{-1/3}\cdot P_L^{-1/3} \therefore C=2\cdot P_K^{1/2}\cdot P_L^{1/2}\cdot Y^{2/3}$$

Utilizando o teorema de Shephard, têm-se as demandas condicionadas dos fatores; entretanto, para obtenção dos seus valores, é preciso saber qual quantidade deve ser ofertada, que via de regra é diferente da quantidade de máxima produção:

$$K_C=\frac{\partial C}{\partial P_K}=\frac{Y^{3/2}\cdot P_L^{1/2}}{P_K^{1/2}} \quad \text{e}$$

$$L_C=\frac{\partial C}{\partial P_L}=\frac{Y^{3/2}\cdot P_K^{1/2}}{P_L^{1/2}}$$

Assim, basta achar a quantidade oferta na letra *f* e substituí-la neste item, juntamente com os respectivos preços dos fatores.

c) Achar a função de produção: para encontrar esta função, isolam-se os preços nas demandas indiretas e os substituem na função indireta de custo:

$P_K = \dfrac{C}{2K}$ e $P_L = \dfrac{C}{2L}$, assim, pode-se reescrever Y como:

$$Y = \frac{C^{2/3}}{2^{2/3} \cdot \left[\frac{C}{2K}\right]^{1/3} \cdot \left[\frac{C}{2L}\right]^{1/3}} \Rightarrow Y = K^{1/3} \cdot L^{1/3}$$, que é a função de produção.

d) Achar a quantidade de máxima produção: para isso, basta substituir as demandas indiretas dos fatores encontradas na letra *a*, em Y, encontrada na letra *c*:

$$Y = 22{,}5^{1/3} \cdot 45^{1/3} \rightarrow Y = 10{,}04 \text{ unidades de produção.}$$

e) Achar a função de oferta: para encontrar a função de oferta da firma competitiva, podem-se seguir dois caminhos:

1) calcular o custo marginal, derivando a equação de custo obtida na letra *b* e igualando-a a P_Y, ou seja, preço igual ao custo marginal, e, ou:

2) derivá-la diretamente do processo de maximização de lucros, aplicando o teorema de Hotelling.

Seguindo a segunda opção, pode-se montar o problema de maximização de lucros como:

$$Max.\ \pi = P_Y \cdot K^{1/3} \cdot L^{1/3} - P_K \cdot K - P_L \cdot L$$

Das condições de primeira ordem, obtém-se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = P_Y \cdot \frac{1}{3} \cdot K^{-1/3} \cdot L^{1/3} - P_K = 0 \ \therefore \ P_K = \frac{P_Y \cdot L}{3 \cdot K^{2/3}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = P_Y \cdot \frac{1}{3} \cdot K^{1/3} \cdot L^{-1/3} - P_L = 0 \ \therefore \ P_L = \frac{P_Y \cdot K}{3 \cdot L^{2/3}} \quad (\mathrm{II})$$

Dividindo a condição I pela condição II, chega-se ao caminho de expansão da empresa:

$$K = \frac{P_L}{P_K} \cdot L \qquad \text{ou} \qquad L = \frac{P_K}{P_L} \cdot K$$

Substituindo nas condições I e II e rearranjando os termos, chega-se às demandas diretas dos fatores:

$$K = \frac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K^2 \cdot P_L^1} \quad \text{e}$$

$$L = \frac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K \cdot P_L^2}$$

Substituindo as demandas diretas dos fatores na função de lucro, tem-se que:

$$\pi = \frac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K \cdot P_L}$$

Aplicando o teorema de Hotelling, tem-se a função de oferta:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_Y} = \frac{P_Y^2}{3^2 \cdot P_K \cdot P_L}$$ que é a função de oferta da fima.

f) Achar a quantidade ofertada:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_Y} = \frac{P_Y^2}{3^2 \cdot P_K \cdot P_L}$$ é a função de oferta da firma, portanto, substituindo as variáveis por seus respectivos valores, é obtida a quantidade ofertada de Y.

$$\frac{P_Y^2}{3^2 \cdot P_K \cdot P_L} = \frac{20^2}{3^2 \cdot 4 \cdot 2} = 5{,}6 \text{ unidades de produto.}$$

g) Calcular a função de lucro e as demandas dos fatores: a função de lucro e as demandas dos fatores foram obtidas na letra *e*.

Função de lucro: $\pi = \dfrac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K \cdot P_L}$

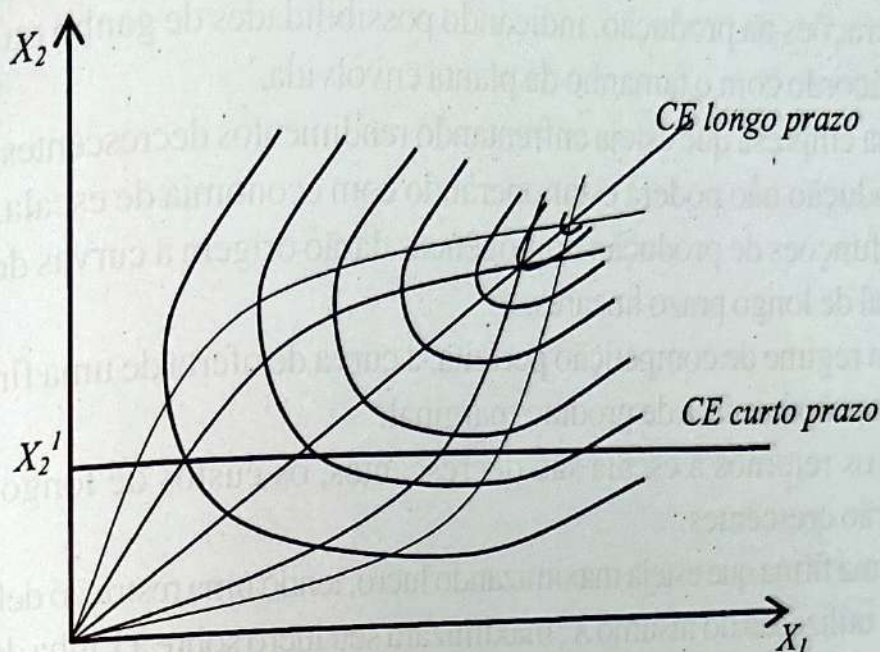
Demanda dos fatores: $K = \dfrac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K^2 \cdot P_L^1}$ $L = \dfrac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K \cdot P_L^2}$

h) Achar o lucro dessa indústria:

$$\pi = \frac{P_Y^3}{3^3 \cdot P_K \cdot P_L} = \frac{20^3}{3^3 \cdot 4 \cdot 2} = 37{,}04$$ unidades monetárias.

i) Para que esta indústria se torne mais intensiva em capital, é necessário que haja alteração na razão de preços P_K / P_L, no sentido de reduzi-la. Ou seja, para isso, ou o preço do capital (K) deve diminuir, ou o preço do trabalho (L) deve aumentar. Como os preços atuais de capital e trabalho são R$ 4,00 e R$ 2,00, respectivamente, a proporção de variação deve ser tal que o trabalho fique mais caro que o capital. Isso ocorre porque as elasticidades de produção em relação tanto ao capital quanto ao trabalho são as mesmas e iguais a 1/3.

6. *Comente a seguinte afirmativa: considere uma firma maximizadora de lucros operando com dois fatores, sendo um deles fixo. Nesse caso, o caminho de expansão da firma será horizontal e linear partindo do eixo que representa esse fator.*

Nesse caso, sendo um dos fatores fixos, a firma se depara com uma situação de curto prazo e o caminho de expansão será a quantidade do fator fixo representado pela linha horizontal que parte do eixo vertical em X_2^1. Com isso, a firma maximizará variando apenas o fator X_1, avançando sobre o caminho de expansão até atingir a linha de falsa escala de X_1, que, nessas condições, seria seu máximo global de lucro. A situação pode ser melhor visualizada ao se fazer a análise fator-produto, como visto anteriormente.

8.8. Exercícios propostos

1) Comente as seguintes afirmativas:

a) Quando o custo médio é crescente, ele será sempre menor do que o custo marginal.

b) Suponha que um produto requeira dois insumos para a sua produção. Nesse caso, é correto dizer que, se os preços dos insumos são iguais, o produtor utilizará quantidades iguais dos dois insumos.

c) As curvas de custos médio e marginal de longo prazo serão lineares se forem originadas de curvas de custo total homogêneas.

d) Se os retornos à escala são decrescentes, os custos de longo prazo serão crescentes.

e) Uma firma que não possa produzir no ponto de máximo global de lucro irá produzir em qualquer ponto do caminho de expansão, desde que atenda à sua restrição orçamentária.

f) No longo prazo, existe apenas um único tamanho ótimo de planta que garante a maximização dos lucros do empresário.

g) A curva de CMeLP cai quando o CMaLP é menor do que ele, e sobe quando o CMaLP o supera.

h) Os retornos à escala medem variações no produto originadas de alterações na produção, indicando possibilidades de ganho ou perda, de acordo com o tamanho da planta envolvida.

i) Uma empresa que esteja enfrentando rendimentos decrescentes na sua produção não poderá estar operando com economia de escala.

j) As funções de produção homogêneas darão origem a curvas de custo total de longo prazo lineares.

k) Em regime de competição perfeita, a curva de oferta de uma firma é a sua própria curva de produto marginal.

l) Se os retornos à escala são decrescentes, os custos de longo prazo serão crescentes.

m) Uma firma que esteja maximizando lucro, tendo uma restrição definitiva na utilização do insumo X_2 maximizará seu lucro sobre a Linha de Falsa Escala do fator X_1, independentemente da quantidade em que X_2 foi fixado.

2) Resolva os problemas:

1. Uma firma agrícola, especializada na produção de soja, apresenta a seguinte função de produção: $f(X) = X^{\alpha}$, em que X é a quantidade do fator mão-de-obra e α é um parâmetro.

a) Derive a função de demanda de mão-de-obra para essa firma.

b) Derive a função de oferta de soja dessa firma.

c) Derive a função de custo de produção de soja dessa firma.

d) Que condições devem ser impostas ao parâmetro α para que as funções acima se comportem dentro dos padrões estabelecidos pela teoria da firma?

2. Considere que a função de custo de produção de milho possa ser representada por: $C(P_X, Y) = Y^2 P_X^{\alpha}$, em que P_X é o preço unitário do fator variável, fertilizante, e Y é a quantidade produzida de milho. Chame de P_Y o preço do produto.

a) Que valor(es) o parâmetro α pode assumir para que essa função represente uma função de custo de produção? Justifique sua resposta.
b) Atribua um valor consistente para o parâmetro α e encontre a função de produção correspondente.
c) Encontre a função de demanda do fator (fertilizante) e a função de oferta de milho para essa firma.
d) Encontre a função lucro dessa firma.

3. Suponha que a função de custo total de curto prazo de um empresário seja $CT = Y^3 - 10Y^2 + 17Y + 66$. Determine o nível de produção em que ele maximiza lucros, se o preço de mercado do produto é igual a *5*. Verifique também a elasticidade de produção nesse nível. Não deixe de mostrar a condição de segunda ordem.

4. A função custo de produção de um produto *Y* é: $C(P_{X1}, P_{X2}, Y) = Y^{1/2}(P_{X1} P_{X2})^{1/2}$, em que *Y* é a quantidade produzida e P_{X1} e P_{X2} são os preços dos fatores 1 e 2, respectivamente.
a) Mostre que essa função apresenta as características de uma função de custo de produção.
b) Derive as equações de demanda condicional dos fatores 1 e 2.
c) Mostre que as demandas condicionais são negativamente inclinadas.
d) Mostre que as elasticidades cruzadas são iguais.

5. Dada a função de produção $Y = \dfrac{10X_1X_2}{X_1 + X_2}$ e considerando que a firma opere com restrição orçamentária *C*, sendo P_{X1} e P_{X2} os preços dos fatores, encontre:
a) As demandas condicionadas dos fatores X_1 e X_2.
b) A função de custo de longo prazo, o custo médio e o custo marginal em função de P_{X1}, P_{X2} e *Y*.
c) O valor de μ como função de P_{X1}, P_{X2} e *Y*.
d) A interpretação de μ.

8.9 Referências

ALVES, E. Discussão dos retornos à escala nos contextos das funções de produção e de custo. **Revista de Economia e Agronegócio**, Viçosa, v. 5, n. 2, p. 163-186, 2007.

BINGER, B.R.; HOFFMAN, E. **Microeconomics with calculus**. 2.ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 633 p.

BINSWANGER, H.P. A cost function approach to the measurement of elasticities of factor demand and elasticities of substitution. **The American Journal of Agricultural Economics**, v. 56, n. 2, p. 377-386, 1974.

CHAMBERS, R. **Applied production analysis**: a dual approach. New York: Cambridge University, 1988.

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. 684 p.

HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. **Teoria microeconômica**: uma aboradagem matemática. São Paulo: Pioneira, 1978.

LOOTY, M.; SZAPIRO, M. Economias de escala e de escopo. In: KUPFER, D.E.; HASENCLEVER, L. (Orgs.). **Economia industrial**: fundamentos teóricos e práticos no Brasil. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. p. 43-70.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1999. 791 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1999. 740 p.

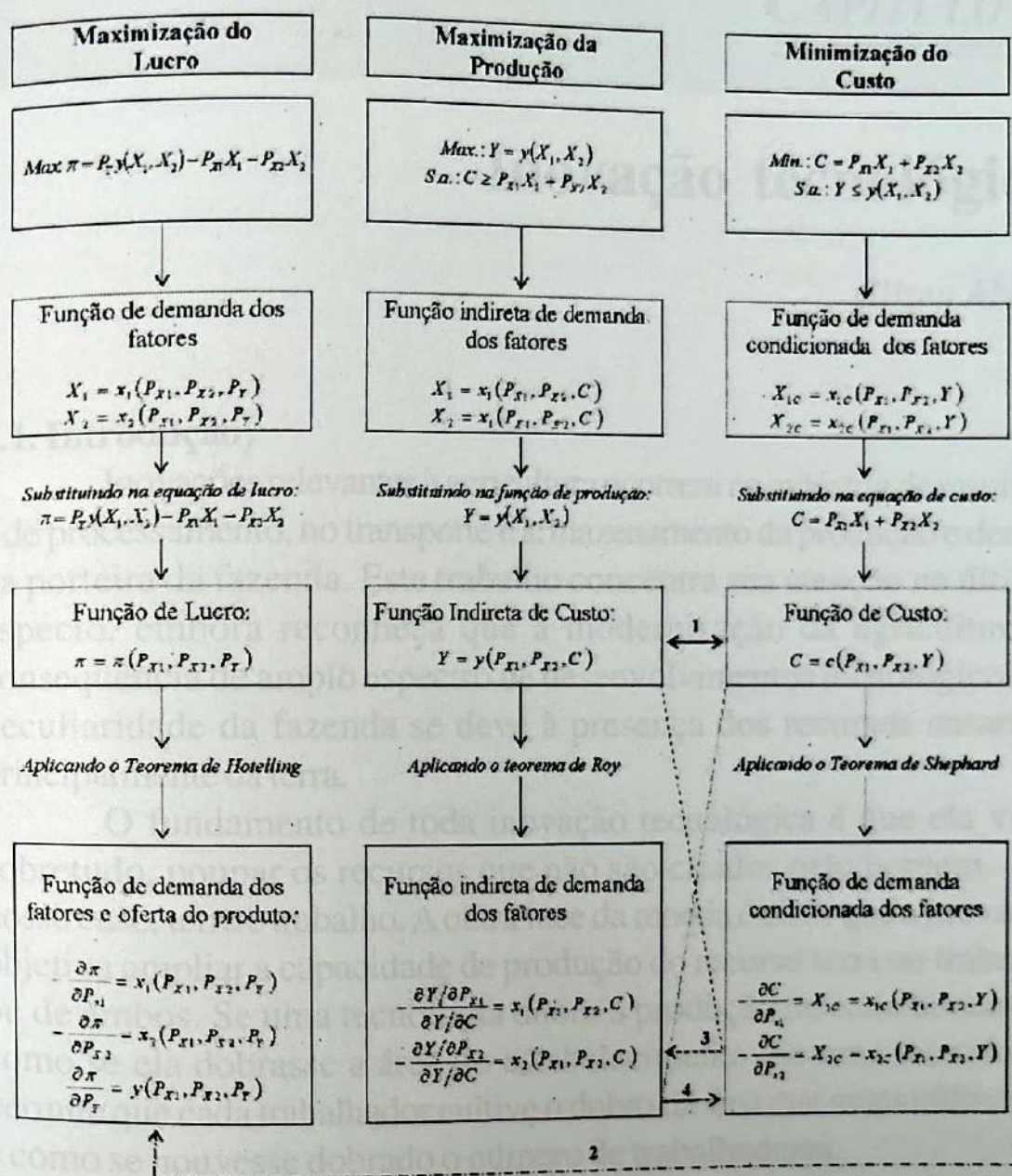
8.10. Apêndice

[1] Invertendo-se a Função Indireta de Custo (FIC) obtém-se a Função de Custo.
[2] Derivando-se a Função de Custo em relação à quantidade produzida obtém-se o Custo Marginal (CMa). Igualando o *CMa* ao preço do produto e resolvendo para *Y*, obtém-se a função de oferta.
[3] Substituindo *Y* na demanda condicionada obtém-se a demanda indireta dos fatores.
[4] Substituindo *C* na demanda indireta dos fatores, obtém-se a demanda condicionada.

Figura 8.1A - Dualidade aplicada à teoria da produção

CAPÍTULO 9

Inovação tecnológica

Eliseu Alves[1]

9.1. Introdução

Inovações relevantes à agricultura ocorrem na indústria de insumos e de processamento, no transporte e armazenamento da produção e dentro da porteira da fazenda. Este trabalho concentra sua atenção no último aspecto, embora reconheça que a modernização da agricultura é conseqüência de amplo espectro de desenvolvimentos tecnológicos. A peculiaridade da fazenda se deve à presença dos recursos naturais, principalmente da terra.

O fundamento de toda inovação tecnológica é que ela visa, sobretudo, poupar os recursos que não são criados pelo homem – no nosso caso, terra e trabalho. A outra face da moeda é dizer que a inovação objetiva ampliar a capacidade de produção do recurso terra ou trabalho ou de ambos. Se uma tecnologia dobra a produção de cada hectare, é como se ela dobrasse a área do estabelecimento. Se uma tecnologia permite que cada trabalhador cultive o dobro da área que antes cultivava, é como se houvesse dobrado o número de trabalhadores.

Assim, há dois fatores naturais de produção: terra e trabalho As inovações ampliam a capacidade de cada um deles ou de ambos. Simbolicamente, quando L representa a quantidade de trabalho e T a de terra, a representação é a seguinte:

[1] Pesquisador da Embrapa. e-mail: eliseu.alves@embrapa.br.

$$L = h(X_1, X_2, ..., X_n) \quad (9.1)$$

$$T = j(Z_1, Z_2, ..., Z_n) \quad (9.2)$$

Por essa representação, a função **h** transforma o vetor X de insumos, os quais cristalizam as tecnologias relevantes, em quantidade de trabalho, e a função j transforma Z em quantidade de terra. Numa outra interpretação, essas duas funções agregam os vetores X e Z, respectivamente, em L e T. Note que L e T não são observáveis. Ter-se-ia que corrigir os valores observáveis, o que é complicado, para se obter os valores a que (9.1) e (9.2) se referem[2].

O vetor de insumos X comporta os insumos que aumentam a área que cada trabalhador cultiva – de natureza mecânica, quase sempre; já o vetor Z cristaliza os insumos que poupam terra – de natureza bioquímica, na maioria dos casos. Observe que se admite que tecnologia esteja cristalizada em X e Z, isso significa que toda nova tecnologia corresponde a um novo insumo ou a uma nova regra de como usar um insumo conhecido. Contudo, essa visão será discutida em oposição àquela que admite que nem toda a tecnologia esteja cristalizada nos insumos.

$$Y = f\left(j(Z), h(X)\right) \quad (9.3)$$

A representação (9.3) consubstancia a idéia de que todo insumo (e as tecnologias se cristalizam nos insumos) tem como objetivo aumentar a produção da terra ou do trabalho. Se se considerar j(.) e h(.) como funções fixas, a função f(.) é definida no espaço que contém os vetores X e Z. A única novidade é que a função f(.) é função composta de j(.) e h(.). Não há dificuldade adicional em calcular, por exemplo, a renda líquida máxima, porém, se se deixar j(.) e h(.) variarem, então, f(.) está definida no espaço de funções. Para fins de operacionalizar máximos e mínimos, ter-se-ia que especificar melhor o espaço em que j(.) e h(.) estão definidas.

[1] Não serão especificados j(.) e h(.), mas são funções crescentes e de contradomínio em R_+.

O agricultor teria que fazer escolha ótima de j(.) e h(.) e da respectiva combinação ótima de insumos. Entretanto, não será abordado aqui esse interessante tópico.

Se for possível encontrar as funções h(.) e j(.) e os respectivos insumos que prevalecerão no longo prazo, então, f(.) é meta função de produção – um conceito que foi popular na década de 1970, em conexão com a hipótese da inovação induzida (HAYAMI; RUTTAN, 1971). Do ponto de vista operacional ou econométrico, é muito complicado resolver esse problema. Por isso, o conceito teve vida curta. Se for possível especificar para o longo prazo f(.), j(.) e h(.), pergunta Kenneth Arrow, no contexto de desenvolvimento tecnológico endógeno: por que não gerar imediatamente a tecnologia correspondente (SILVERBERG; SOETE, 1994)?

No caso da pesquisa particular, não é complicado entender as motivações para a escolha de suas prioridades, em conexão com a maximização da renda líquida, ou, melhor ainda, redução de custo, qual seja aumentar a produtividade do fator que está ficando relativamente mais caro, isto é, poupar terra, se esta ficou mais cara que o trabalho, e vice-versa. No caso da pesquisa pública, a ênfase em j(.) ou h(.) é mais complicada. Em parte, esse foi o problema que Hayami e Ruttan procuraram resolver. Os dois autores, em outras palavras, tornaram a tecnologia endógena ao modelo, sem o especificar rigorosamente. Os modelos recentes de crescimento econômico e mudança tecnológica representam um esforço na direção de, rigorosamente, modelar o desenvolvimento tecnológico endógeno (SILVERBERG; SOETE, 1994). Eles não serão discutidos neste estudo.

A ênfase em h(.) ou j(.) tem muito a ver com o impacto da tecnologia sobre o emprego e sobre a produtividade da terra. Outra questão importante é a difusão de tecnologia, ou seja: como tornar f(.), j(.) e h(.) e os respectivos insumos conhecidos dos agricultores e como financiar a compra de tecnologia. Ainda, é neutra, em relação ao tamanho do estabelecimento, a tecnologia gerada pelo poder público?

Já foram apresentados dois tipos de tecnologia: poupa terra e poupa trabalho. Ainda no contexto da porteira, há a tecnologia

organizacional, a qual procura aumentar a eficiência de todos os insumos, não se cristalizando em nenhum deles. Fora da porteira, a tecnologia objetiva poupar produto[3]. Assim é a tecnologia de transportes, de processamento de alimentos e de armazenamento. Há ainda as inovações que têm como finalidade criar novos insumos ou produtos, as quais são pertinentes às indústrias de insumos e àquelas que processam os alimentos[4].

A tecnologia organizacional freqüentemente não se cristaliza em insumos, como terra e trabalho. Para se levar em conta esse fato, é preciso reformular a função de produção (9.3). Uma maneira muito simples de fazer isso é introduzir a variável **t**, definida nos números reais não-negativos, como uma *proxy* de tecnologia.

$$Y = f\big(j(Z), h(X), t\big) \qquad (9.4)$$

9.2. A endogeneidade da tecnologia: o modelo Hayami-Ruttan

A questão é saber como os sinais do mercado se transformam em tecnologias que dão uma resposta a estes. Para respondê-la, restringe-se às tecnologias que poupam terra ou trabalho. Assim, deixam-se de lado as tecnologias que poupam produto, criam produtos novos e a tecnologia organizacional.

Os dois grupos de tecnologias se cristalizam, cada uma delas, numa miríade de insumos. O problema que se apresenta imediatamente é ter uma medida, unidimensional, que descreva bem essa complexidade. De início, admite-se que j(.) e h(.) são funções fixas e, de certa forma, dizem respeito ao longo prazo, e que a tecnologia se cristaliza em insumos que poupam terra ou trabalho. Sendo fixas j(.) e h(.), representa-se a função de produção por $Y = f(T, L)$, com o entendimento de que T e L sejam influenciados pelos insumos que procuram ampliá-los.

---

[3] A tecnologia poupa-produto tem o poder de aumentar a oferta de produtos da agricultura.

[4] Num contexto mais geral, destacam-se as organizações. E elas são muito importantes para o funcionamento do capitalismo. Inovações nessa área são tão importantes quantas aquelas já mencionadas. Não serão, contudo, estudadas (observação baseada em informações de Décio Zylbersztajn).

Procura-se captar o efeito dos insumos, e aí estão as medidas unidimensionais, nas produtividades da terra e do trabalho. A identidade a seguir é a base da decomposição que se fará, em que Y representa a produção; Y/T é a produtividade da terra; T/L é a produtividade do trabalho, medida pela área que cada trabalhador se responsabiliza; e, finalmente, L e T já foram definidos. Assim, medem-se os impactos das tecnologias poupa-terra e poupa-trabalho por duas medidas unidimensionais e observáveis empiricamente, como se verá:

$$Y \equiv \frac{Y}{T} * \frac{T}{L} * L \tag{9.5}$$

É usual reescrever (9.5) da seguinte forma, em que o membro da esquerda é a produtividade do trabalho, em termos da produção por trabalhador. Essa produtividade corresponde à produtividade média do trabalho, e, no ponto da renda líquida máxima, ela se iguala ao salário, sendo, por isso, muito usada. Note que $\frac{Y}{L}$ depende tanto de tecnologias mecânicas como de bioquímicas.

$$\frac{Y}{L} \equiv \frac{Y}{T} * \frac{T}{L} \tag{9.6}$$

A dinâmica é introduzida pelas taxas de crescimentos dos três membros de (9.6), além de se identificarem quais as tecnologias responsáveis pelo incremento dos dois membros da direita de (9.6). As tecnologias bioquímicas causam o crescimento de Y/T, a produtividade da terra, e as mecânicas induzem o aumento da produtividade do trabalho, expressa pela área que cada trabalhador cultiva, T/L. Em termos de taxas de crescimento, num intervalo pequeno, toma-se o logaritmo de (9.6), como se cada membro fosse uma variável, e deriva-se o resultado em relação a t, interpretado como tempo, e, assim, obtém-se (9.7). E $(\dot{Y/L})$ é a derivada de Y/L em relação ao tempo. Por isso, o membro da esquerda de (9.7) representa o crescimento da produtividade do

trabalho. O primeiro membro da direita é o crescimento da produtividade da terra e o segundo membro é o crescimento da produtividade da área que cada trabalhador cultiva[5].

$$\frac{(\dot{Y/L})}{Y/L} \equiv \frac{(\dot{Y/T})}{Y/T} + \frac{(\dot{T/L})}{T/L} \quad (9.7)$$

Como se enuncia a hipótese da inovação induzida, quando restrita à terra e ao trabalho?

Se o preço relativo do trabalho em relação ao da terra, p_L/p_T, cresce continuadamente, espera-se que as tecnologias poupadoras de trabalho sejam geradas. Como conseqüência, se observará o crescimento da produtividade do trabalho. No caso inverso, as tecnologias poupadoras de terra se evidenciarão, e a produtividade da terra incrementará. As evidências foram fornecidas por Hayami-Ruttan para dois casos polares. No caso dos Estados Unidos, o salário rural cresceu mais que o aluguel de terra, e, no período analisado, a ênfase se deu na geração de tecnologia mecânica, dando origem a um crescimento acentuado da produtividade do trabalho em relação à da terra. No Japão, o inverso ocorreu (HAYAMI; RUTTAN, 1985). Há confusão na aplicação da teoria. Recursos naturais abundantes não implicam necessariamente que o salário cresça continuadamente relativo ao aluguel de terra. Com a exaustão da fronteira americana e industrialização do Japão, os salários relativos referidos não têm mais tendência nítida e, em tempos mais recentes, as produtividades da terra e do trabalho crescem juntas.

É fácil entender como os sinais de mercado chegam à pesquisa particular. A demanda de máquina e equipamento induz o crescimento da indústria respectiva e o seu direcionamento para máquinas e equipamentos com poder, cada vez maior, de substituir trabalho. Quando os aluguéis da terra crescem, surge na indústria a demanda de insumos que aumentam a

---

[5] É possível aplicar (9.7), por exemplo, à década. Então, $s_{Y/L} \equiv s_T + s_L + s_T * s_L$, em que s é a respectiva taxa anual de crescimento, referente à década.

produtividade da terra, como fertilizantes, defensivos e sementes e animais melhorados.

Contudo, parte importante da tecnologia que poupa terra é gerada pela pesquisa pública. Como, então, os pesquisadores das universidades e institutos de pesquisa são influenciados pelo mercado?

A hipótese da inovação induzida se valeu de um mecanismo dialético. Na teoria econômica, o leiloeiro de Walras é um dos mecanismos que explicam como o equilíbrio competitivo é obtido (WALRAS, 1954). Há duas etapas no mecanismo de Hayami-Ruttan. Em primeiro lugar, a subida do aluguel da terra cria a necessidade para os agricultores de aumentar sua produtividade para fazer face ao encarecimento do aluguel. Eles, individualmente, não têm condições de realizar pesquisa, por isso interagem com as instituições públicas, estimulando os pesquisadores a gerarem tecnologias que aumentem a produtividade da terra. Nessa interação está o mecanismo dialético de Hayami-Ruttan. Com o aperfeiçoamento das leis de patentes, a iniciativa particular ampliou os investimentos em tecnologias relevantes ao incremento da produtividade da terra: a montante, na indústria de fertilizantes, defensivos, sementes e genética de animal; dentro da porteira, em agricultura de precisão e plantio direto etc.

O mecanismo dialético descrito tornou claro aos formuladores da estratégia de pesquisa da Embrapa, na década de 1970, que o modelo deveria acomodar centros de pesquisa que facilitassem aos agricultores e ao agronegócio, em geral, desenvolverem forte interação com os pesquisadores. Por isso, optou-se por centros que refletissem a organização da produção, especializados em produtos e no desenvolvimento de recursos. Os produtores de soja, por exemplo, sabem onde estão os pesquisadores dessa lavoura. O mesmo ocorre com milho e sorgo, arroz e feijão, algodão, gado de leite, gado de corte, etc. Quanto aos recursos, destacam-se o cerrado, o trópico semi-árido, o trópico úmido e as terras baixas.

O modelo Hayami-Ruttan fugiu do problema de construir uma medida complexa que refletisse as tecnologias criadas. Ligou o desenvolvimento tecnológico ao mercado, via preço do trabalho em relação

ao do aluguel de terra. Mostrou como a evolução de p_L/p_T gera tecnologias que poupam terra ou trabalho. Pelo mecanismo dialético, indicou como o mercado exerce pressão sobre os pesquisadores para escolher as prioridades de pesquisa. Ou seja, este mecanismo leva os pesquisadores a considerarem, na escolha de prioridades, a evolução de p_L/p_T. O modelo representou um grande progresso para explicar o viés da pesquisa em favor de tecnologias que poupam trabalho ou, então, terra. É original em aplicar a teoria da inovação induzida à agricultura. Deu origem a uma vasta literatura, que não será aqui revisada. Uma extensão dela foi feita por De Janvry, quando estudou a Argentina (DE JANVRY, 1975). Ao lado da hipótese de Schultz, pela qual os pequenos agricultores são eficientes, e, portanto, a realocação de recursos em nível de estabelecimento não traz desenvolvimento, a hipótese da inovação induzida dominou o pensamento desenvolvimentista da agricultura na segunda metade do século 20. A recomendação de Schultz é o investimento em ciência e educação para criar novas tecnologias e alimentar a máquina do progresso (SCHULTZ, 1975). Tanto Schultz com Hayami-Ruttan recomendam investimentos em ciência e tecnologia para o desenvolvimento da agricultura, porém o modelo Hayami-Ruttan foi muito mais longe ao explicar o viés tecnológico e, ainda, teve forte impacto na reorganização da pesquisa e no entendimento da gênese das prioridades de pesquisa.

Os dados dos Estados Unidos, nos quais os dois autores basearam a análise, foram revisados. E, as novas evidências não favoreceram a explicação dada, porque naquele país a pesquisa optou, no período analisado, por tecnologias poupa-trabalho, (OLMSTEAD; RHODE, 1993). Não significam as evidências que a hipótese da inovação induzida tenha sido rejeitada, e sim que a tecnologia poupa trabalho tenha sido gerada por outros motivos que a variação de p_L/p_T.

Como formulado por Hayami-Ruttan, o viés depende da variação de p_L/p_T. E se essa relação não apresentar uma tendência definida ou,

ainda, se a variação for pequena? Certamente, a hipótese perde poder de explicação. Num mundo competitivo, a pressão dos agricultores é pela redução de custos, e não precisa ser direcionada a nenhum fator em especial, a não ser que a variação continuada de p_L/p_T fuja a intervalos toleráveis. Ainda mais que, na maioria dos casos, as tecnologias não são tão específicas. Acabam poupando os dois fatores, como os herbicidas e as plantadeiras de alta precisão. Mesmo as colheitadeiras modernas, de alto poder de eliminar postos de trabalho, permitem melhor aproveitamento da terra. Assim, nos países que esgotaram a fronteira agrícola economicamente factível, nos quais p_L/p_T não apresenta uma tendência bem definida ou varia pouco, a hipótese de Hayami-Ruttan perdeu seu charme. Ela pertence à história econômica, como uma criação importante e genial, mas menos relevante nos dias que correm, em que há muitos fatores que aumentam a demanda por inovações, simultaneamente agindo sobre a terra e o trabalho.

A decomposição, que a identidade (9.7) representa, tem sido amplamente usada na literatura, principalmente naquela interessada em medir o desenvolvimento tecnológico. São indicadas três referências: uma da década de 1970 (PASTORE et al., 1976) e duas recentes (VICENTE et al., 2003; GASQUES et al., 2004).

9.3. Tecnologia cristalizada

Uma corrente de economistas admite que a tecnologia esteja cristalizada nos insumos. Assim, uma tecnologia é nova quando implica um novo insumo ou nova regra de como usar um insumo antigo. O insumo antigo com a nova regra é considerado como se fosse um novo insumo. Por esta visão, a variação da quantidade usada de insumos esgota a variação do produto, desde que se introduzam os novos insumos, com se definiu, e se corrijam os antigos.

Em estudos empíricos, trabalha-se com um número restrito de insumos, muitas vezes apenas dois, como trabalho e capital. A complexidade surge em se corrigir o capital e o trabalho para considerarem-se as inovações ocorridas. No caso do capital, aquelas que o tornam mais

produtivo. No caso do trabalho, fatores como saúde, educação e treinamento. O que se objetiva fazer é obter uma série de dados comparáveis, de tal modo que uma unidade de capital de 1950 seja igual a uma unidade de capital de 2004. O leitor pode imaginar quanto isso é complicado. Essa foi a empreitada a que se dedicaram, por alguns anos, Jorgenson e Griliches (1967 e 1995). Os estudos liderados por esses dois economistas explicaram a maior parte da variação do produto de economias como as dos Estados Unidos e Japão. O resíduo não explicado é muito pequeno.

A posição de Denison – e ele e Jorgenson mantiveram uma controvérsia importante na década de 1960 – é de que nem tudo está cristalizado nos insumos e que o resíduo não explicado pela variação dos insumos é importante. Denison não considera importante a hipótese da cristalização nos insumos (DENISON, 1964). Contudo, Jorgenson mostrou que, empiricamente, não há como testar uma hipótese contra outra. Ou seja, para cada taxa de crescimento em termos de tecnologia cristalizada corresponde uma taxa de crescimento de tecnologia não cristalizada e vice-versa. Uma explicação resumida está em Alves (2004).

Considerando-se dois insumos, em que K representa capital e L trabalho, e dois produtos, em que C corresponde ao bem de consumo e I ao bem de investimento, define-se a produtividade total dos fatores, RPI, relação produto/insumo, por:

$$RPI = \frac{p_C C + p_I I}{P_K K + P_L L}$$

Derivando-se RPI em relação ao tempo, e S representa as respectivas participações no valor total do produto ($p_C C + p_I I$) e no dispêndio com insumos ($p_K K + p_L L$), virá:

$$\frac{R\dot{P}I}{RPI} = \left(S_I^P \frac{\dot{I}}{I} + S_C^P \frac{\dot{C}}{C} \right) - \left(S_K^{in} \frac{\dot{K}}{K} + S_L^{in} \frac{\dot{L}}{L} \right)$$

Note que $\frac{R\dot{P}I}{RPI}$ é o crescimento da produtividade total. No âmbito da hipótese da tecnologia cristalizada, tem-se $\frac{R\dot{P}I}{RPI} = 0$, que significa que o crescimento do produto, primeiro parênteses da direita, é igual ao crescimento do dispêndio em insumos, segundo parêntesis da direita. Se a tecnologia não fosse cristalizada, sobraria um resíduo $\left(\frac{R\dot{P}I}{RPI} > 0\right)$, que é atribuído à tecnologia não-cristalizada – por exemplo, aquela que desloca o gráfico da função de produção para cima. Todavia, observe que nem toda tecnologia não-cristalizada desloca o gráfico da função de produção para cima. O deslocamento somente ocorre se e somente se a função de produção puder se representar como abaixo, e A(t)>0 é uma função não-negativa de t.

$$Y = A(t)f(K, L)$$

O atrativo da hipótese da tecnologia cristalizada reside no fato de que a adoção de uma inovação implica custo, porque o novo insumo terá de ser adquirido. Ela tem implicações importantes, como:

• Nos estudos que visam explicar as taxas de crescimento, sejam aquelas da decomposição estudada por Hayami-Ruttan em (9.7), é importante, além de se ter em mente, o grupo de insumos associados a cada parcela, as quais se referem às tecnologias bioquímicas e mecânicas, considerar os fatores que podem aperfeiçoar a medida de cada insumo. Assim, o nível de educação associa-se a trabalho, nível de fertilidade e irrigação à terra, etc. Dessa forma, a escolha das variáveis independentes dos modelos de regressão deve levar em conta como elas se relacionam com as correções que serão feitas para ter a série de dados numa base comparável.

• Como a pesquisa pública não comercializa insumos, o resíduo $\frac{\dot{RPI}}{RPI}$, não lhe pode ser totalmente atribuído. É costume regredir $\frac{\dot{RPI}}{RPI}$ no orçamento da pesquisa e outras variáveis exógenas. Pela hipótese da tecnologia cristalizada, este resíduo é nulo. O que se faz é, assim, regredir um erro de medida sobre o investimento em pesquisa, o que não é correto. Diga-se que haja uma regressão múltipla e o montante de crédito seja uma das variáveis independentes. Ora, o crédito é usado para comprar insumos, os quais entram na definição de $\frac{\dot{RPI}}{RPI}$. Se um desses insumos, fertilizantes, por exemplo, entra na regressão, junto com o montante de crédito, fica difícil separar os efeitos e, por isso, interpretar os resultados. Pode mesmo ocorrer que o coeficiente da variável crédito não seja, estatisticamente, diferente de zero, devido a uma especificação incorreta.

9.4. Tecnologia para agricultura familiar

A questão que se coloca é que a tecnologia gerada se cristaliza em insumos que grande parte da agricultura familiar e dos assentados da reforma agrária não tem condições de assimilar, em razão do nível educacional insuficiente para compreender e decodificar as instruções que se atrelam às inovações e da falta de capacidade financeira para realizar os investimentos necessários[6]. Por isso, deseja-se reformular a pesquisa pública, de modo que contemple também as supostas necessidades da agricultura familiar, que se supõe específicas. Na realidade, objetiva-se que a tecnologia se cristalize em insumos que se ajustam aos limites da compreensão do agricultor e de sua capacidade de investir.

Esse pensamento tem curso nas lideranças técnicas da agricultura familiar, em alguns setores da pesquisa, em lideranças da política partidária e nas lideranças dos movimentos sociais.

[6] Serão unidos assentados da reforma agrária e agricultura familiar num único grupo. Referir-se-á tão-somente à agricultura familiar.

Uma pergunta merece ser considerada, logo de início. Deve-se eternizar a dualidade existente na agricultura brasileira, em que a agricultura comercial tem acesso às tecnologias de ampla capacidade de resposta a investimentos e a recursos para financiá-la e a agricultura familiar fica restrita a inovações de capacidade de resposta bem mais baixa? É correta a situação em que a agricultura comercial produz enormes excedentes, que ganham o mercado externo e o interno, e a agricultura familiar, além de auto-abastecer-se, produz excedentes pequenos, que tornam a renda familiar insuficiente[7]?

Essa dualidade não tem condições de perdurar no longo prazo, embora o governo pense o contrário, ao se resignar a ter dois ministérios: o que cuida da agricultura familiar e o que se responsabiliza pela agricultura de grande capacidade de produção, erroneamente igualada à agricultura comercial ou ao agronegócio[8]. A utopia de destruir o agronegócio e, assim, eliminar a dualidade remonta ao período do muro de Berlim; a não ser nas entrevistas e escritos de radicais, ninguém fala mais dela. A eliminação da dualidade advirá da capacitação dos agricultores familiares e de lhes fornecer condições de igualdade de competição, inclusive está em ajudá-los a usar as tecnologias de grande capacidade de resposta aos investimentos feitos.

É importante ter em vista que o Brasil é um país industrializado e urbanizado. A tecnologia da agricultura familiar tem que dar à família capacidade de produção de excedente que remunere o seu trabalho, competitivamente, em relação às opções da cidade e em linha com suas aspirações, as quais crescem rapidamente com o grau de instrução. Caso isso não ocorra, é fácil perceber que os agricultores familiares vão se colocar em conflito com as lideranças e com o governo, em busca de igualdade de direito, em relação à agricultura comercial. Ainda, o que é indesejável, muitos agricultores familiares fecharão seus estabelecimentos, alugando ou vendendo-os, e mudarão para a cidade.

A aritmética é muito simples: excedente líquido (valor da produção vendida -despesas) por hectare vezes número de hectares explorados é

[7] Agricultura comercial é o que não é agricultura familiar.
[8] A agricultura familiar é parte do agronegócio e é comercial.

igual ao **excedente monetário** que família produz. Como a agricultura familiar explora área pequena, muito difícil de ser ampliada, a única avenida disponível para aumentar o excedente é usar tecnologias que tenham elevada capacidade e jamais aquelas de pequeno poder de resposta. É preciso compreender que é o excedente monetário que permite à família interagir com o mundo de fora da porteira, na educação dos filhos, na compra de serviços médicos e odontológicos, em viagens, na ampliação da capacidade de tomar crédito, na quitação de compromissos, no acesso à tecnologia sofisticada, etc. Enfim, é o excedente monetário que torna a família cidadã, pelo próprio esforço. Existe outro meio para a família obter a cidadania duradoura e de ter orgulho de ser agricultora?

A agricultura familiar disputa mercado com a comercial. E tem que disputar mercado nas dimensões interna e externa, sem o que perde oportunidades de renda. Os mercados de elevado poder de compra – os que mais bem pagam – são muito exigentes em qualidade, e máquinas e equipamentos adequado são indispensáveis ao atendimento dessas exigências. Como a agricultura comercial é muito dinâmica, ela ocupa rapidamente os melhores espaços de comércio aqui e alhures. Assim, a opção por tecnologias simples vai comprometer severamente o futuro da agricultura familiar, uma vez que irá perdendo as opções lucrativas de mercado para a agricultura comercial.

A tecnologia que gera excedentes de vulto é um conjunto complexo de operações. No caso de grãos, exige densidade correta por hectare, sementes que respondem a fertilizantes, plantio direto na época certa, colheita e armazenamento competentes. As operações podem ser feitas manualmente ou por máquinas simples, mas longe de se ter a mesma precisão e a eficiência das máquinas modernas. Com métodos manuais, uma família não cultiva mais de três hectares.

Noutra dimensão de complexidade, o mesmo ocorre na produção de aves, suínos, leite, gado de corte, ovinos, caprinos, hortaliças e frutas. Sem máquinas e equipamentos compatíveis com a agricultura de precisão, a tecnologia bioquímica, aquela que tem a capacidade de aumentar o

excedente por hectare, perde muito de sua eficiência[9]. Então, é correto privar o agricultor familiar dos benefícios de máquinas e equipamentos modernos?

O que impede que a agricultura familiar adote a tecnologia que gera excedentes de vulto? Realçam-se, como obstáculos, o nível baixo de instrução do agricultor familiar, o que é verdade no Nordeste, Norte e em bolsões das três regiões sulinas, e a baixa capacidade de endividamento.

O baixo nível de instrução tem que ser contornado pela extensão rural pública e por arranjos desta com a extensão particular. E será eliminado por investimentos em educação. Os arranjos da extensão pública com a privada têm de ser mais bem estudados, com a mente livre de ideologias contra o mercado. Não significa, com isso, que se deva eliminar a extensão pública, e sim especializá-la na agricultura familiar e abri-la para contratos com a iniciativa particular, não para reduzir os investimentos públicos, mas para torná-los, socialmente, ainda mais rentáveis.

O baixo nível de endividamento em relação ao custeio pode ser facilmente resolvido reformulando-se as restrições do crédito do governo. Em relação ao investimento, não é fácil resolver, em muitos casos, os problemas causados pelo baixo nível de endividamento. Muitas benfeitorias, máquinas e equipamentos não serão, otimamente, utilizados pelo produtor familiar, como indivíduo. Cooperativas e associações – e para elas bem operarem neste aspecto é necessário crédito rural especializado – podem ser uma solução. Há, neste respeito, alguns casos de sucessos na região Sul, mais raros no Sudeste; o Nordeste e o Norte oferecem muitas resistências ao avanço dessa idéia. Outro óbice ao acesso da agricultura, a mais terra, às benfeitorias, máquinas e equipamentos da agricultura de precisão está relacionado ao não-desenvolvimento do mercado de *leasing* e aluguel de máquinas, equipamentos e de aluguel de terra. Muito há que caminhar em aspectos legais e de operação. A solução desses problemas atende a todo mundo, não esbarra em acordos internacionais, e os investimentos feitos têm elevada taxa de retorno.

---

[9] Agricultura de precisão é usada no sentido de que as operações sejam cuidadosamente feitas, com a maior precisão possível. Não se refere à tecnologia específica, de mesmo nome.

Os agricultores familiares que se libertaram das restrições usam tecnologias que rivalizam com as mais sofisticadas em uso. Assim, não é a tecnologia que discrimina o agricultor, e sim o mercado. É necessário entender que o agricultor familiar escolhe a tecnologia considerando as restrições das quais não pode se evadir. Quem não usa calcário, semente melhorada e fertilizante é porque desconhece a lucratividade destas práticas, não tem recursos para comprar esses insumos, ou eles não estão à venda num raio razoável do estabelecimento. O agricultor familiar, ou qualquer outro, escolhe a tecnologia que lhe é mais conveniente. Se deixar de escolher uma tecnologia lucrativa, é porque a desconhece ou porque enfrenta restrições que não pode contornar.

Aceitando-se a hipótese da irremovibilidade das restrições, pode-se falar num conjunto específico de tecnologias para a agricultura familiar. Todavia, esse conjunto é uma segunda escolha, de menor poder para o desenvolvimento socioeconômico do agricultor e sua família, sendo conveniente para a agricultura comercial na disputa dos mercados interno e internacional. Assim, o caminho ótimo da política agrícola passa pela remoção das restrições.

Compreende-se, assim, que restringir a pesquisa pública a desenvolver tecnologias simples e apropriadas à agricultura familiar não é o caminho correto, embora do gosto de muitos que gravitam em torno da questão agrária. Esse caminho perenizará a dualidade da agricultura brasileira e a pobreza da agricultura familiar, além de produzir a ruptura dos agricultores familiares com as instituições de pesquisa do governo. O caminho indicado pela sabedoria é identificar as restrições, a maioria delas do mercado, e eliminá-las.

9.5. Tecnologia e emprego

Sobre o efeito da tecnologia no emprego, é importante pôr em relevo dois aspectos. A tecnologia mecânica tem seu efeito marcante sobre os trabalhadores assalariados. A agricultura familiar mecaniza se o tamanho da família for insuficiente para realizar as tarefas necessárias ou porque as máquinas não podem ser substituídas pelo trabalho braçal. A redução dos sacrifícios do trabalho braçal é também considerada, inclusive, para gerar

tempo disponível a outras atividades, muitas delas até fora da fazenda. Diretamente, a tecnologia mecânica elimina empregos assalariados. O efeito sobre a mão-de-obra familiar é muito menos importante. A família não substitui seus membros por máquinas para deixá-los desempregados ou forçá-los a migrar. Quando feita a substituição, é para o bem-estar de todos.

O efeito da tecnologia bioquímica é via mercado. Diretamente, esta classe de tecnologia não elimina empregos. Pode até ajudar a criá-los, como foi a tecnologia que permitiu à agricultura expandir nos cerrados. Contudo, o efeito indireto é muito forte. E é tanto mais forte quanto menores forem as taxas de crescimento da demanda. Esta classe de tecnologia tem a capacidade de aumentar a produção, por unidade de área ou de animal, a taxas muito mais elevadas que o crescimento da demanda. Em conseqüência, os preços dos produtos agrícolas caem e decresce remuneração que o setor pode oferecer ao trabalho assalariado e à mão-de-obra familiar, até o ponto em que o mercado urbano passa ser mais atrativo e a família decide migrar. O efeito maior da tecnologia bioquímica é na eliminação de estabelecimentos e nem tanto sobre a mão-de-obra assalariada.

Por que não se estabelecem mecanismos de mercado que freiam a expansão das tecnologias bioquímica e mecânica, à medida que a rentabilidade da agricultura cai?

É óbvio que esses mecanismos existem. Caso contrário, toda a agricultura brasileira teria se modernizado. A queda dos retornos dos investimentos nas atividades da agropecuária reduz novos investimentos e freia, assim, a difusão das tecnologias que estimulam a produção. Contudo, os salários implícitos ou explícitos também são reduzidos e, por isso, perdem poder de competição com o meio urbano. Assim, a redução da intensidade de difusão da tecnologia, em conseqüência da queda dos retornos, não representa uma garantia de que a destruição de empregos não continue ocorrendo.

Depois de estabelecida a agricultura e estabilizada a fronteira agrícola, a não reposição do que foi extraído dos solos compromete a produtividade da agricultura nos anos subseqüentes. A agricultura que está à margem da utilização de insumos modernos, como fertilizantes e calcário, está condenada a ter sua produtividade em declínio ou estagnada e, assim, não terá condições de oferecer empregos duradouros à família e aos trabalhadores. Em conjunto com a decisão de investir em fertilizantes, agregam-se sementes de elevada capacidade de resposta; em suma, um conjunto de tecnologias que têm notável efeito sobre o incremento da produção. A isso somam-se as importações, que por sua vez exigem eficiência da agricultura, e dificilmente a demanda agregada crescerá a taxas compatíveis com a oferta. E o mecanismo de mercado já descrito entra em ação.

As tecnologias do tipo organizacional recebem atenção crescente dos produtores rurais. Certamente, entre outras coisas, objetivarão aumentar a eficiência do trabalho e, indiretamente, contribuirão para a destruição de empregos.

As classes de tecnologia foram analisadas separadamente; contudo, quem mecaniza adota simultaneamente as tecnologias bioquímicas e organizacionais. As tecnologias bioquímicas e organizacionais podem prescindir de uma mecanização mais intensa, porém máquinas e equipamentos são necessários para certas operações, como aração, gradagem e distribuição de calcário. Realizam também com maior precisão que o trabalho manual várias operações. Por isso, a simultaneidade dos efeitos das classes de tecnologia não pode ser ignorada.

Um outro efeito da abertura para o mercado externo é o acesso a máquinas e equipamentos de muito maior poder de eliminar empregos, principalmente na fase de colheita.

O estímulo ao crescimento da demanda representa o melhor caminho para reduzir os efeitos negativos da tecnologia sobre o emprego. A legislação, que complica a administração dos trabalhadores e encarece o custo da mão-de-obra, tem enorme efeito no desenvolvimento da mecanização. Os conflitos entre trabalhadores e agricultores exacerbam a

natural desconfiança que existe entre as partes, apressando, assim, a mecanização da agricultura. Os agricultores, por razões econômicas, substituem trabalhadores por máquinas; por temor, reduzem o número de trabalhadores, porque em cada um deles vêem um potencial invasor.

9.6. Difusão de tecnologia

Qualquer que seja a verbalização, a definição de tecnologia envolve um grupo de insumos (X) que produz um grupo de produtos (Y) e as regras de como combinar os insumos para obter a produção (rg). As regras estabelecem, inclusive, as quantidades de insumos que devem ser usadas para obter determinada produção. Simbolicamente, cada tecnologia pode ser representada por (X, Y, rg), em que X são os insumos (um vetor); Y (um vetor), os produtos que X produz; e, finalmente, rg, as regras de como combinar os insumos[10]. As regras podem conter a receita de produção, as informações de mercado pertinentes, as contra-indicações etc. Na definição de uma nova tecnologia não entram quantidades. Assim, (X, Y, rg) representa os tipos de insumos (X), necessários para produzir os produtos (Y), observadas as regras (rg). No linguajar em voga, (X, Y, rg) é um sistema de produção.

Seja W o conjunto que contém todas as tecnologias conhecidas, no dia de hoje, em nível de produtor e de instituição de pesquisa, no Brasil e no exterior. Um elemento de W é dado por (X, Y, rg). Pode-se restringir W para um produto dentro de uma região, criando subconjuntos de W, ou mesmo para um produtor. Na teoria de produção, W é representado por (X, Y); X produz Y; e X e Y são quantidades. A regra não é explicitada. Mas, neste estudo, W tem o significado indicado, em que as quantidades são irrelevantes, a não ser em definir-se **rg**.

Uma nova tecnologia implica a criação ou modificação de um insumo que não existia antes, ou a criação de um novo produto, ou, ainda, a criação de novas regras. Seja (X', Y', rg'). Se (X', Y', rg') pertencer a W, a tecnologia não é nova. Portanto, uma nova tecnologia implica um novo W. O novo W incorpora o W antigo; não o descarta, portanto. Se

[10] Vetor significa a lista de insumos ou produtos, tendo todos os detalhes necessários.

(X, Y, rg) pertencer a W, (X, Y, rg') não é um elemento de W. Então, (X, Y, rg') é uma nova tecnologia que amplia o W antigo para W' e $W \subset W'$[11]. Como exemplo, uma mudança de espaçamento da lavoura de milho, sem a introdução de nenhum novo insumo.

Observe que não é a mudança na quantidade de insumos ou produtos que gera uma nova tecnologia, e sim um novo insumo, um novo produto ou uma nova regra[12]. A nova regra pode, ademais, mudar a quantidade de x necessária para produzir y.

Cada produtor tem seu W, no qual faz suas escolhas de tecnologias. Quanto mais atrasado for o agricultor, mais restrito é o seu W. É papel da difusão de tecnologia ampliar o W de cada agricultor para lhe dar mais opções de escolha. Assim, uma tecnologia pode ser nova para um agricultor e conhecida de outros. Quando se fala de nova tecnologia, é necessário qualificar em que respeito, ou seja, em relação a qual W. É importante salientar que, num mercado competitivo, há uma convergência para um único W, ou poucos W's. O mercado elimina os agricultores incompetentes e seus W's.

Em princípio, o agricultor é livre para escolher qualquer elemento de W; contudo, o mercado e a legislação em vigor podem restringir, severamente, as escolhas possíveis, em W. Se W contiver um único elemento, passível de ser escolhido, não existe, obviamente, liberdade de escolha. É claro que sempre restará a escolha de deixar de produzir. Algo parecido com isso ocorre com aves e suínos, em que o pacote tecnológico é rigidamente definido e a liberdade de escolha no W relevante, praticamente, não existe. No caso, W é imposto pelo contrato e treinamento e contém muito poucos elementos, ou apenas um único.

Escolhido um elemento de W, sua primeira escolha, o agricultor terá de determinar que quantidades usar, que é sua segunda escolha, ou seja, dentro do conjunto de regras, qual quantidade irá escolher. Se o agricultor pertencer a um mercado competitivo, que é o que impera na agricultura, ambas as escolhas são ditadas pelo mercado. Portanto, dentro

[11] Note que os W's são encadeados.

[12] Caso contrário, ter-se-ia um número ilimitado de tecnologias, da dimensão dos números reais.

de um mercado competitivo, a liberdade de escolha, em W, é severamente restringida. Escolhas incorretas levam ao empobrecimento e à falência. O mercado não subtrai elementos de W, apenas torna subconjuntos de seus elementos irrelevantes à escolha do produtor. Se W corresponde a suínos, o elemento de W referente a porco tipo banha perdura. Apenas este elemento tornou-se irrelevante para as escolhas que serão feitas, atualmente.

Desconsiderando-se as possibilidades de empobrecimento e de falência, qualquer elemento do seu conjunto de produção pode ser escolhido pelo produtor. No entanto, o agricultor não quer ficar pobre e, menos ainda, falir. Assim, num mercado competitivo, o agricultor sofre dois tipos de constrangimento: terá de escolher o W correto, ou seja, abandonar aquilo a que estava acostumado, e limitar o novo W a subconjuntos que são compatíveis com sua sobrevivência econômica.

É o mercado que determina as escolhas passíveis de serem feitas? A resposta correta será sempre afirmativa, ou seja, quem não fizer as escolhas corretas será eliminado. Quem sobrar estará praticando a melhor tecnologia, porém isso não ocorre instantaneamente. O ajuste é penoso e demorado.

Se não houvesse inovações tecnológicas, num mundo de incertezas, fatalmente, os sobreviventes, por tentativa-e-erro, seriam os que fizeram as escolhas corretas. Contudo, isso é verdade no longo prazo. No curto prazo, há muito lugar para os incompetentes. Num mundo sem incerteza, todos acertariam, embora mais de uma tecnologia (de um elemento de W) pudesse ser usada.

Com inovações tecnológicas freqüentes, a eliminação dos incompetentes pode ser mais demorada, ou rápida, dependendo do tipo de inovação.

Em resumo, é o mercado que determina as tecnologias que prevalecem, porém, em função de seu dinamismo, não fica claro o que está ocorrendo. Muitas tecnologias para produzir o mesmo produto sobrevivem num dado momento. Contudo, saber quais sobreviverão num prazo mais longo é muito difícil. Os economistas deveriam se preocupar com essa questão – pelo que parece, consideram-na trivial.

Num mundo de incertezas e de um fluxo intenso de inovações tecnológicas, cabe à difusão encurtar o tempo de difusão e, ainda, tentar garantir igualdade de escolha para os agricultores, especialmente para os mais pobres e de menor nível de instrução. Em síntese, ajudar o mercado realizar o seu trabalho, no menor período de tempo possível, é o papel da difusão de tecnologia.

Como a difusão de tecnologia consome recursos, os serviços terão que ser pagos. Pelos agricultores, no caso, extensão particular. Pelo poder público, no caso as ematеres, o SENAR, etc. Note-se que os serviços oferecidos por firmas que vendem insumos ou pelas cooperativas são, mesmo que indiretamente, pagos pelos agricultores. As firmas embutem o custo dos serviços no preço, e, quanto mais imperfeito for o mercado, mais bem sucedidas são nesse aspecto.

Uma nova tecnologia pode determinar que as demais se tornem irrelevantes. Para isso ocorrer, é necessário que o custo de produção seja menor, quaisquer que sejam os preços de produtos e de insumos. Quando isso ocorre, a nova tecnologia domina as demais. Uma nova cultivar pode ter essa propriedade. Exigências de qualidade e uniformidade limitam severamente as opções de escolha. Exemplos: suínos e aves. Quando uma tecnologia domina as demais, quem não a adotar não sobreviverá. Nesse caso, é a tecnologia que escolhe o agricultor e não vice-versa. A dominância de uma única tecnologia é mais rara. No geral, o mercado determina que algumas tecnologias sejam as dominantes; assim, alguma liberdade de escolha sempre existirá. Em termos de W, o mercado determina que parte deste deixe de ser uma opção de escolha.

Lembre-se que a nova tecnologia amplia W. Nenhum elemento de W é eliminado. O mercado torna alguns elementos irrelevantes para escolha, dependendo da relação de preços de produtos e insumos, de normas e exigências de qualidade e homogeneidade.

Os agricultores são eliminados pela concorrência ou porque eles desistiram do negócio, pois a remuneração não era adequada; contudo, o processo demanda tempo. Enquanto o processo de eliminação estiver em andamento, sobreviverão muitas tecnologias, em razão de determinantes

culturais, limitações de crédito e de capital humano. Quem não acertar com as escolhas corretas irá empobrecer até o ponto em que se convença de que é melhor abandonar as opções feitas ou, então, deixar a agricultura. Muito da modernização da nossa agricultura foi mais conseqüência da troca de agricultores do que da mudança do padrão de escolha dos produtores tradicionais. E a troca de agricultores, em parte, ocorreu entre gerações.

Num mercado competitivo, quem não fizer as escolhas corretas irá quebrar ou empobrecer até aprender a escolher, ou, então, desistir de ser produtor. Assim, o mercado determina as melhores opções tecnológicas, e estas escolhem os agricultores, no sentido de indicar quem irá sobreviver ou não. Fatores intrínsecos aos agricultores, como educação, cosmopolitismo, cultura etc., medem a resistência à mudança. São, assim, importantes para se conhecer quem irá sobreviver. Entretanto, somente a tecnologia, em conjunção com o mercado, determina se a difusão ocorrerá ou não. Cada agricultor é insignificante nesse respeito: adere à escolha correta ou soçobrará, no mar revolto do empobrecimento e das falências[13].

A difusão, por unidade de tempo, depende de fatores ligados ao mercado, ao indivíduo, ao meio ambiente e à comunidade, porém dentro de uma hierarquia. Em primeiro lugar, a tecnologia tem de ser lucrativa, e essa lucratividade, bastante resistente às variações de preços de insumos e produtos e das taxas de juros. Obedecida essa condição, passam a ter influência fatores que dizem respeito ao indivíduo, como educação, cosmopolitismo e idade; à comunidade, como cultura, restrições legais, acesso ao crédito e infra-estrutura; e ao ambiente, como fertilidade dos solos, topografia, temperatura e latitude. É óbvio que o ambiente condiciona a geração de tecnologia, porém esta varia a sua lucratividade à medida que variam os fatores ambientais.

Sumarizando a discussão sobre difusão de tecnologia, cabe ressaltar os seguintes aspectos:

---

[13] Cada agricultor pode sobreviver por muitas temporadas, dependendo do nível de tolerância da família ao empobrecimento.

1. Numa região, o sucesso da difusão de tecnologia, particular ou pública, é função dos números diferentes de W's que os agricultores usam para tomar decisão. Quanto menor o número de W's e mais elementos cada um deles contiver, mais eficiente é a extensão rural.
2. Os elementos de W não se diferenciam por quantidades, mas por qualidades. O mercado, leis e regulamentos podem tornar uma grande parte de W irrelevante para a decisão dos agricultores. Muitos W's podem ser eliminados. Também podem ser eliminados porque se tornaram obsoletos.
3. A premissa fundamental da extensão rural é que cada agricultor tem liberdade de escolha no que se refere à tecnologia. Isso não é verdade para a classe de tecnologias que custam mais barato para um amplo espectro de preços relativos, como a tecnologia de sementes, ou então quando prevalece a integração vertical. O mais comum é o mercado determinar um pequeno número de alternativas lucrativas, e quem não as adotar pode falir ou empobrecer.
4. O papel da extensão é ampliar o W de cada agricultor e reduzir o tempo necessário à adoção das novas tecnologias.
5. As tecnologias rentáveis, num razoável intervalo de preços relativos, são as passíveis de serem adotadas. Fatores como educação, cultura, indivisibilidades, crédito e imperfeições de mercado restringem o acesso de muitos agricultores às tecnologias mais eficientes. Não impedem a difusão, apenas a retardam, ou seja, não têm o poder de evitá-la. Quem se livrar das restrições vai ganhar mais dinheiro, e, por isso, a distribuição de renda ficará mais desigual. Esse efeito da tecnologia nada tem a ver com ela enquanto elemento de W, mas, sim com o fato de que não se dá, efetivamente, igualdade de escolha aos agricultores.

9.7. Exercícios propostos

Os exercícios exigem conhecimentos elementares de cálculo diferencial (derivadas) e da teoria da produção e visam ilustrar pontos abordados no texto.

É comum considerar o custo médio mínimo como apropriado para comparar duas tecnologias. Os exercícios 1 a 4 introduzem o assunto.

1) Considere os preços dos insumos constantes. A curva do custo total, CT, é dada por:

$$CT = Y - 1{,}6Y^2 + 2Y^3 \qquad (9.8)$$

a) Divida CT por Y e obtenha a curva do custo médio. Obtenha o mínimo ($= 0{,}4$ e o custo médio vale 0,68).

b) Derive a curva do custo total, CT, em relação Y, o que resulta na curva do custo marginal. Note que, para $Y = 0$, as duas curvas assumem o mesmo valor. Demonstre esta propriedade para qualquer curva de custo total que admite derivada em relação a Y.

c) Demonstre que a curva do custo marginal não se anula para nenhum número real (o que ocorre em $Y = aX^2 + bX + c$, quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$). Como em 9.8, para *Y=0* o custo marginal é igual 1, portanto, positivo, segue-se que CT é função crescente de **Y** (por quê?), como manda a teoria.

2. Resolva as letras a), b) e c) para

$$CT = Y - Y^2 + Y^3 \qquad (9.9)$$

Note que o custo médio mínimo ocorre em $Y = 0{,}50$ e vale 0,75. A curva do custo marginal corta a curva do custo médio no ponto mínimo, em (0,5 0,75). Demonstre essa proposição. À direita do custo médio mínimo, a curva do custo marginal é a oferta da firma.

3) Desenhe os gráficos das duas curvas de custos médios e as curvas de custos marginais correspondentes.

a) O ponto de equilíbrio da firma ocorre no ponto em que o custo marginal se iguala ao preço. Recorde a demonstração.

b) Se o equilíbrio ocorrer acima do custo mínimo, a firma tem renda líquida positiva. Há incentivos para entrada de novas firmas. A produção aumenta. Se a demanda agregada se inclinar negativamente, os preços caem. Sobreviverá a tecnologia de menor custo mínimo. Assim, é comum comparar os custos mínimos de (9.8) e (9.9) para se determinar que

tecnologia é a melhor. Contudo, isso somente conta a metade da história, ou seja, mede-se a resistência da tecnologia à queda dos preços. Em 9.8 e 9.9, Iguale P_Y, preço do produto, ao custo marginal, nos respectivos custos mínimos. Suba P_Y de 0,5 em 0,5 e calcule cada quantidade ofertada. Some as duas quantidades e obtenha a oferta total. Calcule a oferta advinda de (9.8) como porcentagem daquele total. Que tecnologia domina a oferta, quando os preços sobem? Uma tecnologia é robusta quando resiste à queda de preços e responde rapidamente à subida destes.

4) Se a curva da demanda agregada for paralela ao eixo da quantidade (infinitamente elástica?), o que ocorrerá? A luta pelas exportações tem como fundamento aumentar a elasticidade da demanda agregada. Por quê (releia o texto, na seção tecnologia e emprego)?

5) Para completar o exercício, escreve-se a fórmula completa do custo total (9.8) deixando-se os preços dos insumos variarem: $CT = (Y - 1{,}6Y^2 + 2Y^3) * h(P_X)$. *E* $h(P_X)$ *é crescente, linear homogênea e côncava em . Como, no exercício, admitiu-se que , preços dos insumos, não varia, desprezou-se* $h(P_X)$. *Verifique se agora CT satisfaz as propriedades da função custo (ALVES, 1995, p. 9-10).*

6. A função renda líquida é definida por: $\pi(P_Y, P_X) = \underset{X,Y}{Max}\{P_Y * Y - P_X * X\}$, *em que o máximo é tomado no conjunto U={(X,Y): X produz Y}. Vale o seguinte: Y é o vetor de produtos; X, o vetor de insumos;* P_Y, *o vetor preço dos produtos; e* P_X, *o de insumos. Como, por hipótese, (0,0) pertence a U, segue-se que* $\pi(P_Y, P_X) \geq 0$. *É sabido que a renda líquida observada pode ser negativa. Reconcilie esse fato com* $\pi(P_Y, P_X) \geq 0$. *Além disso, a função renda líquida é monótona não decrescente em* P_Y *e não-crescente em* P_X. *Quando , portanto, finita, ela é convexa em (* P_Y, P_X *).*

Considerando que a economia produza um único produto Y, use um único insumo X. A demanda de Y é dada por (9.10), a oferta por (9.11) e a renda líquida por (9.12). Resolva (9.10) e (9.11), explicitando P_Y em função de t. Encontre $P_Y^{-0.6} = t^{0.8}$. Tire logaritmo de ambos os lados da igualdade à esquerda e derive em relação a t. Encontre $dP_Y / P_Y = -1,33 * dt / t$. Assim, 10% de incremento em t, que representa tecnologia, traz decréscimo de 13,3% em P_Y. Localize no texto onde se usou, qualitativamente, esse fato. Imite o que foi feito anteriormente, e veja quanto o decréscimo de 13,3% em P_Y, quando P_X é constante, traz de decréscimo na renda líquida. Resposta: $dR / R = 2 * dP_Y / P_Y$. Veja como um decréscimo de tem efeito acentuado na renda líquida. Esse argumento é também usado no texto. Localize a seção.

$$D : Y = P_Y^{-0,2} \quad (9.10)$$

$$S : Y = P_Y^{0,4} t^{-0,8} \quad (9.11)$$

$$\pi : R = P_Y^2 P_X^{-1} \quad (9.12)$$

7. Para saber se $\pi : R = P_Y{}^2 P_X{}^{-1}$ é convexa, você precisa da matriz a seguir. Verifique se a matriz satisfaz a condição de convexidade. Cheque se $R(P_Y, P_X)$ é crescente em P_Y e decrescente em P_X. É R linear homogênea em P_Y e P_X também no caso geral?

$$\begin{bmatrix} R_{P_Y P_Y} & R_{P_Y P_X} \\ R_{P_X P_Y} & R_{P_X} R_{P_X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P_X{}^{-1} & -2P^2{}_Y P_X{}^{-2} \\ -2P_Y P_X{}^{-2} & 2P_Y{}^2 P_X{}^{-3} \end{bmatrix}$$

8) Demonstre a fórmula $s_P \equiv s_T + s_L + s_T * s_L$.

9) A firma produz um só produto e usa para isso um só fator de

produção: trabalho. A função de produção é $Y = f(L)$; $f_L(L) > 0$, $f_{LL}(L) < 0$. Admita que a tecnologia nova está cristalizada em L e corresponde a multiplicar L por $t > 1$, e a função de produção se transforma em $f(tL)$. O preço do produto é P_Y e o salário é P_L, ambos dados para a firma. Obtenha a condição de primeira ordem. Observe ser côncava a função de produção. Que isso significa? Derive a condição de primeira ordem, em relação t, obviamente, no ponto de equilíbrio. Mantenha P_L constante. Obtenha $dL / dt = -(Lf_{LL} - P_L t^{-2}) / f_{LL}$. Qual é o sinal de dL / dt? A condição de primeira ordem dá a equação da demanda da firma. Pelas condições do problema, ela se inclina negativamente: demonstre esse fato. Um aumento de t desloca a função de demanda em que direção? Que tem a ver com a mecanização este exercício?

10) Especialize o exercício 9 para a função de produção $Y = AL^{0.5}$.

11) É produzida a quantidade Y de um só produto de preço P_Y, que varia com o tempo. O valor da produção é dado por $V = P_Y * Y \equiv P_Y * (Y / A) * (A / L) * L$. Obtenha a decomposição $\log(V / L) = \log(P_Y) + \log(Y / A) + \log(A / L)$. Derive em relação a t. Obtenha a decomposição do crescimento do valor médio da produtividade do trabalho. (Sugestão: substitua os parênteses por v, u, n e m, depois retorne às definições originais). Note que, agora, variações do preço do produto afetam as taxas de crescimento da produtividade média do trabalho, como ela foi definida.

12. Escreva que $PM_e(L) = P_Y * f(L) / L$. e $f(L)$ têm as propriedades já enunciadas. Mostre que $PM_e(L)$ passa por um máximo quando $P_Y * (f(L) / L) = P_Y f_L(L)$. Assim, o valor médio da produtividade do trabalho somente tem significado econômico no seu ponto máximo, porque é igual ao valor da produtividade marginal do traba-

lho, a qual é igual ao salário, quando a renda líquida é máxima. Não deixe de verificar as condições de segunda ordem para máximo. Admita a tecnologia embutida e $P_Y = 1$*. Dez por cento de incremento de* t *traz quantos por cento de incremento de* $PM_e(L)$*? Resposta: Derive* $PM_e(tL)/tL$ *e, em seguida, faça* $t=1$ *para obter* $dPM_e(L) = (f_L(L) - f_L(L)/L)dt$*. O termo entre parênteses é negativo, por quê? Equivalentemente,* $dPM_e(L)/PM_e(L) = [f_L(L)/PM_e(L) - 1/L]dt$*. O resultado é invariante em relação ao valor de L? O que ocorre quando a função de produção é linear homogênea? Na definição da demanda de trabalho (L), qual trecho de* f_L *é relevante? Qual é o maior nível de salário possível de ser pago pela firma?*

13. No início da década e no final dela têm-se os seguintes dados: $Y_0 = 100$; $Y_{10} = 130$; $A_0 = 100$; $A_{10} = 120$; $L_0 = 100$; $L_{10} = 90$*, em que Y é produção; A, área colhida; e L, trabalho. Aplique a fórmula* $s_Y \equiv s_A + s_L + s_A * s_L$ *e determine os respectivos valores das taxas de crescimento. Note que* $(Y/A)_0 = 1; (Y/A)_{10} = 130/120; (A/L)_0 = 1; (A/L)_{10} = 120/90$*, e assim por diante. Desse modo,* $s_A = 0{,}8\%; s_L = 2{,}9\%$*. Calcule* s_Y *diretamente e verifique os resultados.*

9.9. Referências

ALVES, E. **A função custo**. Brasília: Embrapa, 1995.

ALVES, E. **Tecnologia cristalizada e a produtividade total dos fatores**. Brasília: Embrapa, 2004.

ARROW, K. The production and distribution of knowledge. In: SILVERBERG, S.; SOETE, L. (Eds.). **The economics of growth and technical change**. Croft Road, England: Edwards Elgar, 1996. p. 9-19.

DE JANVRY, A. A socioeconomic model of induced innovation for Argentina agricultural development. **Quarterly Journal of Economics**, v. 87, p. 410-435, 1973.

DENISON, E. The unimportance of the embodied question. **American Economic Review**, v. 54, n. 1, p. 90-94, 1964.

GASQUES, J.G.; BASTOS, E.T.; BACCHI, M.P.R.; CONCEIÇÃO, J.C.P.R. Condicionantes da produtividade da agropecuária brasileira. **Revista de Política Agrícola**, ano 13, n. 3, p. 73-90, 2004.

HAYAMI, Y.; RUTTAN, V.W. **Agricultural development**: an international perspective. Baltimore and London: John Hopkins Press, 1971.

JORGENSON, D. **Productivity**: postwar U.S. economic growth. Cambridge, Massachusetts, 1995. v. 1.

JORGENSON, D. **Productivity**: international comparisons of economic growth. Cambridge, Massachusetts, 1995. v. 2.

JORGENSON, D.; GRILICHES, Z. The explanation of productivity change. **Review of Economic Studies,** v. 34, n. 3(99), p. 249-280, 1967.

OLMSTEAD, A.L.; RHODE, P. Induced innovation in American agriculture: a reconsideration. **Journal of Political Economy**, v. 1, n. 101, p. 100-118, 1993.

PASTORE, A.C.; ALVES, E.; RIZZIERI, J. Inovação induzida e os limites à modernização da agricultura brasileira. **Revista de Economia Rural**, ano 14, T. 1, p. 257-285, 1976.

SCHULTZ, T.W. **Transforming traditional agriculture.** New Haven, Conn.: Yale University Press, 1964.

SILVERBERG, S.; SOETE, L. (Eds.). **The economics of growth and technical change**. Croft Road, England: Edwards Elgar, 1996.

VICENTE, J.R.; ANEFALOS, L.C.; CASER, D.V. Influência de capital humano, insumos modernos e recursos naturais na produtividade agrícola. In: HELFAND, S.M.; REZENDE, G.C. (orgs.). **Região e espaço no desenvolvimento agrícola brasileiro**. Rio de Janeiro: IPEA, 2003. p. 265-295.

WALRAS, L. **Elements of pure economics**. London: George Allen & Unwin, 1954.

Capítulo 10

Modelo produto-produto

Adelson Martins Figueiredo[1]
Eduardo Rodrigues de Castro[2]
Maurinho Luiz dos Santos[3]

10.1. Introdução

Nos modelos fator-produto e fator-fator apresentou-se o comportamento da empresa em um mercado competitivo. Nesses modelos, o objetivo principal do empresário é a determinação da quantidade de produto que irá maximizar o lucro. Para isso, considera-se a tecnologia utilizada e os recursos disponíveis para aquisição de insumos, sendo a quantidade ideal a ser produzida, definida em função dos preços dos fatores e do produto. Estes modelos são estruturados considerando-se também que as empresas produzem apenas um produto. O objetivo é definir a quantidade ideal de insumos a ser empregada na produção, ou seja, a **combinação ótima de insumos** que propicia à empresa a obtenção do lucro máximo, de acordo com a tecnologia utilizada.

Entretanto, uma vez definida a tecnologia de produção da empresa, pode surgir a possibilidade de empregar os insumos na produção de mais de um produto, seja em processos de produção únicos ou diferentes. Surge assim o modelo produto-produto, no qual se considera a possibilidade de produção conjunta de vários produtos. Neste modelo, objetiva-se definir **as combinações ótimas de produtos**, que tornam a

[1] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: eduardo@ufscar.br
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

empresa maximizadora de lucro, de acordo com os preços dos produtos, preços dos insumos e quantidade disponível de recursos da empresa.

Cabe destacar que, para muitas empresas, constata-se a produção conjunta de diversos bens ou produtos que concorrem pelos mesmos insumos. Por exemplo, uma empresa rural pode produzir milho e soja, carne e leite, entre outros. Também é fácil perceber que algumas grandes empresas produzem diversos produtos que concorrem pelos mesmos fatores de produção – como exemplo, uma indústria de laticínios que produz queijo, requeijão, manteiga, iogurtes, sorvetes etc.

A produção de múltiplos produtos se justifica por vários motivos, dentre os quais destacam-se os seguintes:

- Economias de escopo, que ocorrem quando a produção conjunta de diferentes bens permite aumentos de produção e, ou, reduções de custos que a empresa não teria se as produções fossem realizadas separadamente. De acordo com Pindyck e Rubinfeld (1999), as economias de escopo podem ocorrer tanto nos casos em que a produção de produtos diferentes está intimamente ligada, por exemplo, à produção de aves e ovos, como nos casos em que as linhas de produção são distintas, ou em que os produtos não são fisicamente ligados, como numa indústria automobilística produtora de caminhões e tratores. Entretanto, em ambos os casos a empresa provavelmente terá vantagens de produção ou de custo por produzir dois ou mais produtos, em vez de apenas um. Estas vantagens podem advir:

- Da utilização conjunta de instalações, do emprego de insumos comuns, como mão-de-obra, programas conjuntos de *marketing* e, ou, de prováveis economias nos custos de uma mesma administração.

- Participação em diversos mercados e, ou, diversos nichos de mercados, promovendo maior lucratividade à empresa e, portanto, maior estabilidade.

- Redução de risco, devido à diversificação de investimentos na produção multiproduto. Ou seja, uma empresa que produz várias mercadorias, certamente, atua em diferentes mercados referentes a cada produto específico. Assim, em situações de mercado desfavoráveis para

um produto específico (por exemplo, queda na demanda), parte dos recursos que seriam aplicados em sua produção pode ser utilizada na produção de outro produto. Destaca-se que essa possibilidade, possivelmente, seria difícil de ser usada em processos produtivos especializados na produção de apenas um produto.

- Exploração eficiente das oportunidades de realização de negócios, ou de realização de lucros. Com processos produtivos multiprodutos as empresas têm maior capacidade de explorar oportunidades de mercado (oportunidades que surgem por já atuarem no mercado), reduzindo, em conseqüência, os seus custos de oportunidades.

Portanto, a maximização de lucros de uma empresa que produz mais do que um produto deve ser norteada por, pelo menos, dois questionamentos: 1) é mesmo vantajosa a produção diversificada, ou existe, entre os possíveis produtos a serem produzidos, um que devido a condições específicas do processo produtivo (produtividade) e, ou, de mercado (preço, demanda e concorrência) propicie maior receita? 2) dado que se decida por uma produção diversificada ou multiproduto, qual quantidade deve ser produzida de cada produto?

Surge assim a possibilidade de usar os insumos produtivos em proporções diferentes na produção de mais de um produto. Além disso, insumos que em um processo produtivo específico seriam inteiramente usados na produção de apenas um produto podem agora ser totalmente ou, em parte, empregados na produção de outras mercadorias. Disso surge o conceito de curva de transformação, mais conhecida como curva de possibilidades de produção (CPP), muitas vezes denominada também de fronteira de possibilidades de produção.

10.2. Curva de possibilidades de produção e taxa marginal de transformação

Para facilitar o entendimento conceitual e simplificar as ilustrações gráficas, será usado o exemplo de uma empresa de confecções que produz calças e camisas, denotadas por y_1 e y_2, respectivamente, com um conjunto de insumo, $x^0 = (X_1, X_2, ..., X_n)$, que é função das quantidades

produzidas de calças e camisas. Assim, tem-se que:

$$y_1 = f\left(x^0_{y1}\right) \quad (10.1)$$

$$y_2 = f\left(x^0_{y2}\right) \quad (10.2)$$

$$x^0 = f\left(y_1, y_2\right) \quad (10.3)$$

Portanto, x^0 pode ser reescrito como:

$$x^0 = x_{y1} + x_{y2} \quad (10.4)$$

em que x_{y1} e x_{y2} são as demandas de fatores em cada linha de produção.

Em um exemplo hipotético, têm-se os volumes de produção de y_1 e y_2, conforme combinações no uso de 10 unidades de insumos, $x^0 = x_{y1} + x_{y2} = 10$, em ambas as linhas ou processos de produção (Tabela 10.1).

Tabela 10.1 - Produção de calças e camisas para um dado conjunto de insumos x^0

x_{y1}	Produção de calças – (y_1)	x_{y2}	Produção de camisas – (y_2)
0	0	10	65
1	10	9	63
2	19	8	60
3	28	7	56
4	35	6	51
5	41	5	45
6	46	4	38
7	50	3	30
8	53	2	21
9	55	1	11
10	56	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

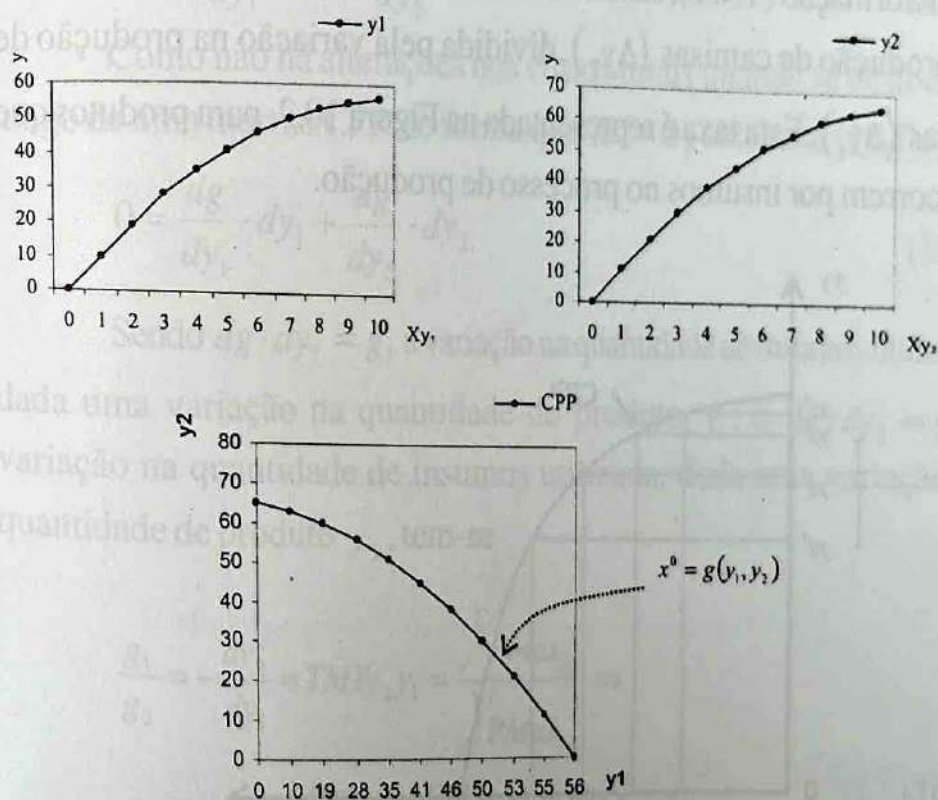
Analisando a Tabela 10.1, verifica-se que, se todos os insumos fossem alocados na produção de calças, 56 unidades seriam produzidas. Caso ocorresse o contrário, optando-se apenas por produzir camisas, seriam obtidas 65 unidades. Combinando as 10 unidades de insumos na produção de y_1 e y_2, podem-se ilustrar graficamente as funções de produção para calças e camisas, além de construir a curva de possibilidades de produção de ambos os produtos (Figura 10.1). A CPP pode ser definida, então, como o espaço geométrico que une as combinações de produção de y_1 e y_2 tecnicamente possíveis de se obter com um mesmo montante de recursos ou a um determinado custo total. Portanto, qualquer combinação de produção de y_1 e y_2, sobre a CPP reflete um mesmo custo de produção, apenas com diferentes quantidades produzidas de ambos os produtos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10.1 - Representação das funções produção de calças, camisas e CPP

No exemplo da empresa de confecções, a CPP é representada por $x^0 = f(y_1, y_2)$. Generalizando, para qualquer quantidade de insumos, a CPP pode ser representada como uma função implícita do tipo,

$$x = g(y_1, y_2) \qquad (10.5)$$

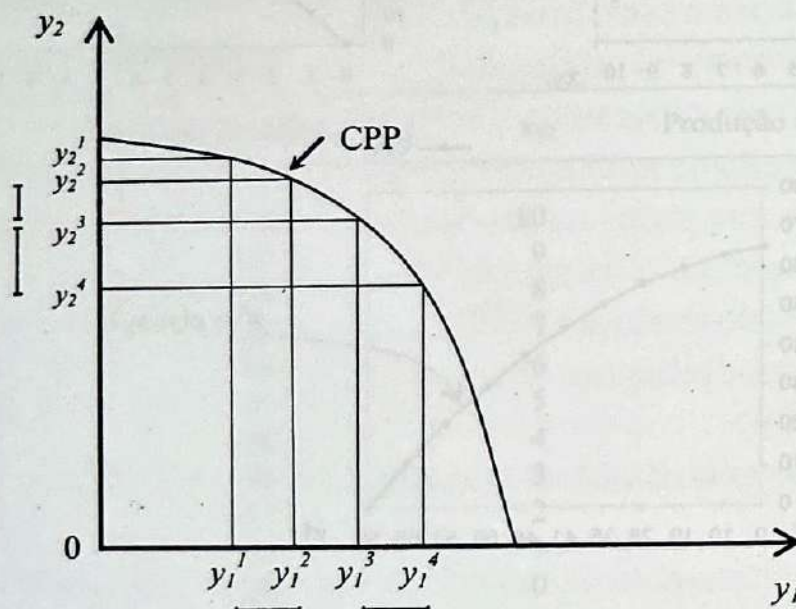
À medida que insumos destinados à produção de camisas são alocados na produção de calças, ocorre uma transformação de camisas em calças. Por outro lado, alocando-se insumos que seriam utilizados na produção de calças para a produção de camisas, ocorreria uma transformação de calças em camisas. Considerando a transformação de camisas em cada unidade de calças, obtém-se a Taxa Marginal de Transformação (TMT), sendo medida em valor absoluto, pela variação na produção de camisas (Δy_2), dividida pela variação na produção de calças (Δy_1). Esta taxa é representada na Figura 10.2, para produtos que concorrem por insumos no processo de produção.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10.2 - Taxa de transformação de camisas por calças e CPP

Percebe-se que a TMT é positiva e, à medida que se transformam as camisas em calças, se torna cada vez maior[4]. Dessa maneira, pode-se defini-la como o negativo da inclinação da CPP, uma vez que a inclinação da CPP é negativa. Entretanto, a TMT dependerá do formato da CPP e, portanto, das possibilidades de combinação ou não dos insumos na produção multiproduto. Dessa forma, a TMT será positiva se a inclinação da CPP for negativa, será negativa se a inclinação da CPP for positiva, e será nula se a inclinação da CPP for nula. A TMT costuma ser definida também como o montante que se deixa de produzir de um produto para obtenção de mais uma unidade de produção do outro.

Matematicamente, a TMT pode ser obtida diferenciando-se a função da curva de possibilidade de produção (10.5):

$$dx = \frac{dg}{dy_1} \cdot dy_1 + \frac{dg}{dy_2} \cdot dy_2 \tag{10.6}$$

Como não há alterações nos custos totais quando se desloca ao longo de uma mesma CPP, de forma que $dx = 0$, obtém-se (10.7).

$$0 = \frac{dg}{dy_1} \cdot dy_1 + \frac{dg}{dy_2} \cdot dy_2 \tag{10.7}$$

Sendo $dg/dy_1 = g_1$ a variação na quantidade de insumos utilizada, dada uma variação na quantidade do produto y_1, e $dg/dy_2 = g_2$ a variação na quantidade de insumos utilizada, dada uma variação na quantidade de produto y_2, tem-se

$$\frac{g_1}{g_2} = -\frac{dy_2}{dy_1} = TMTy_2y_1 = \frac{1/PMax_{y1}}{1/PMax_{y2}} \Rightarrow$$

$$TMTy_2y_1 = \frac{PMax_{y2}}{PMax_{y1}} = \frac{CMay_1}{CMay_2} = -\frac{dy_2}{dy_1} \tag{10.8}$$

[4] De acordo com Pindyck e Rubinfeld (1999), a curva de possibilidade de produção não precisa necessariamente ter uma TMT continuamente crescente. Supondo que haja substanciais rendimentos decrescentes de escala na produção de calças, à medida que os insumos fossem deslocados da produção de camisas para a produção de calças, a quantidade de camisas que se deixaria de produzir para obter uma unidade a mais de calças iria diminuir.

Sendo dy_2 / dy_1 negativo, a TMT é positiva. É importante lembrar que a $TMTy_2y_1$ não é negativa, pois dy_2 / dy_1 é negativo, resultando em uma $TMTy_2y_1$ positiva. As produtividades marginais para x_{y1} e x_{y2} podem ser obtidas pela derivada parcial implícita de (10.6) em relação a dx, ou seja, $\partial y_1 / \partial x$ e $\partial y_2 / \partial x$.

10.3. Maximização do lucro e da receita total no modelo produto-produto

A firma se depara com infinitos vetores de insumos x ou infinitas curvas de possibilidades de produção. Ao considerar todas as curvas de possibilidade de produção da firma, tem-se o mapa de possibilidades de produção, como na Figura 10.3.

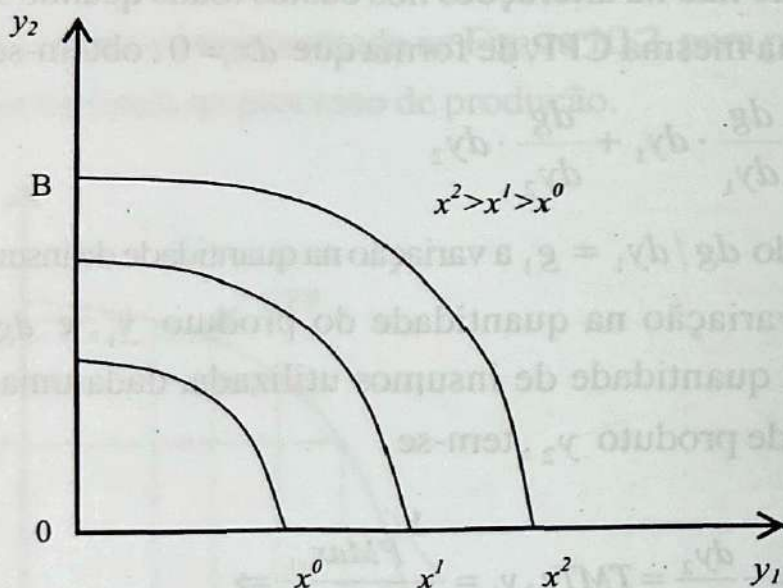



Figura 10.3 - Mapa de produção

No modelo produto-produto, a receita total (RT) é obtida do somatório das produções individuais de cada produto, multiplicados pelos seus respectivos preços. Portanto, para o exemplo da empresa de confecções a receita total será:

$$RT = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2 \quad (10.9)$$

Desta equação pode-se construir a curva de isorrenda ou isorreceita, como segue:

$$y_2 = \frac{RT}{Py_2} - \frac{Py_1}{Py_2} \cdot y_1 \quad (10.10)$$

Percebe-se que a inclinação da isorreceita é igual ao negativo da razão de preços de mercado Py_1 / Py_2. Na Figura 10.4, percebe-se que, aos preços de mercado Py_1 e Py_2, a isorreceita representa as diferentes combinações de produção de y_1 e y_2 que geram um mesmo montante de receita total. Mantendo-se constantes os preços dos produtos, aumentando-se a produção, desloca-se a curva de isorreceita, mantendo-se a mesma proporção das quantidades produzidas de y_1 e y_2 (Figura 10.5).

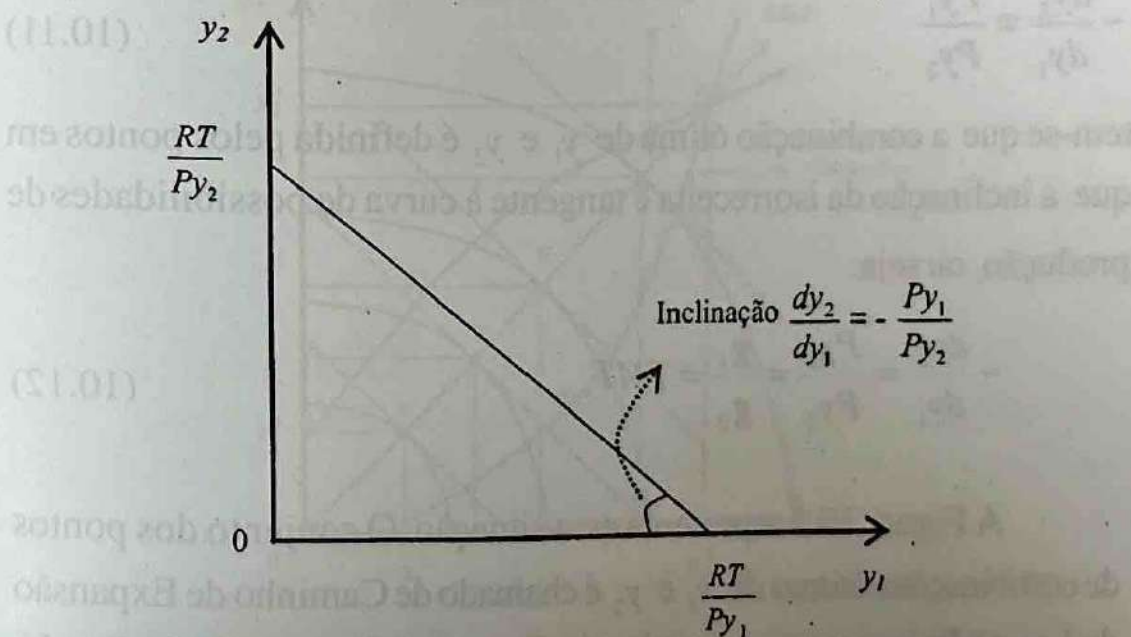



Figura 10.4 - Curva de isorreceita ou isorrenda em modelos produto-produto

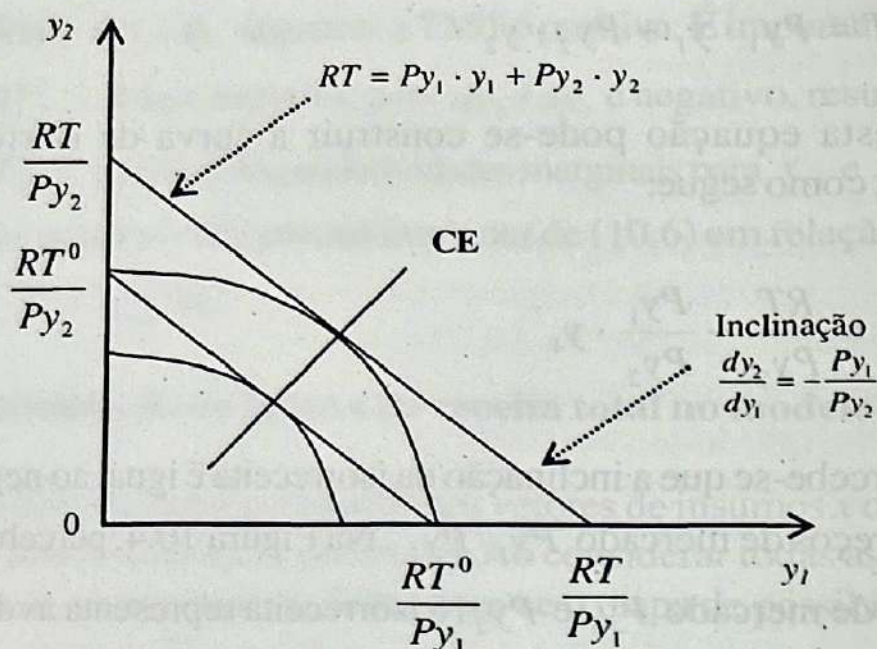



Figura 10.5 - Mapa de possibilidades de produção, isorrenda e caminho de expansão de longo prazo da empresa

Sendo:

$$-\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{Py_1}{Py_2} \qquad (10.11)$$

tem-se que a combinação ótima de y_1 e y_2 é definida pelos pontos em que a inclinação da isorreceita é tangente à curva de possibilidades de produção, ou seja:

$$-\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{Py_1}{Py_2} = \frac{g_1}{g_2} = TMT_{y_2 y_1} \qquad (10.12)$$

A Figura 10.5 representa essa situação. O conjunto dos pontos de combinações ótimas de y_1 e y_2 é chamado de Caminho de Expansão de Longo Prazo e ocorre quando a inclinação da isorreceita for igual à taxa marginal de transformação de y_2 por y_1 e igual à razão de preços

de mercado, Py_1/Py_2.

Para melhor ilustrar a obtenção do caminho de expansão da firma, considerem-se as combinações de produção ótimas da empresa conforme suas condições financeiras, representadas pelos pontos de tangência entre as linhas de isorreceitas e as curvas de possibilidades de produção (Figura 10.6). No ponto A, por exemplo, representa-se uma situação na qual a empresa possui menor volume de recursos financeiros e, portanto, a linha de isorreceita tangencia uma CPP mais próxima da origem. À medida que a empresa adquire maiores volumes de recursos financeiros, ela poderá expandir sua produção, atingindo vetores de produção maiores que y_1^0 e y_2^0, como, por exemplo, nos pontos B, C e D. No longo prazo, em que a empresa pode variar todos os recursos, poderá atingir o Máximo Global de Lucro, representado pelo ponto E. Dessa maneira, existe um caminho natural para que a empresa eleve sua produção, sendo este definido como Caminho de Expansão de Longo Prazo (CELP), representado pela linha que parte da origem e une os pontos ABCDE (Figura 10.6).

Fonte: Adaptado de Debertin (1986).

Figura 10.6 - Caminho de expansão de longo prazo da empresa

O objetivo da empresa é atingir o Máximo Global de Lucro, que representa o maior lucro que a firma pode obter na produção dos produtos y_1 e y_2 para dada tecnologia de produção. Esse ponto é obtido pela interseção das linhas de falsa escala de ambos os produtos. As linhas de falsa escala[5] correspondem aos pontos de máximo lucro para cada produto. A linha de falsa escala de y_1 corresponde aos pontos em que $VPMa_{xy1}/P_x = 1$, e a linha de falsa escala para o fator y_2, aos pontos em que $VPMa_{xy2}/P_x = 1$.

Matematicamente, o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\pi = VPT + CTF$$
$$\pi = P_{y1} \cdot y_1 + P_{y2} \cdot y_2 - P_x g(y_1, y_2) \qquad (10.13)$$

A partir das condições de primeira ordem chega-se a:

$$\frac{d\pi}{dy_1} = P_{y1} - P_x.g_1 = 0 \therefore P_{y1} = P_x.g_1 \therefore P_{y1} = P_x \frac{1}{PMa_{xy1}} \therefore VPMa_{xy1} = P_x$$

$$\frac{d\pi}{dy_2} = P_{y2} - P_x.g_2 = 0 \therefore P_{y2} = P_x.g_2 \therefore P_{y2} = P_x \frac{1}{PMa_{xy2}} \therefore VPMa_{xy2} = P_x.$$

$$\frac{VPMa_{xy1}}{P_x} = \frac{VPMa_{xy2}}{P_x} = 1 \qquad (10.14)$$

A condição de máximo global de lucro encontrada na equação (10.14) é idêntica às condições obtidas nos modelos fator-produto e fator-fator. Portanto, a solução desse problema determina o ponto E (Figura 10.6).

---

[5] A obtenção das linhas de falsa escala é feita de forma análoga àquelas do modelo fator-fator.

Para se garantir que a firma realmente opere no ponto de máximo lucro, da equação (10.13) derivam-se as condições de segunda ordem, representadas pela seguinte matriz hessiana:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$$

em que $\partial^2\pi/\partial y_1 y_1 = g_{11}$, $\partial^2\pi/\partial y_1 y_2 = g_{12}$, $\partial^2\pi/\partial y_2 y_1 = g_{21}$ e $\partial^2\pi/\partial y_2 y_2 = g_{22}$.

Caso a firma não tenha recursos disponíveis para produzir no máximo global de lucro, a solução seria encontrar a quantidade ótima de produtos que atenda à sua restrição. Isso é obtido diretamente do problema de maximização da receita total, condicionada a uma determinada quantidade de produto:

$$\text{Max. } RT = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2$$

$$\text{S. a.} \quad x = g(y_1, y_2)$$

$$L = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2 + \theta[x - g(y_1, y_2)] \tag{10.15}$$

A partir das condições de primeira ordem (CPO), obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = Py_1 - \theta g_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = Py_2 - \theta g_2 = 0 \tag{10.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = x - g(y_1, y_2) = 0$$

A condição de segunda ordem (CSO) garante que a solução encontrada corresponde à maximização da função objetivo e é obtida pelo Hessiano orlado:

$$\begin{vmatrix} -\theta g_{11} & -\theta g_{12} & -g_1 \\ -\theta g_{21} & -\theta g_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

em que g_{ij} equivale às derivadas das condições de primeira ordem, (10.16), em relação às variáveis y_1 e y_2.

De (10.16) chega-se também a (10.17):

$$\theta = \frac{Py_1}{g_1} = \frac{Py_2}{g_2} \therefore$$

$$\theta = \frac{Py_1}{1/PMax_{y1}} = \frac{Py_2}{1/PMax_{y2}} \qquad (10.17)$$

$$\theta = Py_1 \cdot PMax_{y1} = Py_2 \cdot PMax_{y2}$$

Ou seja, o valor do produto marginal da cesta de insumo x para o produto y_1 deve ser igual ao valor do produto marginal da cesta de insumo x para o produto y_2 e igual a θ.

A maximização da receita condicionada a uma quantidade de produção pode levar a firma a uma decisão não-ótima, já que não se considera o preço dos fatores. Para resolver essa situação, maximiza-se a receita condicionada ao custo total.

Considerando que o custo total da empresa possa ser representado por $CT = Pxg(y_1, y_2)$, o problema de maximização da receita – equação (10.15) – pode ser reformulado, obtendo-se (10.18),

$$L = P_{y1} \cdot y_1 + P_{y2} \cdot y_2 + \phi\left[CT - Pxg(y_1, y_2)\right] \qquad (10.18)$$

A partir das condições de primeira ordem, tem-se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = Py_1 - \phi Pxg_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = Py_2 - \phi Pxg_2 = 0 \qquad (10.19)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \phi} = CT - Px \cdot g(y_1, y_2) = 0$$

Destas equações apresentadas em (10.19), obtém-se:

$$\phi = \frac{Py_1}{Pxg_1} = \frac{Py_2}{Pxg_2} \qquad (10.20)$$

Os pontos que atendem a essa condição formam o caminho de expansão de longo prazo da firma. Na Figura 10.6, correspondem aos pontos A, B, C e D.

Como foi apresentado, em (10.17), definiu-se que $\theta = \frac{Py_1}{g_1} = \frac{Py_2}{g_2}$; logo, pode se estabelecer a seguinte relação entre ϕ e θ:

$$\phi = \frac{\theta}{Px} \qquad (10.21)$$

O máximo global de lucro da empresa é obtido quando o multiplicador do lagrangeano (10.18) for igual à unidade, ou seja, $\phi = 1$. Assim, da equação (10.21) conclui-se que $\theta = Px$ no máximo global de lucro, definido como um ponto sobre o caminho de expansão de longo prazo da empresa. Todavia, muitas vezes a empresa não possui recursos para comprar insumos suficientes para alcançar o máximo global de lucro, de maneira que diversas combinações ótimas de produção, condicionadas às suas restrições financeiras, podem ser obtidas ao longo do caminho de

expansão de longo prazo, porém aquém do máximo global de lucro, quando $\phi > 1$.

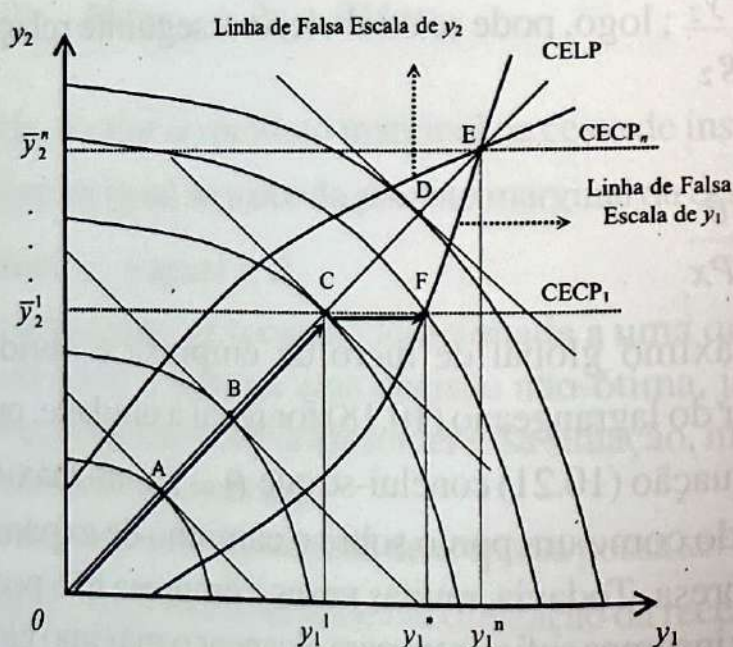
As restrições de ordem financeira levam a firma a produzir em um ponto aquém do máximo global de lucro. Existem também outras restrições, tanto de ordem técnica (contratos de comercialização, restrições na oferta de insumos etc.) como de políticas governamentais, que podem levar a firma a se desviar do caminho de expansão de longo prazo. Para ilustrar situações em que a empresa possua restrições no volume de produção, considere que a empresa de confecções, já citada anteriormente, tenha realizado um contrato de exclusividade no fornecimento de camisas, y_2, com uma grife famosa. Assim, toda a produção de camisas da empresa de confecções deve ser vendida para a rede de lojas desta grife, não podendo a mesma produzir camisas adicionais para terceiros compradores. Assim, a produção de camisas terá um limite técnico, representado na Figura 10.7 por $\overline{y}_2^1$, que se constituiria no caminho de expansão de curto prazo da firma.

Fonte: Adaptado de Debertin (1986).

Figura 10.7 - Máximo lucro com restrição na produção de y_2

Conforme condições de maximização de lucro já apresentadas, no vetor de produção ótima, ponto C, $\phi > 1$. Isso significa que $VPMa_{xy1}/P_x = VPMa_{xy2}/P_x > 1$. Entretanto, nesse caso, como se limitou apenas a produção de camisas, é possível expandir a produção de calças, y_1, até o ponto F, em que $VPMa_{xy1}/P_x = 1$, isto é, até que cada unidade monetária de insumos utilizados retorne uma unidade monetária em produto y_1. Dessa maneira, ao ter uma limitação na produção do produto y_2, a firma desloca sua produção sobre o caminho de expansão de curto prazo, maximizando a sua receita sobre a linha de falsa escala para o produto , podendo com isso aumentar sua receita. É importante que se perceba que, ao produzir sobre a linha de falsa escala para y_1, a firma estará utilizando uma quantidade maior de insumos. Para que isto ocorra, é necessário que a firma tenha recursos suficientes. Caso contrário, continuará produzindo no CELP, dentro das suas limitações financeiras. Dessa forma, a empresa atingirá o máximo lucro para y_1, produzirá no ponto y_1^*, e as setas na Figura 10.7 representam o caminho de expansão de curto prazo para a empresa de confecções.

Na medida em que a grife elevar sua demanda de camisas e, ou, que a empresa de confecções realize novos contratos de fornecimento, será possível aumentar a produção de camisas, caso a empresa tenha condições financeiras para isso, deslocando-se o ponto de produção fixo, $\overline{y}_2^1$, em direção ao máximo global de lucro, representado por $\overline{y}_2^n$.

No modelo produto-produto também existe a possibilidade de se representar de forma *dual* o problema de maximização da receita total da empresa (equação 10.15). Assim, o objetivo do produtor passa a ser a minimização do custo condicionado a um montante de receita. Esse problema *dual* pode ser representado pela seguinte formulação matemática:

$$\text{Min. } x = P_x g(y_1, y_2)$$
$$\text{S. a. } RT = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2$$
$$L = P_x g(y_1, y_2) + \psi[RT - Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2] \quad (10.22)$$

Da resolução desse problema de minimização[6] chega-se às mesmas condições de maximização da receita apresentada na equação (10.15). Observa-se ainda que $\psi = 1/\phi$ e conclui-se que o multiplicador de Lagrange ψ representa o aumento necessário na compra de insumos para se obter uma unidade adicional de receita.

No modelo fator-fator, além das linhas de falsa escala, derivaram-se também as linhas de fronteira para os fatores. No modelo produto-produto, essa linha de fronteira não existe, pelo motivo que será exposto a seguir. Para obtenção dos pontos de máxima produção de y_1 e y_2 deriva-se a equação implícita (10.5), de maneira que $dx/dy_1 = 1/(dy_1/dx) = 1/PMax_{y1}$ e $dx/dy_2 = 1/(dy_2/dx) = 1/PMax_{y2}$. Estas expressões permitem encontrar o montante de insumos que deve ser usado no ponto de máximo produto, podendo ainda ser consideradas como a representação do custo marginal de produção de uma unidade adicional de y_1 e y_2, respectivamente, expressas em unidades físicas do conjunto de insumos x.

Se o produtor opera nos pontos de máximo produto em ambos os processos de produção (y_1 e y_2), a produtividade marginal de x na produção de y_2, $PMax_{y2}$, e a produtividade marginal de x na produção de y_1, $PMax_{y1}$, devem ser iguais a zero. Contudo, quando a $PMax_{y1}$ e $PMax_{y2}$ se aproximam de zero, as razões $1/PMax_{y1}$ e $1/PMax_{y2}$ tendem a infinito. Se $PMax_{y1}$ e $PMax_{y2}$ são iguais a zero, essas razões são indefinidas. Assim, independentemente de a tecnologia de produção

[6] As derivações deste problema de minimização podem ser obtidas em Debertin (1986).

apresentar retornos crescentes, constantes ou decrescentes, no modelo produto-produto os pontos de máximo produto são indefinidos e, portanto, não é possível obter as linhas de fronteira ou de *ridge*, isto é, as linhas que unem os pontos de produtividade marginal de x iguais a zero, na produção de y_1 e y_2.

Entretanto, empiricamente sempre há limitações que impedem o produtor de atingir o máximo produto. A principal delas é que os próprios produtores não se interessam em maximizar a produção, e sim o lucro. Assim, o fato de não se obter o máximo global de produção torna-se uma característica do modelo produto-produto e não uma limitação.

10.4. Funções de oferta e de demanda dos fatores

Para a derivação das funções de oferta dos produtos y_1 e y_2 e das funções de demandas dos fatores, X_{y1} e X_{y2}, será usado o exemplo de uma empresa que possua as seguintes funções de produção $y_1 = x_{y1}^a$ e $y_2 = x_{y2}^b$. Dadas essas tecnologias, a oferta dos produtos y_1 e y_2 pode ser obtida como:

$$y_1 = x_{y1}^a \quad \therefore \quad x_{y1} = y_1^{1/a}$$

$$y_2 = x_{y2}^b \quad \therefore \quad x_{y2} = y_2^{1/b}$$

Como na equação (10.4), define-se o vetor de insumos x:

$$x = x_{y1} + x_{y2} \quad \therefore \quad x = y_1^{1/a} + y_2^{1/b}$$

Resolvendo o seguinte problema de maximização da receita, equivalente à maximização de lucro, tem-se:

$$Max.\ RT = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2$$

$$S.\ a.\ \ CT = Px \cdot x = Px\left(y_1^{1/a} + y_2^{1/b}\right)$$

$$L = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2 + \phi\left[CT - Px\left(y_1^{1/a} + y_2^{1/b}\right)\right] \qquad (10.23)$$

Das CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = Py_1 - \phi \cdot \frac{1}{a} \cdot Px \cdot y_1^{1-a/a} = 0 \quad \therefore \quad Py_1 = \phi \cdot \frac{1}{a} \cdot Px \cdot y_1^{1-a/a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = Py_2 - \phi \cdot \frac{1}{b} \cdot Px \cdot y_2^{1-b/b} = 0 \quad \therefore \quad Py_2 = \phi \cdot \frac{1}{b} \cdot Px \cdot y_2^{1-b/b} \qquad (10.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \left[CT - Px\left(y_1^{1/a} + y_2^{1/b} \right) \right] = 0$$

De (10.24) podem-se obter as equações de oferta de y_1 e y_2, como segue:

$$Py_1 = \frac{\phi}{a} \cdot Px \cdot y_1^{1-a/a} \quad \therefore$$

$$y_1 = \phi^{-a/1-a} \cdot a^{a/1-a} \cdot Py_1^{a/1-a} \cdot Px^{-a/1-a} \rightarrow \text{Função oferta de } y_1 \qquad (10.25)$$

$$Py_2 = \frac{\phi}{b} \cdot Px \cdot y_2^{1-b/b} \quad \therefore$$

$$y_2 = \phi^{-b/1-b} \cdot b^{b/1-b} \cdot Py_2^{b/1-b} \cdot Px^{-b/1-b} \rightarrow \text{Função oferta de } y_2 \qquad (10.26)$$

Ressalta-se que, quando a firma está operando no máximo global de lucro $\phi = 1$, de maneira que as funções de oferta tornam-se dependentes apenas dos preços dos produtos e dos preços dos fatores. Da derivada parcial destas equações em relação a Py_1 e Py_2 são obtidas as elasticidades-preço direta da oferta:

$$Ep_{y1} = \frac{\partial y_1}{\partial Py_1} \cdot \frac{Py_1}{y_1} = \frac{a}{1-a} \qquad (10.27)$$

$$Ep_{y2} = \frac{\partial y_2}{\partial Py_2} \cdot \frac{Py_2}{y_2} = \frac{b}{1-b} \qquad (10.28)$$

As equações (10.27) e (10.28) indicam que variações de 1%, em Py_1 e Py_2, provocam variações na oferta de y_1 e de y_2 em $a/1-a$ % e

$^{b}/_{1-b}$ %, respectivamente.

Podem ser obtidas também as elasticidades de oferta de e de com relação ao preço dos insumos. Para isso, basta diferenciar, parcialmente, as equações (10.25) e (10.26) em relação a Px, obtendo-se:

$$Ep_{y1}x = \frac{\partial y_1}{\partial Px} \cdot \frac{Px}{y_1} = -\frac{a}{1-a} \tag{10.29}$$

$$Ep_{y2}x = \frac{\partial y_2}{\partial Px} \cdot \frac{Px}{y_2} = -\frac{b}{1-b} \tag{10.30}$$

Estas elasticidades mostram que as quantidades ofertadas de y_1 e de y_2 são negativamente relacionadas com o preço da cesta de insumos x. Ademais, para variações percentuais de 1% em Px ocorrem variações percentuais na oferta de y_1 e de y_2 de $-\frac{a}{1-a}$ % e $-\frac{b}{1-b}$ %, respectivamente. De (10.25) e (10.26) são obtidas, ainda, as quantidades demandadas dos fatores x_{y1} e x_{y2}:

$$\begin{aligned} &y_1 = x_{y1}^{a} = \phi^{-a/1-a} \cdot a^{a/1-a} \cdot Py_1^{a/1-a} \cdot Px^{-a/1-a} \;\therefore \\ &x_{y1} = \phi^{-1/1-a} \cdot a^{1/1-a} \cdot Py_1^{1/1-a} \cdot Px^{-1/1-a} \rightarrow \text{Função de demanda de } x_{y1}. \end{aligned} \tag{10.31}$$

$$\begin{aligned} &y_2 = x_{y2}^{b} = \phi^{-b/1-b} \cdot b^{b/1-b} \cdot Py_2^{b/1-b} \cdot Px^{-b/1-b} \;\therefore \\ &x_{y2} = \phi^{-1/1-b} \cdot b^{1/1-b} \cdot Py_2^{1/1-b} \cdot Px^{-1/1-b} \rightarrow \text{Função de demanda de } x_{y2}. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Destas últimas equações são obtidas as elasticidades-preço direta da demanda dos fatores para os dois processos produtivos, y_1 e y_2, representadas pelas expressões (10.33) e (10.34), respectivamente:

$$Epx_{y1} = \frac{\partial x_{y1}}{\partial Px} \cdot \frac{Px}{x_{y1}} = -\frac{1}{1-a} \tag{10.33}$$

$$Epx_{y2} = \frac{\partial x_{y2}}{\partial Px} \cdot \frac{Px}{x_{y2}} = -\frac{1}{1-b} \tag{10.34}$$

Estas equações mostram que as quantidades demandadas dos insumos em cada processo de produção estão negativamente relacionadas com o preço do vetor de insumos x. Percebe-se também que a quantidade demandada de insumos varia em $-\frac{1}{1-a}$ % e $-\frac{1}{1-b}$ % nos processos de produção y_1 e y_2, respectivamente, para variações percentuais de 1% em Px.

Das equações (10.31) e (10.32) podem-se derivar ainda as elasticidades-preço da demanda de insumos com relação aos preços dos produtos y_1 e y_2. Estas elasticidades são representadas por:

$$Epx_{y1}y_1 = \frac{\partial x_{y1}}{\partial Py_1} \cdot \frac{Py_1}{x_{y1}} = \frac{1}{1-a} \tag{10.35}$$

$$Epx_{y2}y_2 = \frac{\partial x_{y2}}{\partial Py_2} \cdot \frac{Py_2}{x_{y2}} = \frac{1}{1-b} \tag{10.36}$$

As equações (10.35) e (10.36) indicam que as demandas de insumos em ambos os processos produtivos, y_1 e y_2, são positivamente relacionadas aos preços dos produtos. A equação (10.35) expressa que, para variações de 1% no preço do produto y_1, a resposta na quantidade demandada de x para a produção deste produto será de $\frac{1}{1-a}$ %. De forma análoga, a equação (10.36) indica que a quantidade demandada de x para a produção no processo y_2 varia na proporção de $\frac{1}{1-b}$ %, para variações de 1% em Py_2.

10.5. Analogias entre diferentes processos produtivos no modelo produto-produto

Dada a produção multiproduto, é plausível pensar que uma empresa pode produzir mercadorias semelhantes, em um único processo de produção, bem como é razoável pensar que existem produtos que devem ser produzidos em processos distintos. Podem-se, ainda, estabelecer relações entre os diferentes processos produtivos, dada a compatibilidade do uso de insumos para a produção de um ou outro produto. Das diferentes possibilidades de combinações no uso dos insumos entre os processos produtivos, é comum classificá-los como: competitivos, complementares, suplementares e antagônicos.

10.5.1. Processos produtivos competitivos

Neste tipo de processo produtivo não se pode elevar a produção de um produto sem sacrificar a produção do outro. No exemplo já apresentado da empresa de confecções, certamente não se pode aumentar a produção de calças sem sacrificar a produção de camisas. Assim, o que geralmente ocorre é uma produção combinada de calças e camisas, sendo a quantidade de calças e, ou, de camisas escolhida de acordo com as expectativas de preço do mercado. Esse tipo de processo é bastante comum, podendo-se encontrar diversos exemplos ilustrativos. Na Figura 10.8 realiza-se sua representação, em que se observa que, onde a razão de preços de mercado for igual à taxa marginal de substituição dos produtos, será definida a combinação ótima de produção de calças e camisas.

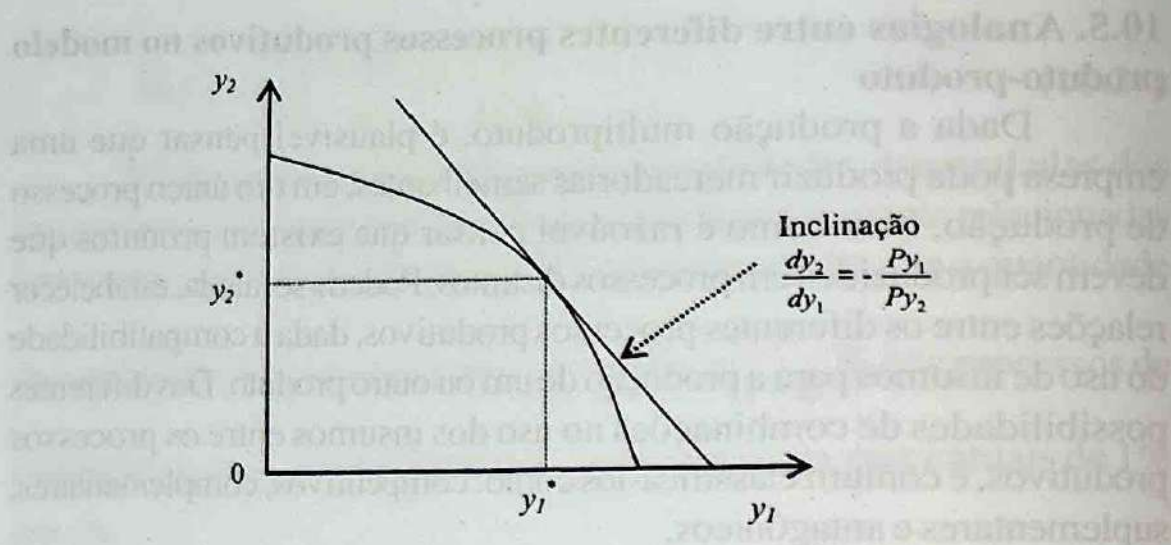



Figura 10.8 - Processos produtivos competitivos

10.5.2. Processos produtivos complementares

Os processos complementares se caracterizam pela possibilidade de se elevar a produção de um produto sem reduzir a produção do outro. Como exemplo, cita-se uma fazenda que produza maçãs e mel. As abelhas melhoram o processo de polinização do pomar, tornando-o mais produtivo. Dessa maneira, se o produtor conseguir expandir a atividade de apicultura próxima ao pomar de maçãs sem alteração nos seus custos, espera-se que a produção de maçãs aumente. Portanto, maior receita será obtida sem alterar os custos de produção da fazenda. Nessa situação, seria sempre vantajoso expandir a produção até que se esgotassem as possibilidades de alterar a produção sem alterações nos custos, contudo; se isso ocorrer, não mais será possível considerar os processos produtivos como complementares. Na Figura 10.9, esse tipo de processo é ilustrado, indicando que maiores quantidades de y_1 são sempre possíveis quando se eleva a produção de y_2, agora eventualmente tratado como maçãs e apicultura.

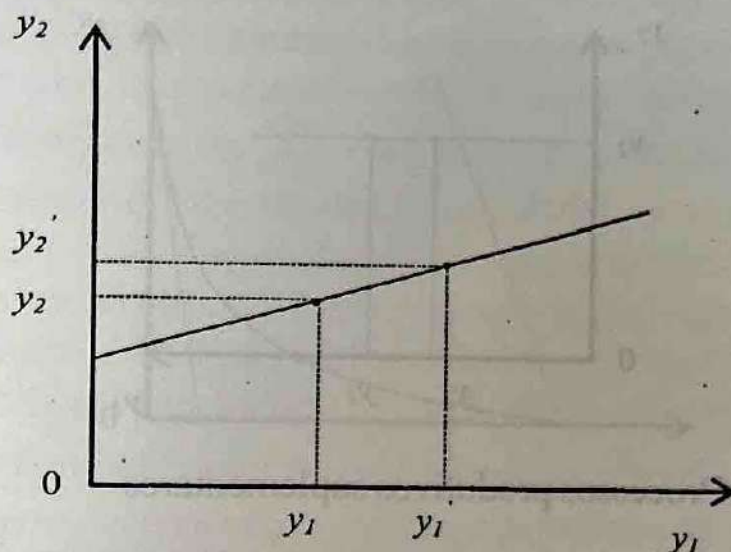



Figura 10.9 - Processos produtivos complementares

10.5.3. Processos produtivos suplementares

Este processo é conhecido por apresentar taxa marginal de transformação nula entre os produtos, ou seja, $TMTy_2 y_1 = 0$. Isso significa que, uma vez obtidos os recursos ou insumos para a produção de y_1, por exemplo, y_2 pode ser produzido sem afetar a quantidade produzida de y_1. Um exemplo seria o de um proprietário de um sítio no qual se criam suínos. Se existir um açude neste sítio, a canalização dos resíduos da produção de suínos para este açude propicia ao sitiante elevar a produção de peixes sem alterar os custos de manutenção do sítio. Dessa forma, existiria uma relação de suplementaridade entre esses processos, pois a produção de peixes seria elevada sem afetar a produção de suínos. Na Figura 10.10, é feita a ilustração desse processo, sendo representada a produção de peixes por y_1 e o processo de produção de suínos por y_2.

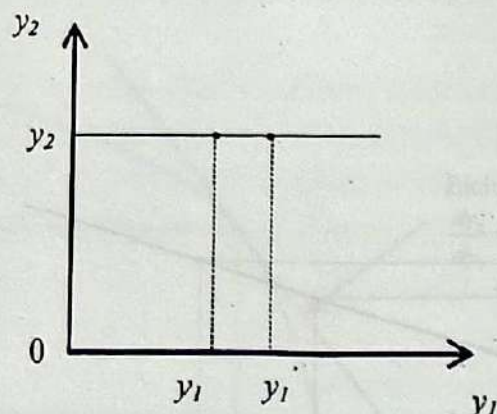



Figura 10.10 - Processos produtivos suplementares

10.5.4. Processos produtivos antagônicos

A produção de um produto, neste processo, exclui a possibilidade de produção do outro, de forma que o produtor deve produzir apenas um dos produtos. Como exemplo, tome como base um piscicultor que produza tilápias e traíras; certamente, a produção ou deve ser separada ou se optar, no caso da existência de apenas um criatório, pela produção de um dos peixes, pois as traíras são predadoras das tilápias. Dessa maneira, para se maximizar lucros a $TMTy_2y_1 = \infty$, ou seja, produz-se apenas um dos peixes, de acordo com os preços de mercado. Na Figura 10.11, essa situação é representada. Assim, denominando traíras por y_1 e tilápias por y_2, percebe-se que, quando o preço das traíras for maior que o das tilápias, a produção de traíras é recomendada; para preços de tilápias maiores que os das traíras, recomenda-se a produção de tilápias. Essas situações são representadas pelas linhas de isorreceitas tracejadas (Figura 10.11).

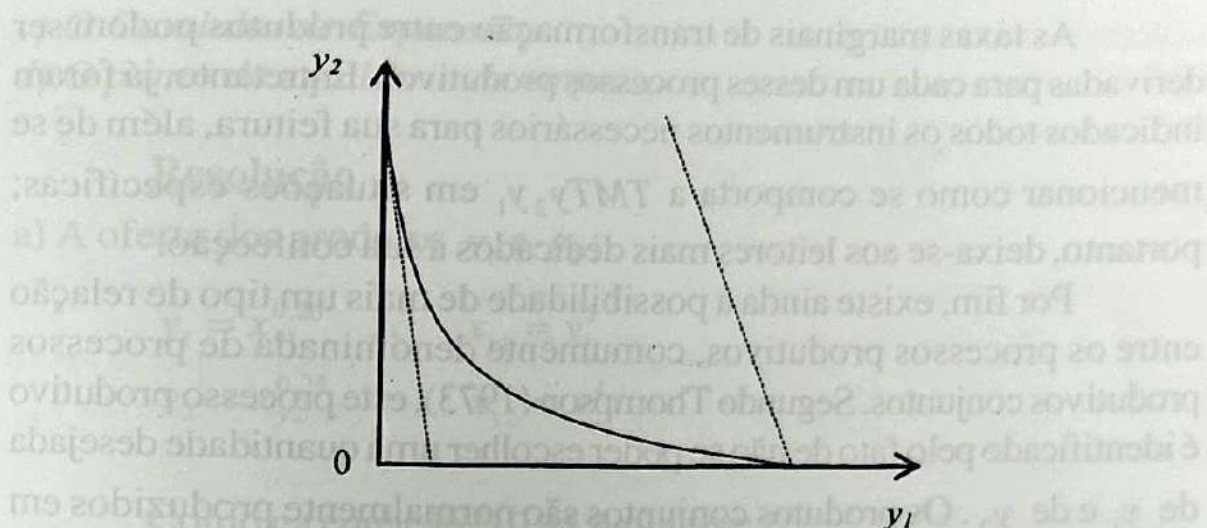



Figura 10.11 - Processos produtivos antagônicos

Considerando a possibilidade de que uma firma pode apresentar em algumas situações processos que podem mudar suas relações entre si à medida que a produção é expandida, todos esses processos são combinados na Figura 10.12.

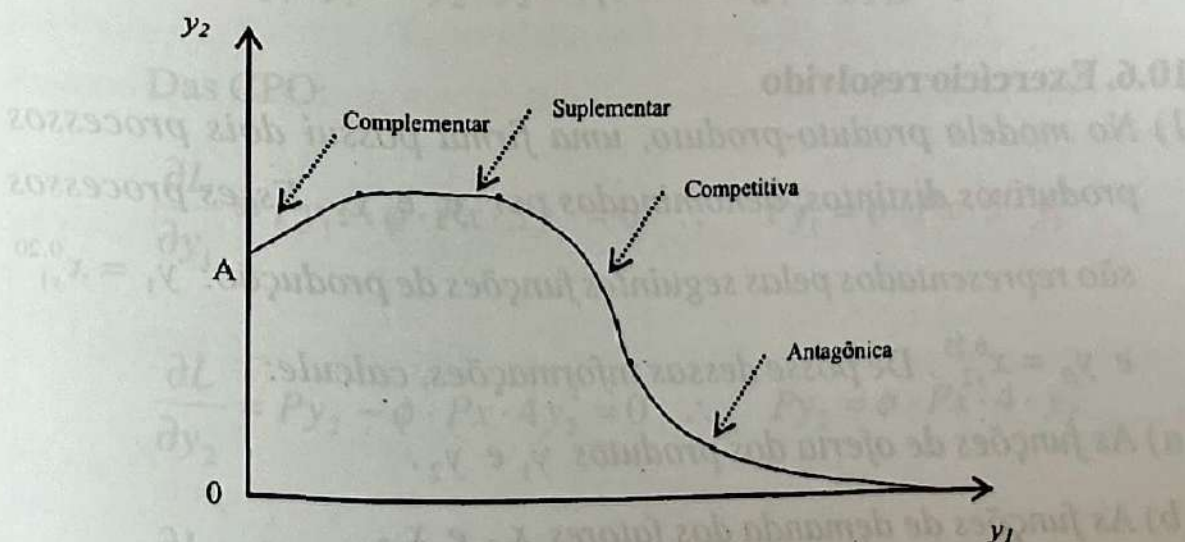



Figura 10.12 - Possíveis relações entre processos produtivos em modelos multiprodutos

As taxas marginais de transformação entre produtos podem ser derivadas para cada um desses processos produtivos. Entretanto, já foram indicados todos os instrumentos necessários para sua feitura, além de se mencionar como se comporta a $TMTy_2y_1$ em situações específicas; portanto, deixa-se aos leitores mais dedicados a sua confecção.

Por fim, existe ainda a possibilidade de mais um tipo de relação entre os processos produtivos, comumente denominada de processos produtivos conjuntos. Segundo Thompson (1973), este processo produtivo é identificado pelo fato de não se poder escolher uma quantidade desejada de y_1 e de y_2. Os produtos conjuntos são normalmente produzidos em uma proporção fixa de um para o outro, sendo a curva de possibilidades de produção reduzida a apenas um ponto de produção, que geralmente é definido depois de se produzir certa quantidade do produto de objetivo principal do produtor. Um exemplo seria a produção de boi de corte e peles. O produtor de boi de corte não pode escolher a quantidade de peles obtida por animal, ou seja, apenas uma pele pode ser produzida por animal, nem mais nem menos (DEBERTIN, 1986). Assim, a taxa marginal de transformação entre os produtos é nula.

10.6. Exercício resolvido

1) No modelo produto-produto, uma firma possui dois processos produtivos distintos, denominados por y_1 e y_2. Esses processos são representados pelas seguintes funções de produção: $y_1 = x_{y1}^{0,20}$ e $y_2 = x_{y2}^{0,25}$. De posse dessas informações, calcule:

a) As funções de oferta dos produtos y_1 e y_2.

b) As funções de demanda dos fatores x_{y1} e x_{y2}.

a) As elasticidades-preço da demanda dos fatores para os dois processos produtivos.

b) As elasticidades-preço da oferta dos produtos y_1 e y_2.

c) O Caminho de Expansão.
d) O ponto de equilíbrio da empresa.

Resolução

a) A oferta dos produtos y_1 e y_2:

$$y_1 = x_{y1}^{0,20} \quad \therefore \quad x_{y1} = y_1^5$$
$$y_2 = x_{y2}^{0,25} \quad \therefore \quad x_{y2} = y_2^4$$

Como na equação (10.4), define-se:

$$x = x_{y1} + x_{y2} \quad \therefore \quad x = y_1^5 + y_2^4$$

Resolvendo o seguinte problema de maximização, tem-se:

$$Max.\ RT = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2$$
$$S.\ a.\ \ CT = Px \cdot x = Px\left(y_1^5 + y_2^4\right)$$
$$L = Py_1 \cdot y_1 + Py_2 \cdot y_2 + \phi\left[CT - Px\left(y_1^5 + y_2^4\right)\right]$$

Das CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = Py_1 - \phi \cdot Px \cdot 5y_1^4 = 0 \quad \therefore \quad Py_1 = \phi \cdot Px \cdot 5 \cdot y_1^4$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = Py_2 - \phi \cdot Px \cdot 4y_2^3 = 0 \quad \therefore \quad Py_2 = \phi \cdot Px \cdot 4 \cdot y_2^3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \left[CT - Px\left(y_1^5 + y_2^4\right)\right] = 0$$

Dessas condições, tem-se:

$$Py_1 = \phi \cdot Px \cdot 5 \cdot y_1^4 \;\therefore\; y_1^4 = Py_1\phi^{-1} \cdot Px^{-1} \cdot 5^{-1}$$

$$\therefore\; y_1 = Py_1^{1/4} \cdot \phi^{-1/4} \cdot Px^{-1/4} \cdot 5^{-1/4} \rightarrow \text{Função oferta de } y_1$$

$$Py_2 = \phi \cdot Px \cdot 4 \cdot y_2^3 \;\therefore\; y_2^3 = Py_2\phi^{-1} \cdot Px^{-1} \cdot 4^{-1}$$

$$\therefore\; y_2 = Py_2^{1/3} \cdot \phi^{-1/3} \cdot Px^{-1/3} \cdot 4^{-1/3} \rightarrow \text{Função oferta de } y_2$$

b) As funções de demanda dos fatores x_{y1} e x_{y2}:

$$y_1 = x_{y1}^{0,20} = Py_1^{1/4} \cdot \phi^{-1/4} \cdot Px^{-1/4} \cdot 5^{-1/4} \;\therefore$$

$$x_{y1} = Py_1^{1,25} \cdot \phi^{-1,25} \cdot Px^{-1,25} \cdot 5^{-1,25} \rightarrow \text{Função de demanda de } x_{y1}.$$

$$y_2 = x_{y2}^{0,25} = Py_2^{1/3} \cdot \phi^{-1/3} \cdot Px^{-1/3} \cdot 4^{-1/3} \;\therefore$$

$$x_{y2} = Py_2^{1,33} \cdot \phi^{-1,33} \cdot Px^{-1,33} \cdot 4^{-1,33} \rightarrow \text{Função de demanda de } x_{y2}.$$

c) As elasticidades-preço da demanda dos fatores para os dois processos produtivos:

$$Epx_{y1} = \frac{\Delta x_{y1}}{\Delta Px} \cdot \frac{Px}{x_{y1}} = -1,25 \cdot \frac{Px^{-2,25} \cdot Py_1^{1,25} \cdot \phi^{-1,25} \cdot 5^{-1,25} \cdot Px}{Py_1^{1,25} \cdot \phi^{-1,25} \cdot Px^{-1,25} \cdot 5^{-1,25}} = -1,25,$$

para um aumento de preço de x em 1%, diminui-se x_{y1} em 1,25%.

$$Epx_{y1}y_1 = \frac{\Delta x_{y1}}{\Delta Py_1} \cdot \frac{Py_1}{x_{y1}} = 1,25 \cdot \frac{Py_1^{0,25} \cdot \phi^{-1,25} Px^{-1,25} \cdot 5^{-1,25} \cdot Py_1^{1}}{Py_1^{1,25} \cdot \phi^{-1,25} \cdot Px^{-1,25} \cdot 5^{-1,25}} = 1,25,$$

assim, um aumento no preço de x de 1% aumenta x_{y1} em 1,25%.

$$Epx_{y2} = \frac{\Delta x_{y2}}{\Delta Px} \cdot \frac{Px}{x_{y2}} = -1,33 \cdot \frac{Px^{-2,33} \cdot Py_2^{1,33} \cdot \phi^{-1,33} \cdot 4^{-1,33} \cdot Px}{Py_2^{1,33} \cdot \phi^{-1,33} \cdot Px^{-1,33} \cdot 4^{-1,33}} = -1,33,$$

portanto, analogamente, para um aumento de preço de x em 1%, diminui-se x_{y2} em 1,33%.

$$Epx_{y2}y_2 = \frac{\Delta x_{y2}}{\Delta Py_2} \cdot \frac{Py_2}{x_{y2}} = 1{,}33 \cdot \frac{Py_2^{0.33} \cdot \phi^{-1.33} Px^{-1.33} \cdot 4^{-1.33} \cdot Py_2^{1}}{Py_2^{1.33} \cdot \phi^{-1.33} \cdot Px^{-1.33} \cdot 4^{-1.33}} = 1{,}33$$,da mesma

forma, um aumento no preço de x de 1% aumenta x_{y2} em 1,33%.

d) As elasticidades-preço da oferta dos produtos y_1 e y_2:

$$Ep_{y1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta Py_1} \cdot \frac{Py_1}{y_1} = 0{,}25 \cdot \frac{Py_1^{-0.75} \cdot \phi^{-0.25} \cdot Px^{-0.25} \cdot 5^{-0.25} \cdot Py_1^{1}}{Py_1^{0.25} \cdot \phi^{-0.25} \cdot Px^{-0.25} \cdot 5^{-0.25}} = 0{,}25$$, portanto,

para um aumento de Py_1 em 1%, aumenta-se a oferta de y_1 em 0,25%.

$$Ep_{y1}x = \frac{\Delta y_1}{\Delta Px} \cdot \frac{Px}{y_1} = -0{,}25 \cdot \frac{Px^{-1.75} \cdot \phi^{-0.25} \cdot Px^{1} \cdot 5^{-0.25} \cdot Py_1^{0.25}}{Py_1^{0.25} \cdot \phi^{-0.25} \cdot Px^{-0.25} \cdot 5^{-0.25}} = -0{,}25$$, assim,

um aumento no preço dos insumos, Px, em 1% reduz a oferta de y_1 em 0,25%.

$$Ep_{y2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta Py_2} \cdot \frac{Py_2}{y_2} = 0{,}33 \cdot \frac{Py_2^{-0.67} \cdot \phi^{-0.33} \cdot Px^{-0.33} \cdot 4^{-0.33} \cdot Py_2^{1}}{Py_1^{0.33} \cdot \phi^{-0.33} \cdot Px^{-0.33} \cdot 4^{-0.33}} = 0{,}33$$, para um

aumento de Px em 1%, aumenta-se a oferta de y_2 em 0,33%.

$$Ep_{y2}x = \frac{\Delta y_2}{\Delta Px} \cdot \frac{Px}{y_2} = -0{,}33 \cdot \frac{Px^{-1.33} \cdot \phi^{-0.33} \cdot Px^{1} \cdot 4^{-0.33} \cdot Py_2^{0.33}}{Py_2^{0.33} \cdot \phi^{-0.33} \cdot Px^{-0.33} \cdot 4^{-0.33}} = -0{,}33$$, assim,

um aumento no preço dos insumos, Px, em 1% reduz a oferta de y_2 em 0,33%.

e) O caminho de expansão:

$$\phi \frac{Py_1}{5 \cdot Px \cdot y_1^4} = \frac{Py_2}{4 \cdot Px \cdot y_2^3} \therefore \frac{Py_1}{5 \cdot y_1^4} = \frac{Py_2}{4 \cdot y_2^3} \therefore y_2^3 = \frac{5 \cdot Py_2 \cdot y_1^4}{4 \cdot Py_1} \text{ ou } y_1^4 = \frac{4 \cdot Py_1 \cdot y_2^3}{5 \cdot Py_2}$$, logo,

$$y_2 = \frac{5^{0.33} \cdot Py_2^{0.33} \cdot y_1^{1.33}}{4^{0.33} \cdot Py_1^{0.33}}$$ ou

$$y_1 = \frac{4^{0.25} \cdot Py_1^{0.25} \cdot y_1^{0.75}}{4^{0.25} \cdot Py_1^{0.25}}$$

f) O ponto de equilíbrio da empresa:

Substituindo o caminho de expansão nas condições de primeira ordem, tem-se:

$$5 \cdot \phi \cdot Px \cdot \frac{4Py_1 \cdot y_2^3}{5 \cdot Py_2} = Py_1 \;\therefore\; \phi \cdot Px \cdot 4 \cdot y_2^3 = Py_2 \;\therefore\; y_2^3 = \frac{Py_2}{4 \cdot \phi \cdot Px} \;\therefore\; y_2 = \frac{Py_2^{0.33}}{4^{0.33} \cdot \phi^{0.33} \cdot Px^{0.33}}$$

$$4 \cdot \phi \cdot Px \cdot \frac{5Py_2 \cdot y_1^4}{4 \cdot Py_1} = Py_2 \;\therefore\; \phi \cdot Px \cdot 5 \cdot y_1^4 = Py_1 \;\therefore\; y_1^4 = \frac{Py_1}{5 \cdot \phi \cdot Px} \;\therefore\; y_1 = \frac{Py_1^{0.25}}{4^{0.25} \cdot \phi^{0.25} \cdot Px^{0.25}}$$

O ponto de equilíbrio da empresa ocorre onde são produzidas as seguintes quantidades dos produtos:

$$y_1 = \frac{Py_1^{0,25}}{4^{0,25} \cdot \phi^{0.25} \cdot Px^{0.25}} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{Py_2^{0.33}}{4^{0.33} \cdot \phi^{0.33} \cdot Px^{0.33}}$$

10.7. Exercícios propostos

Resolva os problemas e comente as seguintes questões teóricas, justificando sua posição.

1) Uma empresa produz dois produtos com as seguintes funções de produção: $Y_1=X^{1/5}$ e $Y_2=X^{1/6}$. De posse dessas informações, pede-se:

a) As funções de oferta dos produtos Y_1 e Y_2.

b) As funções de demanda dos fatores X_{y1} e X_{y2}.

c) As elasticidades-preço da demanda dos fatores para os dois processos produtivos.

d) As elasticidades-preço da oferta dos produtos Y_1 e Y_2.

e) O ponto de equilíbrio da empresa.

f) O caminho de expansão da empresa.

g) Explique por que as elasticidades-preço direta da demanda de X por Y_1 e elasticidades-preço do produto da demanda de X por Y_1 são iguais em módulo.

2) Para uma firma que trabalha com dois processos produtivos, denominados por Y_1 e Y_2 e representados pelas funções de produção $Y_1 = X^{0,3}$ e $Y_2 = X^{0,6}$, determine os seguintes itens:

a) As funções de oferta dos produtos Y_1 e Y_2.
b) As funções de demanda dos fatores, X_{Y1} e X_{Y2}.
c) As elasticidades-preço da demanda dos fatores para os dois processos produtivos.
d) As elasticidades-preço da oferta dos produtos Y_1 e Y_2.
e) O caminho de expansão.

3) Uma firma utiliza o insumo X e tecnologias distintas na produção de Y_1 e Y_2. A partir de um determinado ponto, a produtividade marginal de X para Y_1 é positiva ($P_{Maxy1}>0$) e a produtividade marginal de X para Y_2 é negativa ($P_{Maxy2}<0$). Nessa situação, as Curvas de Possibilidade de Produção (CPP) se interceptam e o produtor maximizará sua receita, produzindo apenas o produto Y_1.

4) Considerando dois produtos antagônicos, uma firma maximizadora de lucros irá produzir no ponto onde a taxa marginal de transformação (TMT_{y2y1}) é igual à razão dos preços (P_{y1}/P_{y2}).

5) Uma firma que produz dois produtos, ao atingir o equilíbrio, em que $\frac{VPMa_{XY1}}{Px} = \frac{VPMa_{XY2}}{Px} = K$, sendo K > 1, não estará maximizando lucro, uma vez que, para maximizar o lucro, $\frac{VPMa_X}{P_x} = 1$.

6) No modelo produto-produto, a firma atinge o equilíbrio quando a restrição orçamentária tangencia a curva de possibilidade de produção.

10.8. Referências

DEBERTIN, D.L. **Agricultural production economics**. New York: MacMillan, 1986. 366 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1991. 791 p.

THOMPSOM, R.L. **Economia da produção I**. Viçosa: UFV, 1973. 221 p. [Mimeo.].

CAPÍTULO 11

Mercados em competição perfeita

Jader Fernandes Cirino[1]
Adelson Martins Figueiredo[2]
Eduardo Rodrigues de Castro[3]
Maurinho Luiz dos Santos[4]

11.1. Introdução

Nos capítulos anteriores analisaram-se as teorias do consumidor e da firma. Em ambos os casos, assumiu-se que os agentes eram tomadores de preços e as decisões eram tomadas sob condições de concorrência perfeita, de modo que algumas características já foram citadas anteriormente. Neste capítulo, o objetivo é discutir as principais características de um mercado competitivo de forma conjunta, de modo que se tenha uma visão global dessa estrutura de mercado antes de tratar de mercados imperfeitos, o que será feito no próximo capítulo.

Antes de proceder à análise das diversas estruturas de mercado, torna-se necessário estabelecer duas suposições que estarão implícitas nos desenvolvimentos deste capítulo. A primeira diz respeito ao fato de que cada mercado considerado constitui-se em um mercado aberto, no sentido de que o funcionamento da oferta e da demanda ocorre sem qualquer controle externo. Conforme destaca Ferguson (1993), a intervenção governamental na forma de tarifas e subsídios, tabelamento de preços, controle de áreas produtivas, entre outras, impõe vários tipos

[1] Professor adjunto da Universidade Federal de Viçosa - Campus Rio Paranaíba, e-mail: jader.cirino@ufv.br
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[3] Professor da Universidade Federal de São Carlos e-mail: eduardo@ufscar.br
[4] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

de regulamentos que condicionam as relações econômicas nas quais as firmas operam e às quais elas devem se adaptar. No mesmo sentido, a tendência de formação de conluio, existente quando um número reduzido de empresas opera em determinada indústria, também constitui um controle externo à livre ação das forças de mercado.

A segunda refere-se à hipótese de que os empresários são maximizadores de lucro. Isso significa que uma firma não pode permanecer viável no longo prazo caso incorra em prejuízo. Além disso, Ferguson (1993) enfatiza que a referida suposição é fundamental para se construir uma teoria geral da firma, mercado e alocação de recursos eficiente, no sentido de explicar e prever o comportamento das atividades econômicas.

11.2. Características da competição perfeita[5]

A competição perfeita refere-se a uma estrutura de mercado na qual inexiste rivalidade direta entre os agentes. Todas as variáveis econômicas relevantes são determinadas exclusivamente pelas forças impessoais do mercado. Pindyck e Rubinfeld (1999) e Melo (2002) destacam que uma estrutura de mercado deve ter cinco características fundamentais para ser classificada como de concorrência perfeita: a) agentes tomadores de preços; b) homogeneidade de produtos; c) livre entrada e saída; d) livre mobilidade de fatores; e e) perfeito conhecimento ou ausência de assimetria de informação.

Quando todos os agentes econômicos – vendedores e compradores – são pequenos em relação a todo o mercado, não podem exercer influência no preço. Dessa forma, em uma situação competitiva, as empresas assumem que são tomadoras de preço, ou seja, o preço de mercado é o resultado da interação das forças da oferta e demanda e independe do nível de produção individual de cada firma. Embora a maioria dos livros didáticos associe essa característica, pelo lado da oferta, a existência de um grande número de pequenas empresas, numa estrutura competitiva isso nem sempre ocorre. Conforme destaca Varian (2003),

[5] Este capítulo teve como referências básicas os seguintes autores: Ferguson (1993), Pindyck e Rubinfeld (1999) e Varian (2003).

se em determinada indústria os clientes adquirirem o produto ao menor preço, mesmo que haja apenas algumas empresas no mercado, estas também serão tomadoras de preço, sendo este último determinado pela firma que vender o produto ao menor preço. No entanto, a existência de um número reduzido de firmas numa indústria se constitui em um incentivo à violação das condições que vigoram numa estrutura competitiva nos facilita a possibilidade de negociação entre os empresários. Por fim, vale destacar que pelo lado da demanda, em competição perfeita, nenhum consumidor consegue obter vantagens dos vendedores, como descontos ou créditos especiais, que geralmente são concedidos para grandes compradores.

Um mercado com produtos homogêneos significa que os produtos vendidos por todas as firmas são idênticos, de forma que os compradores são indiferentes quanto à empresa da qual obtêm o produto. Nesse sentido, os consumidores consideram apenas o preço no momento de aquisição do bem. Por isso, qualquer empresa que elevar os seus preços acima daquele que vigora no mercado terá suas vendas reduzidas a zero.

As empresas são livres para entrar e, ou, sair de uma indústria, ou seja, não existem barreiras à entrada. Isso implica que, se em uma determinada indústria as firmas estiverem obtendo lucros supernormais, é possível haver entradas de novas firmas, sem qualquer impedimento, bastando haver recursos disponíveis para entrar na atividade. Isso indica que não há possibilidade de redução do número de empresas atuantes na indústria, de forma a permitir que uma firma individual ou um pequeno grupo de empresários possa adquirir poder para afetar os preços de mercado. Essa hipótese é comumente associada ao fato de as empresas serem tomadoras de preços em competição perfeita.

A existência de livre mobilidade de recursos ou fatores facilita a entrada e saída em um mercado de competição perfeita. Assim, caso uma firma vislumbre a obtenção de lucro, certamente fará parte da indústria, ao passo que, se determinada atividade estiver gerando prejuízos, a empresa sairá da indústria. Dito de outra forma, uma firma pode contratar trabalho ou adquirir insumos conforme sua necessidade, podendo abandonar ou

realocar tais fatores de acordo com os seus interesses, sem incorrer em custos adicionais significativos.

Quanto ao perfeito conhecimento, tal característica determina que os consumidores dispõem de informações precisas sobre suas preferências, renda, preços e qualidades dos bens que adquirem, assim como as empresas as possuem para as variáveis referentes a custos, preços e tecnologias. Ferguson (1993) enfatiza ainda que a referida característica requer também um completo conhecimento do futuro e que, na ausência dessa onisciência, a competição perfeita não prevalece.

Por fim, vale ressaltar que, no mundo real, dificilmente se encontrará um mercado que apresente todas as características de um mercado competitivo, conforme apresentadas. Os mercados agrícolas são os que mais se aproximam dessa estrutura de mercado, onde geralmente as três primeiras exigências são atendidas, sendo violadas a quarta e, especialmente, a quinta, devido à imprevisibilidade do futuro[6]. Entretanto, apesar de ser bastante restritivo, o modelo de competição perfeita é útil para analisar as estruturas de mercado do mundo real a partir dos afastamentos do referido modelo. Por esse motivo, tal construção teórica será apresentada com mais detalhes nas seções seguintes.

11.3. A demanda em concorrência perfeita

A curva de demanda individual do consumidor representa as suas decisões de consumo em função de suas preferências e de sua restrição orçamentária. Conforme demonstrado no capítulo 3, para os bens que atendem à lei da demanda, a curva de demanda individual é sempre negativamente inclinada[7]. Considerando que cada consumidor apresenta sua curva de demanda individual, tem-se que a curva de demanda de mercado é o somatório horizontal das demandas individuais dos consumidores considerados, conforme apresentado na Figura 11.1.

---

[6] Quando a última característica não se verifica, diz-se que o mercado está estruturado na forma de concorrência pura.

[7] Somente para o caso especial dos Bens de *Giffen* tem-se uma curva de demanda positivamente inclinada.

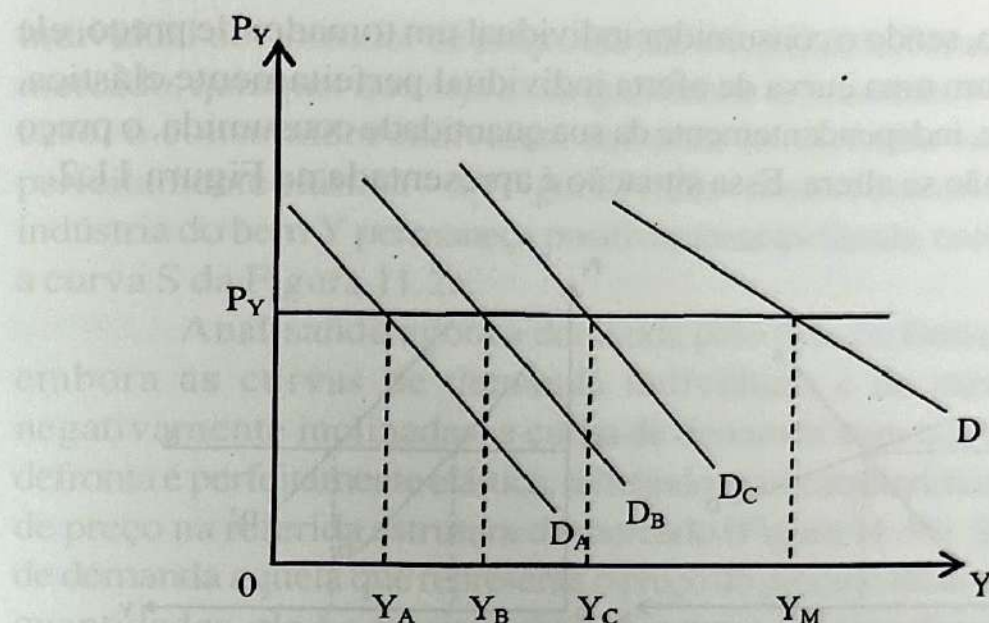



Figura 11.1 - Derivação da curva de demanda de mercado

A Figura 11.1 mostra que, considerando a existência de apenas três consumidores – A, B e C – no mercado do bem Y, a curva de demanda de mercado D é obtida por meio da soma horizontal das curvas D_A, D_B e D_C, que correspondem à demanda individual dos consumidores considerados. Essa situação indica que, para cada nível de preço, a quantidade demandada de Y pelo mercado é a soma das quantidades individuais adquiridas pelos consumidores A, B e C. Portanto, para o nível de preço P_Y, a quantidade Y_M consumida pelo mercado é a soma das quantidades Y_A, Y_B e Y_C, consumidas respectivamente pelos indivíduos A, B e C, no nível de preço considerado.

Para o caso de n consumidores, a curva de demanda de mercado é obtida de maneira análoga à descrita anteriormente, representando, para cada nível de preços, o somatório do consumo individual dos n consumidores considerados. Por ser a soma das demandas individuais, a curva de demanda de mercado é mais elástica em relação ao preço uma vez que reflete a variação no consumo para todos os consumidores; dessa forma qualquer mudança no preço levará a variações na quantidade maiores que para qualquer consumidor individual.

Por outro lado, sendo o consumidor individual um tomador de preço, ele se defronta com uma curva de oferta individual perfeitamente elástica, indicando que, independentemente da sua quantidade consumida, o preço de mercado não se altera. Essa situação é apresentada na Figura 11.2.

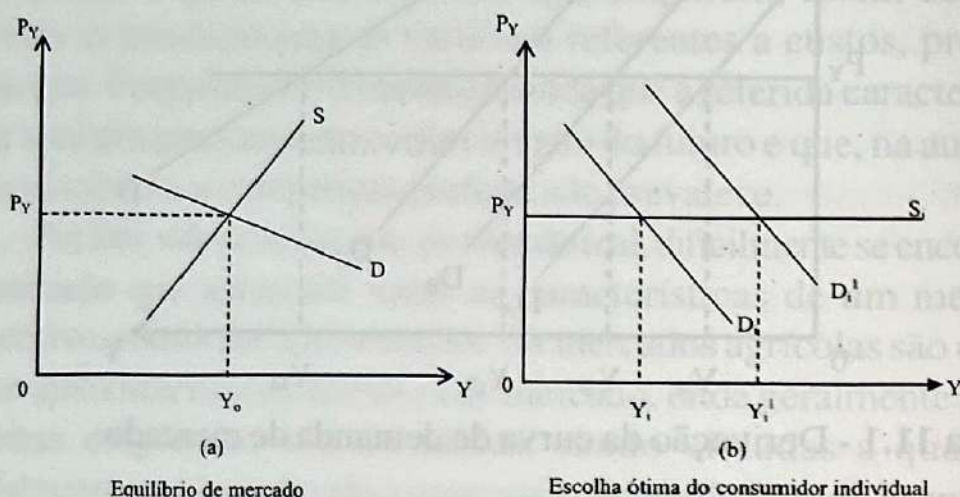



Figura 11.2 - Maximização do consumidor individual tomador de preço para o bem Y

A Figura 11.2a representa o equilíbrio de mercado para o bem Y. Tal equilíbrio determina o preço P_Y como sendo determinado pela demanda de mercado e pela curva de oferta da indústria. Dado esse equilíbrio, tem-se que a escolha inicial ótima do consumidor *i* é a quantidade Y_i, determinada pelo equilíbrio entre a curva de demanda individual e a curva de oferta com que o consumidor se depara ($P_Y = S_i$) (Figura 11.2b). Dessa forma, o equilíbrio ocorre quando o custo de aquisição de uma unidade adicional do referido bem, dado pela sua curva de oferta (S_i), se iguala ao benefício marginal associado ao consumo dessa unidade, representado pela curva de demanda individual D_i.

Dado o equilíbrio inicial do consumidor, considere-se uma mudança em uma das outras variáveis que afetam a curva de demanda individual do consumidor pelo bem Y, deslocando-a para a direita, de D_i para D_i^1, conforme apresentado na Figura 11.2b. Se a referida mudança atingir apenas o consumidor *i*, cuja escolha ótima de Y aumenta de Y_i para Y_i^1, tem-se que o preço de equilíbrio P_Y não se altera. Sendo o consumidor

individual um tomador de preço, ele não é capaz de influenciar o preço de mercado, qualquer que seja a sua quantidade demandada. Portanto, nesse caso, o consumidor individual defronta-se com uma curva de oferta perfeitamente elástica – S_i (Figura 11.2b) –, embora a curva de oferta da indústria do bem Y permaneça positivamente inclinada, conforme mostra a curva S da Figura 11.2a.

Analisando agora a demanda pelo lado da firma, tem-se que, embora as curvas de demanda individuais e de mercado sejam negativamente inclinadas, a curva de demanda com que uma firma se defronta é perfeitamente elástica, refletindo a sua característica de tomadora de preço na referida estrutura de mercado (Figura 11.3b). Sendo a curva de demanda aquela que representa o preço do produto relativo a diferentes quantidades, ela é a receita média com que a firma se depara, para cada unidade produzida. Para a empresa individual que atua em concorrência perfeita, a sua curva de demanda reflete a receita média e a receita marginal. Sendo a firma tomadora de preços, tem-se que:

$$RT = P_Y . Y$$
$$RMa = \frac{\partial RT}{\partial Y} = P_Y \qquad (11.1)$$
$$RMe = \frac{RT}{Y} = \frac{P_Y . Y}{Y} = P_Y$$

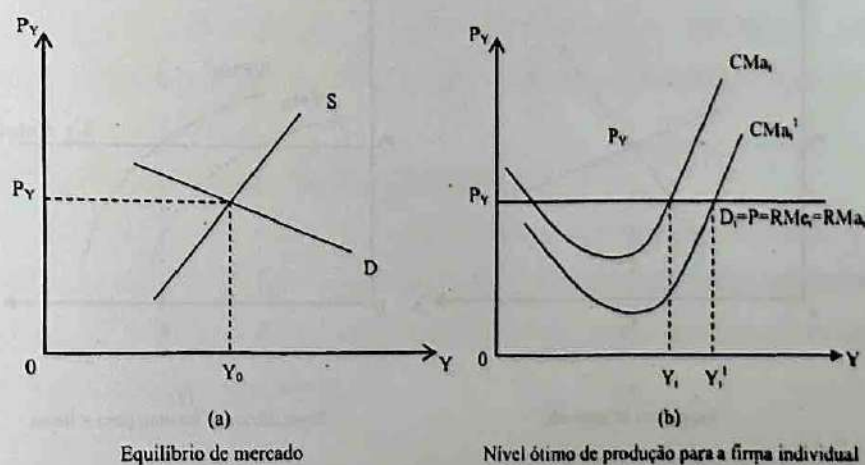



Figura 11.3 - Maximização da firma tomadora de preço para a produção do bem Y

Na Figura 11.3a, tem-se que o mercado de um bem Y qualquer se encontra em equilíbrio ao preço P_y e quantidade Y_0. Uma vez que a firma *i* atua como competidora perfeita no mercado, não exercendo qualquer influência sobre o nível de preço de Y, ela assumirá P_y como dado e maximizará o seu lucro no ponto em que o referido preço se igualar ao seu CMa inicial, dado pela curva CMa_i na Figura 11.3b. Dessa forma, ao ser tomadora de preço, dado o preço de equilíbrio P_Y, se a firma aumentar a sua produção de Y_i para Y_i^1 – em resposta à diminuição do seu CMa de CMa_i para CMa_i^1, o preço de mercado permanece inalterado. Nesse sentido, a firma individual em competição perfeita defronta-se com uma curva de demanda perfeitamente elástica – a curva D_i na Figura 11.3b –, podendo diminuir ou elevar a sua quantidade produzida sem afetar o preço de equilíbrio de mercado.

Para ofertar o produto Y no mercado, a firma demanda insumos. Na Teoria da Produção, apresentada no capítulo 7, mostrou-se que a sua curva de demanda de fator é a sua curva de Valor do Produto Marginal (VPMa) no estágio racional de produção. A maximização do lucro para a utilização do fator ocorre no ponto em que o VPMa se iguala ao custo marginal do fator. Se a firma atuar em competição perfeita na aquisição de determinado insumo X, o custo marginal deste último será o seu próprio preço, conforme apresentado na Figura 11.4.

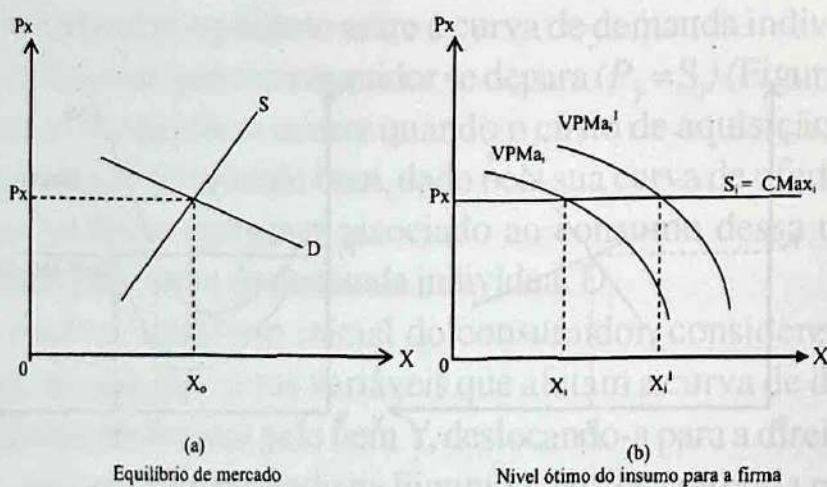



Figura 11.4 - Maximização da firma tomadora de preço para o insumo X.

A Figura 11.4a representa o equilíbrio de mercado para o insumo X, cujo preço de equilíbrio é estabelecido em P_X. Dado o equilíbrio, a firma *i* opta pela utilização do nível de insumo X_i, que iguala o $VPMa_i$ ao CMa_X, que equivale à curva de oferta de X com a qual a firma compradora de insumos se defronta – P_X=S_i (Figura 11.4b). Admitindo-se que a firma em questão modernizasse o seu processo produtivo de forma a aumentar a sua produtividade, deslocando a sua curva de $VPMa_i$ para a direita, de $VPMa_i$ para $VPMa_i^1$, o nível de insumo ótimo seria elevado de X_i para X_i^1 (Figura 11.4b). Sendo o aumento no uso de X exclusivo da firma *i*, P_x não se altera, pois o aumento de utilização do fator pela firma individual é desprezível em relação ao mercado como um todo. Dessa forma, quando uma empresa atua como competidora perfeita na aquisição de insumos de produção, ela se defronta com uma curva de oferta de fator perfeitamente elástica – S_i (Figura 11.4b). Dito de outra forma, a firma pode utilizar qualquer nível de insumo sem alterar o preço deste, pelo fato de atuar como tomadora de preços. Entretanto, ressalta-se que a curva de oferta da indústria produtora do insumo permanece positivamente inclinada, conforme mostra a curva S da Figura 11.4a.

No caso da firma produtora de insumos, o seu equilíbrio é o mesmo representado na Figura 11.3, já que, sendo tomadora de preços, sua curva de demanda, dada pelo preço de mercado do fator, é perfeitamente elástica e a sua curva de oferta é determinada pela sua curva de custo marginal.

Discutidas as características das demandas de bens e de fatores em concorrência perfeita, as seções seguintes do presente capítulo concentrar-se-ão nos aspectos referentes à oferta em competição perfeita.

11.4. Equilíbrio no período de mercado

Período de mercado é o curto espaço de tempo no qual a oferta é totalmente fixa. A título de exemplo, pode-se citar o período de entressafra de produtos agrícolas, no qual a quantidade de mercadoria só poderá ser aumentada na colheita seguinte.

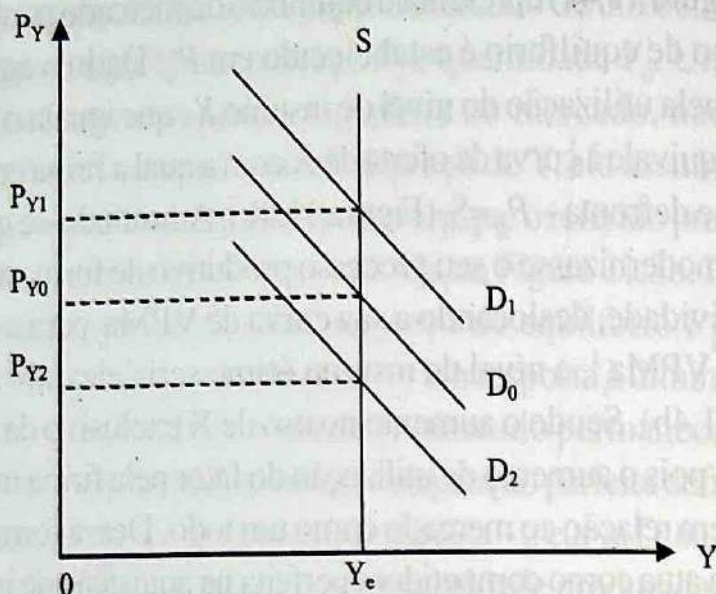



Figura 11.5 - O equilíbrio no período de mercado

Como no período de mercado a oferta de cada firma é absolutamente fixa, a curva de oferta da indústria[8], que é a soma horizontal de todas as curvas de oferta das empresas competidoras perfeitas, será perfeitamente inelástica, como mostra a Figura 11.5. Se a demanda é dada por D_0, o preço de equilíbrio será OP_{Y0}. Caso esta aumentasse para D_1, o preço subiria para OP_{Y1}, mas a quantidade de equilíbrio Y_e permaneceria a mesma, dada a total inelasticidade da oferta. Da mesma forma, uma diminuição da demanda para D_2 reduziria o preço para OP_{Y2}, com a mesma quantidade de equilíbrio Y_e.

Portanto, no período de mercado, dada a oferta fixa, a demanda determina sozinha o preço de equilíbrio, ao passo que a oferta é responsável por si só pela fixação da quantidade de equilíbrio. Esse resultado difere da solução de mercado em competição perfeita para o curto e longo prazo, na qual demanda e oferta determinam, conjuntamente, preço e quantidade.

[8]O termo indústria é aqui empregado conforme já consagrado pela teoria microeconômica: conjunto de empresas que atuam no mesmo setor.

11.5. Equilíbrio competitivo da firma no curto e no longo prazo

No curto prazo, a empresa pode modificar o seu nível de produção em amplo domínio de possibilidades, alterando o uso de seus insumos variáveis, embora esteja sujeita às limitações impostas por seus insumos fixos, que geralmente são as instalações e os equipamentos.

Para atingir o equilíbrio, ou seja, maximizar os seus lucros, uma firma escolhe o nível de produção que iguala a receita marginal ao custo marginal no ramo crescente da curva de custo marginal.

No caso específico de uma firma competitiva, a receita marginal é o próprio preço. Isso porque, como ela é tomadora de preço, a receita extra que é obtida com uma unidade adicional do produto é o próprio preço de equilíbrio do mercado, conforme apresentado anteriormente pela equação (11.1).

Dessa forma, a empresa competitiva escolherá ofertar o nível de produto Y que atender às seguintes condições para máximo lucro:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = \frac{\partial RT}{\partial Y} - \frac{\partial CT}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = RMa - CMa = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = P_Y - CMa = o \tag{11.2}$$

$$P_Y = CMa$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial^2 Y} = \frac{\partial^2 RT}{\partial^2 Y} - \frac{\partial^2 CT}{\partial^2 Y} < 0$$

$$\frac{\partial^2 RT}{\partial^2 Y} < \frac{\partial^2 CT}{\partial^2 Y} \tag{11.3}$$

A expressão (11.2) representa a condição necessária para que determinado nível de produção Y seja um ponto de máximo lucro. Já

(11.3) representa a condição suficiente, indicando que a inclinação da curva de custo marginal deve ser maior do que a inclinação da curva de receita marginal no referido ponto. Essa situação é apresentada graficamente pela Figura 11.6.

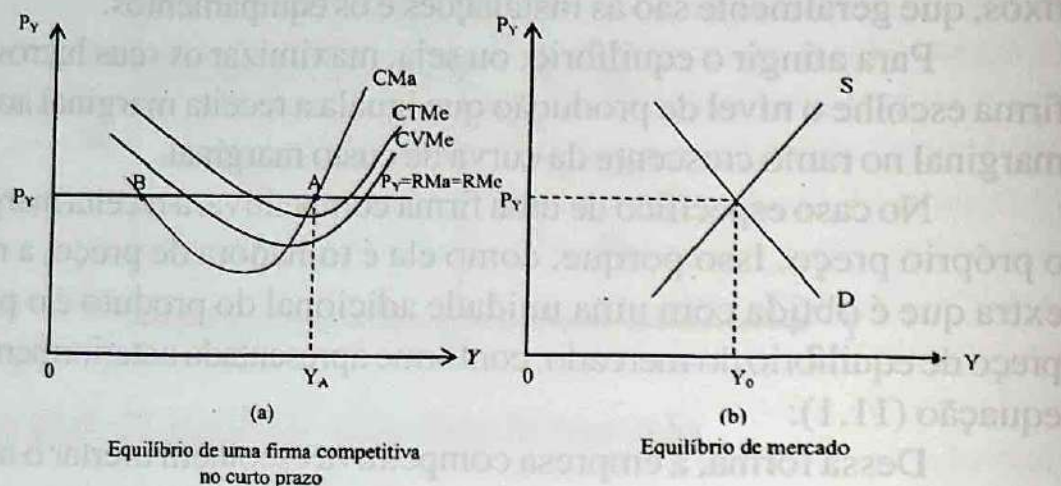



Figura 11.6 - Maximização do lucro para uma empresa competitiva tomadora de preço

O ponto A da Figura 11.6a representa o ponto de máximo lucro para a empresa considerada, pois iguala a sua RMa (P_Y) ao seu CMa no ramo crescente desse último. Intuitivamente, tem-se que em Y_A o produtor já se apropriou de toda a diferença possível entre a RMa e o CMa entre os pontos B e A, de forma que qualquer ponto à direita de A representaria diminuição do lucro, uma vez que o CMa passa a ser maior que a RMa.

A curva de oferta de curto prazo para uma firma competitiva é derivada a partir de sua curva de custo marginal acima do ponto de mínimo da curva de custo variável médio, como mostra a região em negrito do CMa na Figura 11.7.

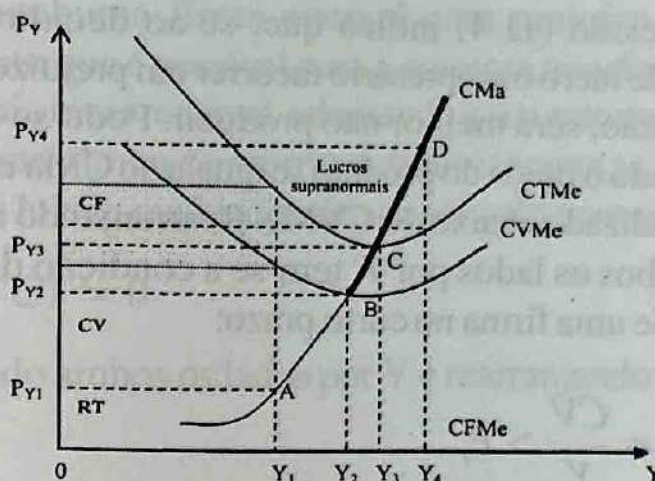



Figura 11.7 - Curva de oferta de uma empresa competitiva no curto prazo

Pela Figura 11.7, observa-se que no ponto A, abaixo do ponto de mínimo do CVMe, a firma perderia não somente os seus custos fixos (área CF), como também perderia a área CV dos custos variáveis não cobertos pela receita total gerada (área RT) com a produção Y_1. Ou seja, para qualquer quantidade produzida abaixo de Y_2, que corresponde ao ponto B, o produto de equilíbrio no curto prazo é zero, pois assim a firma teria como prejuízo apenas os custos fixos[9].

Por outro lado, estando em qualquer ponto entre B e C, é interessante para a firma produzir no curto prazo mesmo incorrendo em prejuízo, pois, dessa forma, estaria cobrindo os custos variáveis e parte dos seus custos fixos. Caso pare de produzir, teria prejuízo equivalente ao seu custo fixo, que seria perdido integralmente caso não houvesse atividade. Entretanto, se o prejuízo persistir no longo prazo, a empresa encerrará suas atividades.

Resumindo a discussão anterior em notação matemática, pode-se dizer que será melhor para uma empresa encerrar suas atividades quando:

$$CF > P_Y . Y - CV - CF \tag{11.4}$$

[9] Por esse motivo, o ponto B é chamado de ponto de fechamento da firma no curto prazo. É importante ressaltar que, estando em B, a empresa produzirá Y_2, pois embora o seu prejuízo (CF) seja o mesmo, estando em atividade ou não, espera-se que o empresário, por já ter toda a estrutura montada para atuar na indústria em questão, prefira produzir, pelo menos no curto prazo.

A expressão (11.4) indica que, se ao decidir pela produção maximizadora de lucro o empresário incorrer em prejuízo maior que seus custos fixos, então, será melhor não produzir. Pode-se demonstrar que isso ocorre quando o preço do produto se iguala ao CMa em seu segmento ascendente, localizado abaixo do CVMe. Rearranjando a equação (11.4) e dividindo ambos os lados por Y, tem-se a condição de encerramento das atividades de uma firma no curto prazo:

$$CVMe = \frac{CV}{Y} > P_Y \qquad (11.5)$$

Assim, se os custos variáveis forem maiores do que o preço do produto, o empresário ficará em melhor situação se sua firma nada produzir, até que no longo prazo ele possa transferir o seu capital para outro setor.

Quanto aos pontos C e D da Figura 11.7, eles representam, respectivamente, situações de lucro econômico zero, quando o preço do produto é igual ao mínimo do custo total médio, e lucro econômico positivo, quando o preço do produto é superior ao custo total médio. Essas situações serão discutidas com mais detalhes na seção 11.7.

Assim como no curto prazo, o equilíbrio da firma no longo prazo ocorre quando o preço do produto, P_Y, é igual ao CMa na sua parte crescente. A diferença é que a curva de CMa relevante não é mais a curva de curto prazo – acréscimo no custo total decorrente do aumento de uma unidade na produção modificando-se os insumos variáveis e mantendo-se os demais fixos – e sim a de longo prazo – acréscimo no custo total decorrente do aumento na produção variando-se todos os insumos, inclusive o tamanho de instalação. Da mesma forma, para se apurar a existência de lucro ou prejuízo temporário no longo prazo, a curva de CMe a ser considerada é a de longo prazo – envoltória das curvas de CMe de curto prazo, representando o tamanho da fábrica que será ótimo para cada nível de produção.

A curva de oferta da empresa no longo prazo é representada pela curva de CMa de longo prazo acima do ponto de mínimo da curva de CMe de longo prazo. Isso porque, além de não haver custos fixos no

longo prazo, nenhuma firma operará com prejuízo nesse período considerado, visto que é possível para a empresa transferir-se para outro setor da economia mais rentável, adaptando a sua estrutura produtiva, ou então liquidar esta última e encerrar definitivamente as suas atividades. Dessa forma, os lucros realizados têm de ser pelo menos zero:

$$P_Y.Y - CT = 0 \tag{11.6}$$

Dividindo ambos os lados por Y e rearranjando os termos, tem-se:

$$P_Y = \frac{CT}{Y} \tag{11.7}$$

A igualdade (11.7) diz que, no longo prazo, o preço deve ser pelo menos igual ao custo médio. Por isso, a curva de oferta de longo prazo é a parte hachurada da curva de CMaLP localizada acima da curva de CMe na Figura 11.8. Em qualquer nível de preço inferior a P_{Y2}, a firma incorre em prejuízo e, por isso, opta por não ofertar, saindo da indústria considerada.

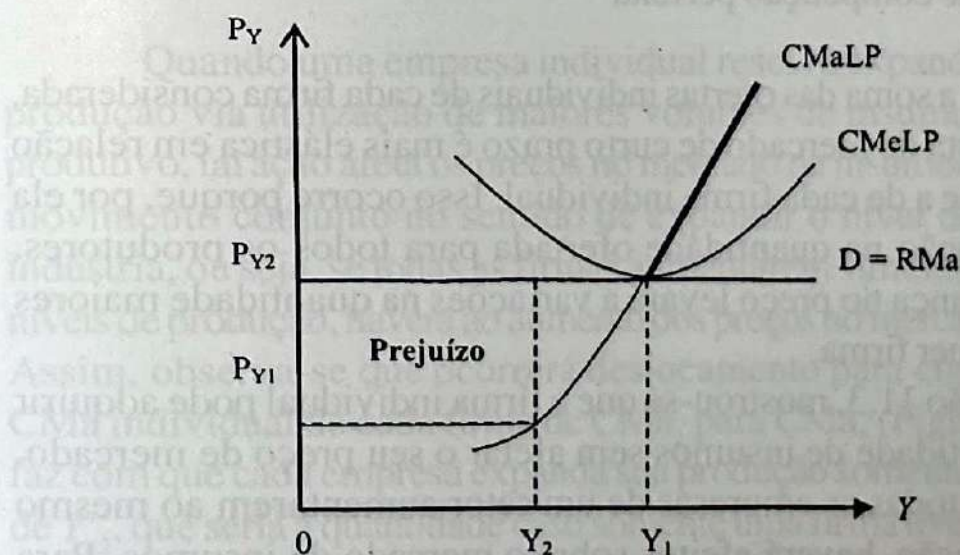



Figura 11.8 - Curva de oferta de uma empresa competitiva no longo prazo

11.6. Curva de oferta de curto prazo da indústria

Uma vez definidas as curvas de ofertas individuais de curto prazo de cada uma das firmas competitivas que atuam em determinado mercado, a curva de oferta de curto prazo da indústria é simplesmente a soma horizontal das curvas de oferta de todas as *n* firmas do setor, conforme mostra a Figura 11.9.

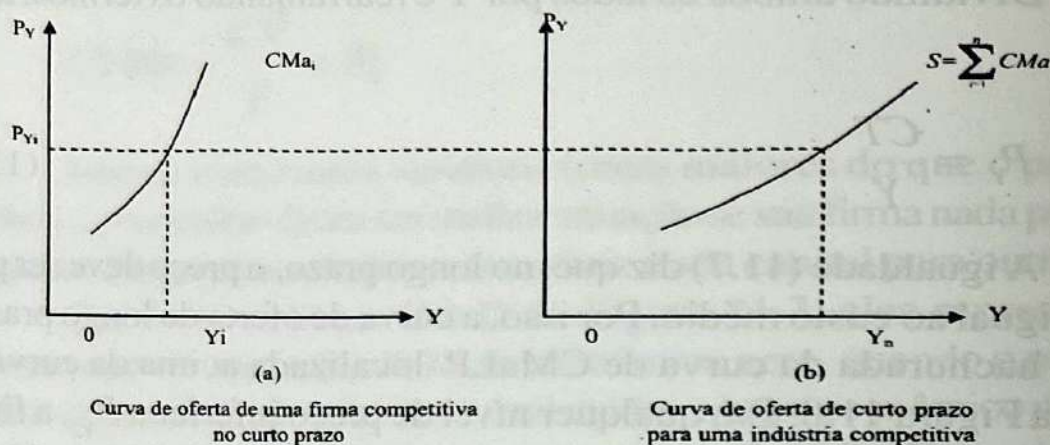



Figura 11.9 - Curva de oferta de curto prazo para uma indústria em regime de competição perfeita

Por ser a soma das ofertas individuais de cada firma considerada, a curva de oferta de mercado de curto prazo é mais elástica em relação ao preço do que a de cada firma individual. Isso ocorre porque, por ela refletir a variação na quantidade ofertada para todos os produtores, qualquer mudança no preço levará a variações na quantidade maiores que para qualquer firma.

Na seção 11.3, mostrou-se que a firma individual pode adquirir qualquer quantidade de insumos sem afetar o seu preço de mercado. Entretanto, se todas as empresas de um setor aumentarem ao mesmo tempo a produção, haverá efeitos sobre o mercado de insumos. Para ilustrar, considere um fazendeiro que poderia aumentar a sua atividade agrícola, elevando seus insumos, sem interferir no mercado de fertilizantes, pesticidas, tratores, entre outros. Por outro lado, se todos os fazendeiros

assim o fizessem, haveria elevação na demanda por esses recursos, pressionando os preços desses últimos para cima. Nessa situação, a curva de oferta da indústria não pode mais ser obtida a partir da simples soma horizontal das curvas de ofertas individuais das empresas do setor, e sim através do processo demonstrado na Figura 11.10.

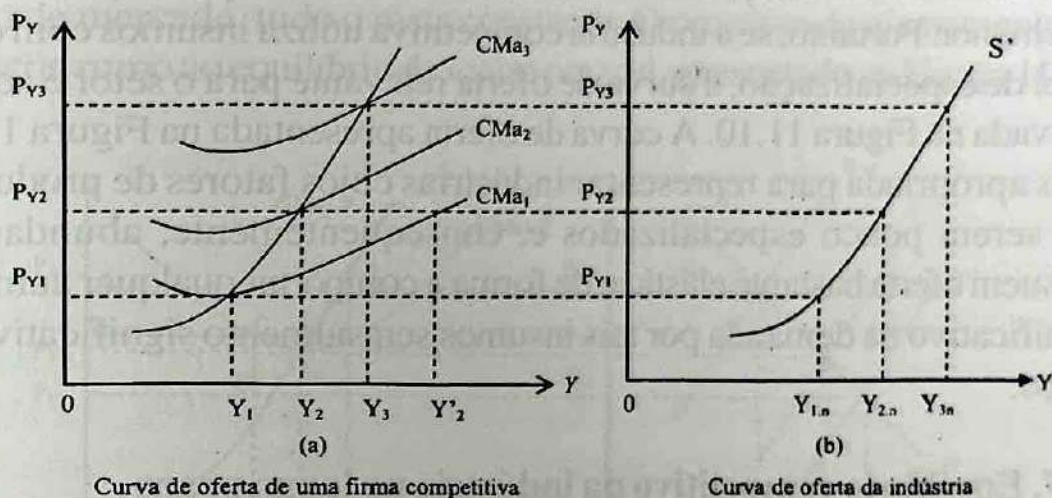



Figura 11.10 - Curva de oferta da indústria quando variações de toda a indústria afetam os preços dos insumos

Quando uma empresa individual resolve expandir seu nível de produção via utilização de maiores volumes de insumos no processo produtivo, tal ação afeta os preços no mercado de insumos. Contudo, um movimento conjunto no sentido de expandir o nível de produção da indústria, ou seja, se todas as firmas aumentarem simultaneamente seus níveis de produção, haverá ao aumento dos preços no mercado de insumos. Assim, observa-se que ocorrerá deslocamento para cima da curva de CMa individual de cada firma de CMa_1 para CMa_2 (Figura 11.10). Isso faz com que cada empresa expanda sua produção somente até Y_2, em vez de Y'_2, que seria a quantidade caso somente uma firma tivesse aumentado sua atividade em resposta à elevação do preço de P_{Y1} para P_{Y2}, sem que ocorresse elevação nos custos da indústria. Desenvolvendo raciocínio análogo ao apresentado anteriormente para aumentos subseqüentes de

preços, obtém-se a curva de oferta da indústria (S') quando todas as empresas variam sua produção.

Vale ressaltar que a curva S' é menos elástica do que a curva S apresentada na Figura 11.9, já que o aumento no preço dos insumos diminui o efeito da elevação do preço do produto sobre a quantidade produzida de cada firma e, conseqüentemente, o aumento total da produção do setor será menor. Portanto, se a indústria competitiva utiliza insumos com certo nível de especialização, a curva de oferta relevante para o setor é aquela derivada na Figura 11.10. A curva de oferta apresentada na Figura 11.9 é mais apropriada para representar indústrias cujos fatores de produção, por serem pouco especializados e, conseqüentemente, abundantes, possuem oferta bastante elástica, de forma a comportar qualquer aumento significativo na demanda por tais insumos sem aumento significativo de preço.

11.7. Equilíbrio competitivo da indústria no longo prazo

No longo prazo a empresa pode não só variar todos os seus insumos, inclusive o tamanho da planta, como também sair ou entrar na indústria. Isso ocorre porque se considera como longo prazo aquele espaço de tempo no qual é possível para a empresa tanto modificar todos os seus fatores de produção dentro de um mesmo setor, como também alterar toda a sua estrutura produtiva com o objetivo de atuar em outro segmento da economia que se apresente mais lucrativo.

Embora no curto prazo uma firma competitiva possa obter lucro econômico[10] positivo, também chamado de lucro supernormal, no longo prazo este lucro será reduzido a zero, caracterizando o chamado lucro normal em competição perfeita. Retomando a Figura 11.7, que representa uma situação de curto prazo, observa-se que no ponto D a empresa está

[10] Diferentemente do lucro contábil, o lucro econômico leva em conta também os custos de oportunidade, ou seja, o melhor retorno alternativo que um fator de produção teria se fosse utilizado em outro empreendimento. Dessa forma, uma empresa que esteja obtendo lucro normal no longo prazo não significa que o capital investido não esteja gerando nenhum retorno, e sim que este fator está sendo remunerado a preço de mercado – o mesmo retorno que este fator poderia receber em qualquer outro setor da economia.

auferindo o primeiro tipo de lucro, ao passo que no ponto C o lucro alcançado é o do segundo tipo.

Lucro econômico positivo representa um retorno de investimentos em determinada indústria superior ao obtido em qualquer outro setor da economia. Nessas circunstâncias, novas empresas são atraídas para a indústria, expandindo-se a oferta desta e, conseqüentemente, reduzindo o preço de mercado, tudo o mais constante. O processo de ajustamento da indústria rumo ao equilíbrio de longo prazo é apresentado na Figura 11.11.

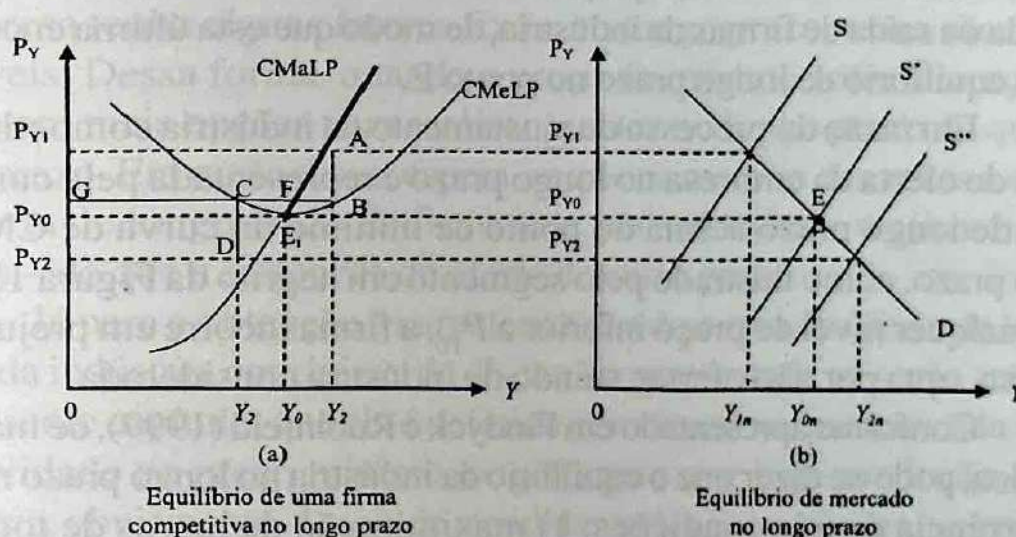



Figura 11.11 - Ajustamento de uma indústria em concorrência perfeita rumo ao equilíbrio de longo prazo

Inicialmente, a curva de demanda é dada por D e a curva de oferta por S, estabelecendo um equilíbrio de mercado com preço P_{Y1} e quantidade Y_{1n}.

Assumindo-se que todas as firmas individuais tenham a mesma estrutura de custos, ao preço P_{Y1} cada firma está em equilíbrio temporário de longo prazo, produzindo $Y_1 (Y_{1n}/n)$ e auferindo um lucro supernormal, representado pelo retângulo P_{Y1}GBA. Entretanto, a indústria não se encontra em equilíbrio, já que a existência de lucros supernormais atrairá novas firmas para esse setor, deslocando a curva de oferta para a direita.

Supondo que a atração do lucro nesta indústria seja muito forte, um número considerável de novas empresas entrará no referido setor,

causando um deslocamento para direita da curva de oferta de S para S". Nessa situação, o preço cai de P_{Y1} para P_{Y2}, e cada empresa passará a incorrer em prejuízos, representados pelo retângulo $GP_{Y2}DC$. Com isso, as empresas começam a deixar o setor, já que o retorno em investimentos alternativos agora se encontra maior. Tal processo desloca a curva de oferta para a esquerda, aumentando o preço de mercado (de P_{Y2} para P_{Y0}), até que cada indústria remanescente aufira um lucro normal de zero (no presente exemplo, o deslocamento foi de S" para S'). Dessa forma, não havendo nem lucro nem prejuízo econômico, inexiste incentivo para entrada ou saída de firmas da indústria, de modo que esta última encontra-se em equilíbrio de longo prazo no ponto E.

Em razão do processo de ajustamento da indústria competitiva, a curva de oferta da empresa no longo prazo é representada pela curva de CMa de longo prazo acima do ponto de mínimo da curva de CMe de longo prazo, como ilustrado pelo segmento em negrito da Figura 11.11a. Em qualquer nível de preço inferior a P_{Y0}, a firma incorre em prejuízo e, por isso, opta por não ofertar, saindo da indústria considerada.

Conforme apresentado em Pindyck e Rubinfeld (1999), de maneira sintética, pode-se dizer que o equilíbrio da indústria no longo prazo requer a ocorrência de três condições: 1) maximização de lucros de todas as empresas do setor; 2) inexistência de estímulo para entrada ou saída de empresas na indústria, uma vez que todas as firmas desta auferem lucro econômico igual a zero; e 3) o mercado está em equilíbrio de longo prazo, ou seja, o preço do produto iguala a quantidade demandada pelos consumidores à quantidade ofertada pela indústria. Em estreita relação com essas condições, o equilíbrio de longo prazo de uma firma individual ocorre no ponto em que o preço de mercado se iguala ao custo marginal e ao custo médio de longo prazo, representado pelo ponto E_i da Figura 11.11a.

11.8. O equilíbrio do mercado competitivo no longo prazo

Para se determinar o equilíbrio do mercado competitivo no longo prazo, é necessário caracterizar de que forma se comportam a demanda e a oferta total nessa estrutura de mercado para o período de tempo

considerado.

Em relação à demanda, a sua derivação tanto para o curto como para o longo prazo segue as preferências do consumidor em face de sua restrição orçamentária. As diferenças entre as demandas individuais e, conseqüentemente, as de mercado, em relação ao curto e ao longo prazo, são geralmente em termos de elasticidade-preço e elasticidade-renda, ou seja, dependendo das características de determinado bem, pode-se ter uma demanda mais ou menos elástica no curto ou no longo prazo.

Quanto à oferta individual, ressalta-se que, embora no curto prazo a empresa tenha alguns fatores fixos, no longo prazo, esses são todos variáveis. Dessa forma, quando o preço do produto sofre alteração, a firma tem mais opções para realizar ajustes no longo prazo do que no curto prazo. Em razão disso, espera-se que na maioria das vezes a curva de oferta de longo prazo da firma seja mais elástica – reaja mais aos preços – do que a sua curva de oferta de curto prazo.

Já para a obtenção e caracterização da curva de oferta de longo prazo da indústria, conclui-se, da discussão apresentada na seção anterior do presente capítulo, que ela é definida como a curva que une cada nível de atividade ao preço mínimo exigido para que haja produção nesta indústria, obviamente, depois de atendidas todas as condições necessárias ao ajustamento de longo prazo sob regime de concorrência perfeita. Portanto, a referida curva não pode ser obtida pelo simples somatório das curvas de custo marginal de longo prazo das firmas individuais, como as curvas S da Figura 11.11b, e sim através das combinações preço-quantidade ofertada da indústria depois de atendidas as três condições de equilíbrio do setor no longo prazo, apresentadas no último parágrafo da seção anterior. Entretanto, conforme destaca Ferguson (1993), a natureza desse equilíbrio irá depender das características dos fatores de produção utilizados por determinada indústria, assim como do comportamento da estrutura de custo das firmas consideradas.

Na discussão do equilíbrio de longo prazo da indústria na seção anterior, baseou-se implicitamente na hipótese de que a entrada de novas firmas no referido setor não provocaria elevação de preços no mercado dos insumos utilizados pela indústria analisada. Quando isso ocorre, diz-

se que essa é uma indústria de custos constantes. Isso geralmente ocorre quando os recursos usados no setor são não-especializados[11] e, por isso, abundantes. A curva de oferta de longo prazo para uma indústria com essa característica é apresentada na Figura 11.12.

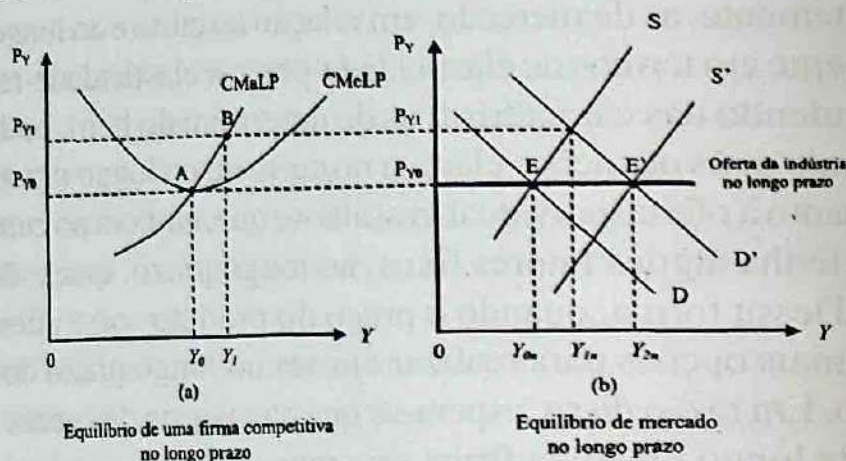



Figura 11.12 - Curva de oferta da indústria no longo prazo com custos constantes

Na Figura 11.12b, o mercado está inicialmente em equilíbrio no ponto E, que é um ponto sobre a curva de oferta da indústria no longo prazo[12] S. Ao preço P_{Y0}, cada firma está em equilíbrio de longo prazo, produzindo a quantidade $Y_0(Y_{0n}/n)$. Supondo um aumento da demanda de longo prazo de D para D', com o número fixo de firmas (n), o preço eleva-se de P_{Y0} para $P_{Y1,}$ assim como a quantidade sobe de Y_{0n} para Y_{1n}, já que as empresas aumentam a sua produção de Y_0 para Y_1. Entretanto, o setor apresenta agora lucro supernormal, atraindo novas empresas para a indústria até que o referido lucro desapareça. Para o presente exemplo, isso ocorre enquanto a curva de oferta de curto prazo se desloca até S'.

Como se trata de uma indústria de custo constante, o aumento na quantidade usada de insumos – provocado pela elevação do número de firmas – não modifica o preço deles[13]. Em conseqüência, as curvas de

[11] Como exemplo, podem-se citar setores cuja mão-de-obra não-especializada representa um importante insumo na produção.

[12] Para ser um ponto sobre a curva de oferta de longo prazo da indústria, todas as condições necessárias para que esta última esteja em equilíbrio de longo prazo devem ser atendidas.

[13] Para que isso ocorra, a curva de oferta de cada insumo usado deve ser perfeitamente elástica até onde as firmas da indústria em questão queiram produzir. Isso significa que esta última como um todo é um perfeito competidor em cada mercado de recursos.

custo marginal e custo médio de longo prazo de cada firma individual não se alteram, e o novo equilíbrio da indústria e do mercado ocorre no ponto E', que é um outro ponto sobre a curva de oferta da indústria no longo prazo.

Como o novo equilíbrio se dá no mesmo nível de preço P_{Y0} do equilíbrio inicial – embora a quantidade tenha aumentado de Y_{0n} para Y_{2n} –, a curva de oferta da indústria no longo prazo é perfeitamente elástica no nível de preço de equilíbrio que se iguala ao custo médio mínimo de longo prazo, conforme mostra a linha horizontal em negrito da Figura 11.12b. Portanto, em uma indústria com custos constantes, um nível mais elevado de produção em um novo equilíbrio de longo prazo pode ser alcançado no mesmo nível de preços do equilíbrio inicial, já que os custos dos insumos não são alterados.

Quando os preços de alguns ou de todos os insumos de produção aumentam mediante expansão da atividade de determinada indústria, diz se que esta é uma indústria de custos crescentes. Como exemplo, podem-se citar setores que utilizam mão-de-obra especializada ou recursos minerais que sejam encontrados somente em determinados tipos de solo. A derivação da curva de oferta de longo prazo para uma indústria com essa característica é apresentada na Figura 11.13.

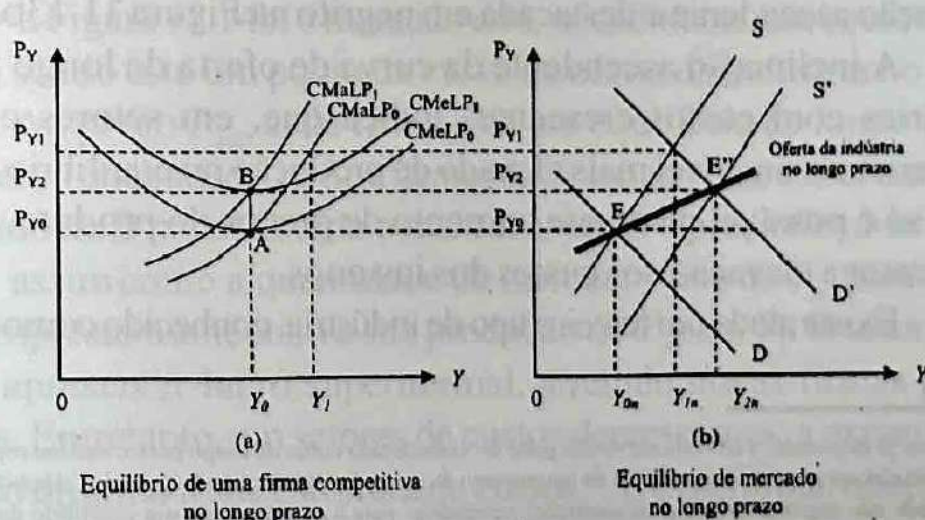



Figura 11.13 - Curva de oferta da indústria no longo prazo com custos crescentes

Na Figura 11.13b, bem como na Figura 11.12b, o mercado está inicialmente em equilíbrio no ponto E, que é um ponto sobre a curva de oferta da indústria no longo prazo S. Ao preço PY_0, cada firma está em equilíbrio de longo prazo, produzindo a quantidade Y_0. Havendo aumento da demanda de longo prazo D para D', dada a oferta, o preço eleva-se de P_{Y0} para $P_{Y1,}$ assim como a quantidade sobe de Y_{0n} para Y_{1n}, já que as empresas aumentam seus níveis de produção de Y_0 para Y_1. Novamente, o setor passa a apresentar lucro supernormal, atraindo novas entradas para a indústria e elevando, conseqüentemente, a demanda por insumos dessa indústria. Entretanto, como se trata agora de um setor com custos crescentes, os preços dos recursos aumentam em função do crescimento da utilização destes, elevando a estrutura de custos da indústria de $CMaLP_0$ e $CMeLP_0$ para $CMaLP_1$ e $CMeLP_1$. Em razão disso, o deslocamento da curva de oferta de curto prazo da indústria[14] é menos intenso do que no caso da indústria que tem custos constantes[15], fazendo com que o novo equilíbrio da indústria seja atingido agora no ponto E", cujo preço P_{Y2} é superior a P_{Y0}.

Como o ponto E" é um ponto de equilíbrio da indústria no longo prazo, este é um ponto da curva de oferta de longo prazo da indústria. Unindo os pontos E e E", obtém-se a curva de oferta de longo prazo, cuja inclinação ascendente é destacada em negrito na Figura 11.13b.

A inclinação ascendente da curva de oferta de longo prazo de indústrias com custos crescentes indica que, em setores com essa característica, um nível mais elevado de produção no equilíbrio de longo prazo só é possível mediante aumento de preços do produto, a fim de compensar a elevação nos custos dos insumos.

Existe ainda um terceiro tipo de indústria, conhecido como indústria

---

[14] Conforme já destacado, a referida curva não pode ser considerada como de longo prazo, mesmo representando o somatório das curvas de custo marginal de longo prazo da firma. Isso se deve ao fato de suas combinações preço-quantidade não englobarem todas as condições necessárias para a existência de um equilíbrio de longo prazo para a indústria considerada.

[15] Isso porque, quando se trata de uma indústria de custo crescente, o lucro supernormal não desaparece somente em função do aumento da oferta provocado pela entrada de novas firmas, mas também pela elevação da estrutura de custo de toda a indústria. Logo, um menor deslocamento da curva de oferta de curto prazo da indústria é suficiente para estabelecer o equilíbrio de longo prazo do setor.

de custo decrescente, cujo aumento da produção reduz a estrutura de custos das empresas do setor. Essa situação está associada a setores nos quais a expansão da produção representa significativas economias e ganhos de eficiência, por exemplo, nos sistemas de transporte e administração financeira das firmas envolvidas (PINDYCK; RUBINFELD, 1999). Dessa forma, a estrutura de custos da indústria como um todo sofre redução. A derivação da curva de oferta de longo prazo para uma indústria com essa particularidade é apresentada na Figura 11.14.

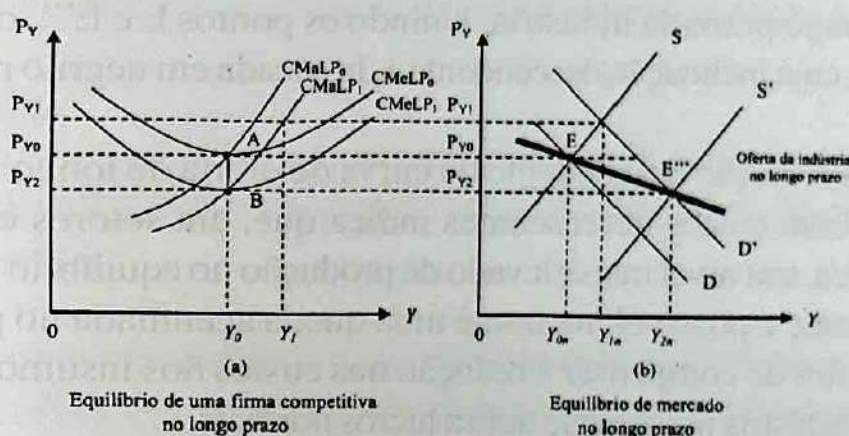



Figura 11.14 - Curva de oferta da indústria no longo prazo com custos decrescentes

Na Figura 11.14b, o mercado está, inicialmente, em equilíbrio no ponto E, sendo este um ponto da curva de oferta da indústria no longo prazo S. Ao preço P_{Y0}, cada firma está em equilíbrio de longo prazo, produzindo a quantidade Y_0. Se a demanda de longo prazo sofrer aumento, deslocando de D para D', tudo o mais constante, o preço eleva-se de P_{Y0} para P_{Y1}, assim como a quantidade de mercado sobe de Y_{0n} para Y_{1n}, já que as empresas aumentam a sua produção de Y_0 para Y_1. O setor passa agora a apresentar lucro supernormal, atraindo novas firmas para a indústria. Entretanto, em setores de custos decrescentes, a expansão da produção diminui a sua estrutura de custos[16]. Dessa forma, observa-se

[16] Para indústrias de custo decrescente, considera-se que, mesmo havendo aumento no preço dos fatores de produção não-especializados, em resposta a uma maior produção do setor em análise, a redução na estrutura de custos da indústria é mais do que proporcional ao referido aumento e, portanto, obtém-se uma curva de oferta da indústria de longo prazo negativamente inclinada.

pela Figura 11.14a que o CMaLP e o CMeLP reduzem, respectivamente, de $CMaLP_0$ para $CMaLP_1$ e de $CMeLP_0$ para $CMeLP_1$. Por isso, o deslocamento para a direita da curva de oferta de curto prazo da indústria é mais intenso do que nos dois tipos de indústria[17] apresentados nas Figuras 11.12 e 11.13, fazendo com que o novo equilíbrio da indústria seja atingido agora no ponto E''', cujo preço P_{Y2} é inferior a P_{Y0}.

Dessa maneira, define-se o ponto E''' como um ponto de equilíbrio da indústria no longo prazo, sendo, portanto, um outro ponto da curva de oferta de longo prazo da indústria. Unindo os pontos E e E''', obtém-se esta última, cuja inclinação descendente é destacada em negrito na Figura 11.14b.

A inclinação descendente da curva de oferta de longo prazo de indústrias com custos decrescentes indica que, em setores com essa característica, um nível mais elevado de produção no equilíbrio de longo prazo somente é possível mediante uma queda acentuada no preço do produto, a fim de compensar a redução nos custos dos insumos e fazer com que a indústria novamente aufira lucros normais.

Por fim, é importante destacar que, no curto prazo, qualquer que seja a natureza do setor, a curva de oferta da indústria é sempre positivamente inclinada, indicando que um aumento da produção só será induzido mediante elevação do preço do produto. Contudo, no longo prazo, indústrias de custos constantes e de custos decrescentes, realizados todos os ajustamentos necessários para o equilíbrio de longo prazo em concorrência perfeita, apresentam curvas de oferta da indústria, respectivamente, horizontal e negativamente inclinada, indicando no primeiro caso que a produção pode aumentar com um nível de preços constantes e, no segundo, mesmo que o nível de preços caia.

---

[17] Isso porque, em uma indústria de custo decrescente, o lucro supernormal demora mais para desaparecer, já que embora o preço diminua em função do aumento da oferta provocado pela entrada de novas firmas, tal redução é compensada pela queda na estrutura de custo de toda a indústria. Logo, é necessário maior deslocamento da curva de oferta para restabelecer o equilíbrio de longo prazo do setor. É importante destacar que tal equilíbrio é atingido porque a queda no preço é mais intensa do que a redução dos custos, fazendo com que o lucro supernormal desapareça, mesmo que em um nível de preço inferior ao equilíbrio inicial.

1) Considere um gerente administrativo de uma empresa que fabrica um produto homogêneo, atuando em um mercado de concorrência perfeita. Seu custo de produção é $CT = 125 + Y^2$, em que Y é a quantidade produzida e CT o custo total. A partir dessas informações, pergunta-se:

a) A empresa está operando no curto ou no longo prazo?

b) Dado um preço de mercado de R$ 200,00 para o produto fabricado pela empresa, qual e de que tipo seria o lucro dessa última?

c) Qual o ponto de encerramento da atividade da empresa? Por quê?

Resolução

a) A empresa está operando no curto prazo, pois a existência de um custo fixo de R$ 125,00 indica que nem todos os fatores de produção são variáveis.

b) Uma empresa competitiva maximizadora de lucro produz a quantidade que iguala o preço de mercado ao seu custo marginal no ramo crescente desse último. Assim, tem-se:

$$CT = 125 + Y^2$$

$$\frac{\delta C}{\delta Y} = CMa = 2.Y$$

Condição de primeira ordem:

$$\frac{\delta RT}{\delta Y} - \frac{\delta CT}{\delta Y} = 0$$

Py = CMa　　　200 = 2.Y　　　Y = 100

Condição de segunda ordem:

$$\frac{\delta^2 RT}{\delta Y^2} - \frac{\delta^2 C}{\delta Y^2} < 0$$

$-2 < 0$, logo a quantidade $Y = 100$ é realmente maximizadora de lucro. A partir daí, calculando-se a receita total e o custo total para esta quantidade, tem-se:

$$RT = 200.100 = 20000$$
$$CT = 125 + (100)^2 = 125 + 10000 = 10125$$
$$LT = 20000 - 10125 = 9875$$

Como o lucro é positivo, a empresa está auferindo um lucro supernormal no curto prazo.

c) O ponto de encerramento de uma firma no curto prazo é aquele cujo preço de mercado se iguala ao ponto de mínimo do CVMe. Para o presente caso, o CVMe é dado por:

$$CVMe = CV / Y = Y^2 / Y = Y$$

Sendo o CMa igual a 2Y, observa-se que, neste caso, este último estará sempre acima do CVMe, para quantidades positivas do produto. Portanto, não existe um ponto de encerramento para esta firma no curto prazo.

2) Em um mercado de concorrência perfeita, atuam 50 firmas. Todas têm a mesma função de custo de produção dada por $C(Y) = Y^2/2$, em que C é o custo total de produção e Y a quantidade produzida. A equação de demanda pelo produto é dada por $Y = 1000 - 50Py$. A partir das informações fornecidas e considerando uma situação de curto prazo, pede-se:

a) A curva de oferta de uma firma.

b) A curva de oferta da indústria, considerando fatores de produção com certa especialização.

c) A quantidade produzida por cada firma, o volume de produção dessa indústria e o preço de mercado.

d) O lucro de cada firma.

Resolução

a) A curva de oferta de uma firma competitiva (S_i) é o seu próprio custo marginal. Dessa forma, tem-se:

S_i = CMa

Como uma firma competitiva maximiza lucros igualando o preço de mercado a seu custo marginal no ramo crescente deste último, S_i é obtida conforme segue:

$$S_i \rightarrow P_Y = \frac{\delta C}{\delta Y} = CMa = Y$$

$$S_i \rightarrow P_Y = Y$$

b) Como os fatores de produção apresentam certa especialização, se toda a indústria aumentar a demanda por tais recursos, haverá elevação no preço destes. Dessa forma, conforme apresentado na Figura 11.10, os custos marginais de todas as firmas sofrerão elevação e a curva de oferta da indústria torna-se menos elástica a um aumento no preço do produto que ela fabrica. Em uma situação como essa, a curva de oferta da indústria não é mais o simples somatório das curvas de custo marginal das firmas. É necessário maior número de informações – não fornecidas pelo exercício – para se obter a exata curva de oferta da indústria, como a função de produção de Y e as curvas de oferta de cada fator, dados recursos especializados. Contudo, para cada nível de P_Y e dos preços dos fatores em vigor, a quantidade ofertada pela indústria é o somatório das quantidades oferecidas por cada firma competitiva.

c) Dado que existem 50 firmas no mercado e todas apresentam a mesma estrutura de custos, cada firma defronta-se com a seguinte parcela de mercado:

$$Y = \frac{1000 - 50.P_Y}{50}$$

Resolvendo a expressão anterior para P_Y, tem-se:

$P_Y = 20 - Y$

Visto que as firmas envolvidas atuam competitivamente no mercado, tem-se a seguinte solução:

$P_Y = CMa$
$20 - Y = Y$
$Y = 10$

Cada uma das 50 firmas irá produzir 10 unidades do produto considerado. Dessa forma, o volume de produção da indústria, dado P_Y e o preço dos fatores, será de 500 unidades e, portanto, o preço de mercado será dado por:

$$Y = 1000 - 50.P_Y$$

$$50.P_Y = 1000 - Y$$

$$P_Y = \frac{1000 - Y}{50} = \frac{1000 - (50.10)}{50} = 10$$

d) O lucro de cada firma é calculado conforme segue:

$LT = RT - CT$
$LT = P_Y.Y - ½ Y^2$
$LT = 10.10 - ½ (10)^2$

$LT = 100 - 50 = 50$

Cada firma aufere um lucro supernormal, indicando um estímulo para a entrada de novas empresas no setor.

11.11. Exercícios propostos

1) Comente as seguintes afirmativas:

a) No longo prazo, uma empresa competitiva sempre pode obter prejuízo zero.

b) A curva de demanda com que se defronta uma empresa competitiva é perfeitamente elástica, embora a curva de demanda de mercado seja negativamente inclinada para bens que atendam à lei da demanda.

c) O lucro econômico normal de longo prazo que uma empresa competitiva aufere indica que o capital investido não está apresentando nenhum retorno.

d) Em uma indústria de custo decrescente, a curva de oferta do setor de curto prazo é negativamente inclinada, constituindo-se em uma exceção à teoria da firma.

e) Uma indústria competitiva de iogurtes está auferindo lucro econômico zero. Se o preço de mercado cair, não haverá mais oferta no setor.

f) A igualdade $P_Y = CMa$ fornece, para uma empresa competitiva, dois níveis de produção maximizadores de lucro.

2) Responda às seguintes perguntas:

a) Qual a curva de oferta de curto prazo para uma empresa competitiva cuja equação de custo total é expressa por $CT = Y^2 + 1$? (demonstre graficamente).

b) Por que empresários racionais entram em um setor competitivo, atraídos por um lucro supernormal, se já sabem que no longo prazo este desaparecerá?

c) Dada uma função de custo total de uma empresa competitiva, expressa por $CT = 10Y^2 + 1000$, qual será a sua curva de oferta de longo prazo?

d) Como se dá o ajustamento de longo prazo de uma indústria de custo crescente, quando a demanda diminui em função de uma elevação da carga tributária? (demonstre graficamente)

3) Resolva os seguintes problemas:

a) As curvas de demanda e oferta de determinado bem no mercado estão expressas nas equações a seguir:

$$P_Y^2 = 5 - 0{,}5.Y_d$$
$$P_Y^2 = 3 + 0{,}5.Y_s$$

em que: P_Y = preço de mercado do bem Y; Y_d = quantidade demandada do bem Y; e Y_s = quantidade ofertada do bem Y.

Pede-se:

1) O preço e a quantidade de equilíbrio de mercado.

2) Determine se o equilíbrio de mercado encontrado se constitui em uma situação de curto ou longo prazo.

b) A produção de um bem Y exige apenas um insumo X. O mercado de Y é abastecido por 100 firmas competitivas idênticas, cada uma delas com função de produção $Y = X^b$, em que $0 < b < 1$. Cada firma se comporta como se o preço de X fosse constante. Entretanto, a indústria como um todo enfrenta uma curva de oferta para o insumo X com inclinação positiva [$P_x = C(100X)$, em que $C > 0$]. Com base nessas informações, encontre a curva de oferta de longo prazo da indústria.

c) A indústria de um produto homogêneo é composta por 21 empresas. A função de custo total de longo prazo para 14 dessas empresas é dada por $CT = 2Y^3$, sendo, para as sete restantes, expressa por $CT = Y^2/5$. Supondo que o preço do produto em análise seja R$ 6,00 e que o governo resolva instituir um imposto específico de R$5,00 por unidade, qual seria a oferta dessa indústria, desconsiderando a possibilidade da entrada de novas empresas nesse setor?

d) Existem duas firmas, A e B, na região que alugam serviços de tratores para empresas rurais da região. As duas firmas, apesar de oferecerem os serviços com a mesma qualidade, apresentam custos de produção diferentes. A firma A tem um custo marginal por hora para cada trator alugado de R$10 e a firma B, de R$20. A equação de demanda desse serviço é $Y = 240 - 4P_Y$, em que Y é o número de horas demandadas por dia e P_Y, o preço de uma hora de aluguel. Considerando que as duas firmas agem de forma competitiva, determine o preço de equilíbrio e a quantidade produzida por cada uma delas.

e) Em um mercado competitivo atuam duas empresas, 1 e 2, tendo curvas de custo total idênticas, expressas por $CT = ½\, Y$. A curva de demanda para o produto transacionado nesse mercado é dada por:

$$Y(P_Y) = \begin{cases} 0, P_Y > 20 \\ \dfrac{100}{P_Y}, P_Y \le 20 \end{cases}$$

Se ambas as firmas agirem competitivamente, qual será o preço de mercado e a quantidade transacionada por cada uma delas?

11.11. Referências

FERGUSON, C.E. **Microeconomia.** 17.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1993. 624 p.

MELO, L.M. Concentração industrial. In: KUPFER, D.; HASENCLEVER, L. **Economia industrial**: fundamentos teóricos e práticos no Brasil. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. 640 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia.** 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1999. 791 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia:** princípios básicos. 6.ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003. 778 p.

CAPÍTULO 12

Mercados em competição imperfeita

Adelson Martins Figueiredo[1]
Eduardo Rodrigues de Castro[2]
Jader Fernandes Cirino[3]
Maurinho Luiz dos Santos[4]

12.1. Introdução

No capítulo anterior foram discutidas as condições que caracterizam um mercado competitivo. Recordando, as principais características de competição perfeita são: os agentes são tomadores de preços; os produtos são homogêneos; existe grande número de compradores e vendedores; há livre entrada e saída de agentes no mercado; e todos os agentes têm perfeito conhecimento do setor em que atuam.

No entanto, as condições de concorrência perfeita estão presentes em poucos mercados devido ao desenvolvimento do processo produtivo e da comercialização dos produtos. As tecnologias são cada vez mais específicas e mais intensivas em capital, e os produtos apresentam certo grau de diferenciação. Combinando isso à constante busca de ganhos de escala, tem-se, conseqüentemente, uma redução do número de firmas nas indústrias, gerando imperfeições de mercado e, em alguns casos, a prática do monopólio. Havendo imperfeições em uma indústria, as firmas adquirem poder para influenciar o preço, a entrada já não é totalmente irrestrita e passam a existir assimetrias de informação.

[1] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: adelson@ufscar.br.
[2] Professor da Universidade Federal de São Carlos. e-mail: eduardo@ufscar.br
[3] Professor Adjunto da universidade Federal de Viçosa - Campus Rio Paranaíba. e-mail: jader.cirino@ufv
[4] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.

Em mercados imperfeitos, algumas das características já discutidas sofrem importantes modificações: a demanda da firma, que era o próprio preço de mercado, P, passa a ser função da quantidade ofertada, $P = f(y)$, uma vez que as firmas podem influenciar o preço de mercado. Com isso, a receita marginal (*RMa*) da firma que era igual ao preço passa a ser função também da quantidade. Em se tratando de oligopólios, a interdependência entre as firmas atuantes no mercado faz com que elas considerem o comportamento das outras ao maximizarem seus lucros.

Neste capítulo serão abordados os conceitos relacionados ao monopólio, monopsônio, oligopólio, e à concorrência monopolística. Dentre os modelos de oligopólio serão abordados os modelos de concorrência via quantidade – modelo de Cournot e Stackelberg – e concorrência via preços – Bertrand e Edgeworth –, bem como as condições básicas de formação de Cartel.

12.2. Monopólio

Na concorrência perfeita (CP), ainda que a curva de demanda do mercado seja função da quantidade, a demanda de cada firma é perfeitamente elástica, uma vez que o preço é determinado pelas condições de livre mercado. Em condições de concorrência imperfeita, como o preço varia em função da quantidade, a demanda da firma torna-se negativamente inclinada.

No monopólio existe uma única firma na indústria, não existem produtos concorrentes e a entrada de outras firmas nesta indústria é extremamente difícil. Assim, a demanda do mercado é a própria demanda da firma. Nessa situação, o monopolista pode escolher a quantidade que vai lhe propiciar o maior lucro, sendo esta inferior à quantidade ofertada em uma estrutura de CP. Dessa maneira, como o preço tem relação inversa com a quantidade ofertada, ao reduzir a quantidade produzida, o preço se eleva, cabendo exclusivamente ao monopolista determinar a situação que lhe proporciona maior lucro. A falta de substitutos próximos e a dificuldade de entrada de novos concorrentes, nesta indústria, permitem que ele faça isso sem que haja o risco de perdas de parcela de mercado.

Considerando uma função de demanda linear $P = f(y)$ representada por $P = a - bY$, a RMa pode ser definida como:

$$RT = PY$$

$$RT = (a - bY)Y$$

$$RT = aY - bY^2$$

$$RMa = a - 2bY \tag{12.1}$$

Comparando a curva de RMa com a curva de demanda, podem-se tirar algumas informações importantes. Quando $Y = 0$, ambas interceptam o eixo P em a. A inclinação da curva de demanda é $-b$, enquanto a inclinação da curva de RMa é $-2b$, ou seja, o dobro da inclinação da curva de demanda. Dessa maneira, a demanda intercepta o eixo das quantidades no ponto $Y = a/b$, enquanto a curva de receita marginal intercepta o eixo das quantidades no ponto $Y = a/2b$. As condições de maximização do lucro do monopolista são ilustradas na Figura 12.1a.

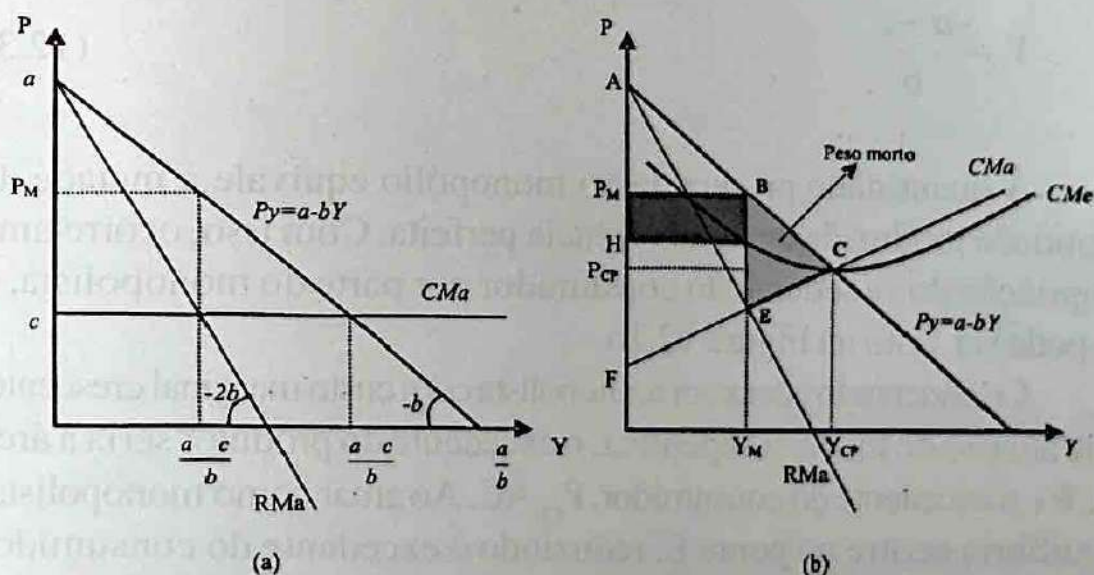



Figura 12.1 - Maximização do lucro do monopolista, excedentes do produtor e do consumidor com a prática de monopólio

Assumindo que o custo marginal é constante e igual a *c*, para maximizar o lucro, a firma iguala a receita marginal ao custo marginal (*CMa*), definindo a quantidade produzida sob condições de monopólio na Figura 12.1a em *a-c/2b*, equivalente à quantidade Y_M na Figura 12.1b. Para a quantidade, Y_M, o preço é definido na curva de demanda, sendo ele igual a P_M. Conhecendo-se a *RMa* e o *CMa*, a quantidade produzida pelo monopólio é encontrada da seguinte maneira:

$$RMa = CMa$$

$$a - 2bY = c$$

$$Y = \frac{a-c}{2b} \qquad (12.2)$$

Se a firma atuasse de forma competitiva, ela maximizaria, igualando *CMa* a Preço:

$$RMa = P = CMa$$

$$a - bY = c$$

$$Y = \frac{a-c}{b} \qquad (12.3)$$

A quantidade produzida no monopólio equivale à metade da quantidade produzida em concorrência perfeita. Com isso, ocorre uma apropriação do excedente do consumidor por parte do monopolista, o que pode ser visto na Figura 12.1b.

Considerando agora um monopolista com custo marginal crescente, se ele atuasse de forma competitiva, o excedente do produtor seria a área P_{CP}CF e o excedente do consumidor, P_{CP}AC. Ao atuar como monopolista, o equilíbrio ocorre no ponto E, reduzindo o excedente do consumidor para P_MAB e ampliando o excedente do produtor para P_MFEB. A redução da quantidade produzida leva a uma redução no excedente total equivalente à área BEC, que é chamado de Peso Morto. Do excedente perdido, a área BDC mostra a perda de excedente do consumidor, enquanto a área

DEC representa a perda de excedente por parte do monopolista, sendo esta, obviamente, subtraída do ganho de excedente obtido com a prática do monopólio, ao se avaliar o ganho líquido do monopolista. Dado o custo médio da firma, o lucro do monopolista passa a ser P_MBIH.

Uma das principais conseqüências da prática do monopólio é a elevação do preço de mercado em relação à concorrência perfeita. A avaliação da margem acrescida ao preço de concorrência é feita através do grau de Lerner ou *Mark-up*. A expressão do *Mark-up* é derivada da seguinte forma:

$$RT = PY$$

$$\frac{\partial RT}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y}Y + P\frac{\partial Y}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y}Y + P$$

$$RMa = P + \frac{\partial P}{\partial Y}Y$$

Colocando P em evidência:

$$RMa = P\left(1 + \frac{\partial P}{\partial Y}\frac{Y}{P}\right) \therefore$$

Sendo $\varepsilon_D = \frac{\partial Y}{\partial P}\frac{P}{Y}$

$$RMa = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_D}\right) \quad \text{ou} \quad RMa = P\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_D|}\right) \qquad (12.4)$$

Ao maximizar seu lucro, o monopolista iguala $RMa = CMa$. Assim:

$$CMa = P + \frac{P}{\varepsilon_D} \therefore$$

$$L = \frac{P - CMa}{P} = -\frac{1}{\varepsilon_D} \qquad (12.5)$$

em que L representa o grau de Lerner ou *Mark-up*, que é a margem cobrada acima do custo marginal[5], o qual também pode ser expresso como o inverso da elasticidade da demanda. Assim, pode-se concluir que, quanto mais inelástica for a curva de demanda, maior o poder de monopólio e maior a margem de preço que poderá ser praticada acima do *CMa*. É preciso esclarecer que menor elasticidade da curva de demanda é um conceito relativo, ou seja, é tratado aqui como a comparação entre curvas de demanda, permitindo retratar o quanto mais inelástica é uma curva de demanda em relação a uma outra, pois o monopolista maximizador de lucros sempre atua na fase elástica da curva de demanda, como pode ser visto na Figura 12.2.

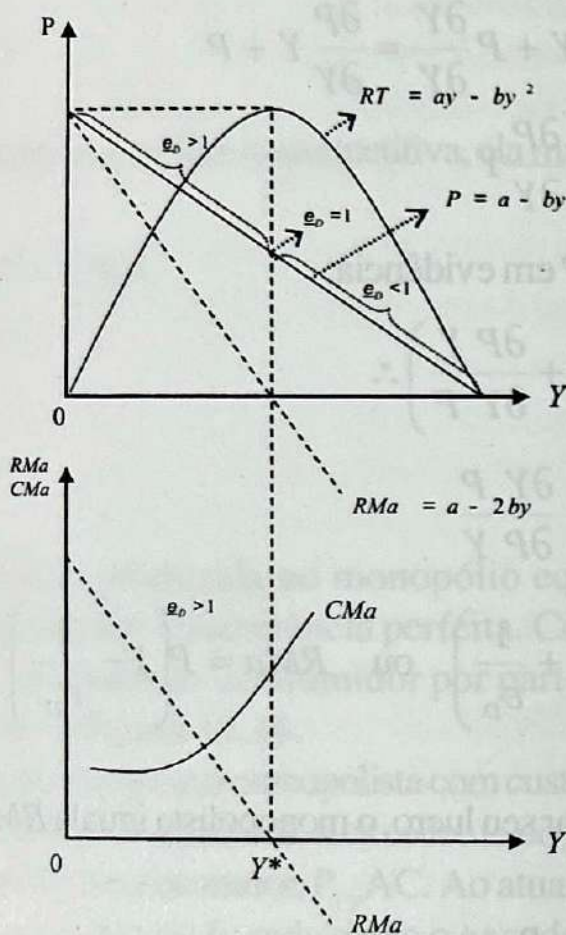



Figura 12.2 - Receita total, receita marginal e elasticidade da demanda

[5] Lembre-se de que em concorrência perfeita, ao maximizarem o lucro, as firmas igualam o custo marginal ao preço (CMa=P). Dessa maneira, a margem cobrada acima do custo marginal é exatamente igual à margem cobrada acima do preço de competição.

Na Figura 12.2, pode-se perceber com facilidade que qualquer ponto sobre a faixa positiva da receita marginal corresponde a uma elasticidade maior que a unidade. Assim, independentemente do formato da curva de custo marginal, o monopolista atuará na faixa elástica da curva de demanda, uma vez que para maximizar seu lucro ele deve igualar sua *RMa* ao seu *CMa*.

12.2.1. Discriminação de preços

Ao determinar a quantidade ofertada, o monopolista determina o preço de mercado, permitindo a ele que pratique preços diferentes dentro do mesmo mercado ou entre mercados diferentes. Essa prática é chamada de discriminação de preços. A discriminação de preços pode ser de primeiro, segundo ou terceiro grau.

A discriminação de preços de primeiro grau ocorre quando o monopolista consegue praticar preços diferentes dentro de um mesmo mercado, cobrando de cada consumidor o seu preço de reserva (P_R), que é o preço máximo que cada consumidor estaria disposto a pagar por um determinado produto (PINDYCK; RUBINFELD, 1999). Essa é uma situação difícil de ocorrer, contudo, alguns exemplos são comumente citados, como a realização de leilões e casos de profissionais liberais que são únicos em cidades pequenas. Nesse último caso, por exemplo, se o profissional liberal é o único de sua cidade e conhece bem cada cliente, ele pode cobrar o preço que cada consumidor estaria disposto a pagar pelo seu serviço. Nessa situação, cada consumidor teria sua curva de demanda individual, em que o monopolista cobraria o preço máximo, P_R. Considerando o mercado como um todo, o monopolista se apropriaria de todo o excedente do consumidor. Apesar disso, segundo Varian (1999), essa situação seria eficiente de Pareto[6], porque para melhorar a situação do consumidor tem que piorar a do monopolista. Na discriminação de preços de primeiro grau não ocorre o peso morto, uma vez que o

[6] Observe que, apesar de ser *eficiente de Pareto* e de não haver *peso morto*, não é possível afirmar que essa prática não seja prejudicial quando se consideram as possibilidades de concentração da renda e possíveis desigualdades sociais.

monopolista cobra preços maiores que seu custo marginal, mas menores que o mais alto preço de reserva do mercado.

A discriminação de preços de segundo grau ocorre quando o monopolista cobra preços diferenciados, de acordo com a quantidade consumida. É o caso dos monopólios do setor elétrico, por exemplo, em que a partir de determinada quantidade consumida são cobradas tarifas maiores.

A discriminação de preços de terceiro grau refere-se à cobrança de preços diferentes em mercados diferentes. Considerando que cada mercado tem uma demanda específica, com elasticidades diferentes, é possível que o monopolista cobre preços diferentes em cada mercado, conforme Figura 12.3.

Nessa situação, a receita total do monopolista será dada por:

$$RT = RT_1 + RT_2 ,$$

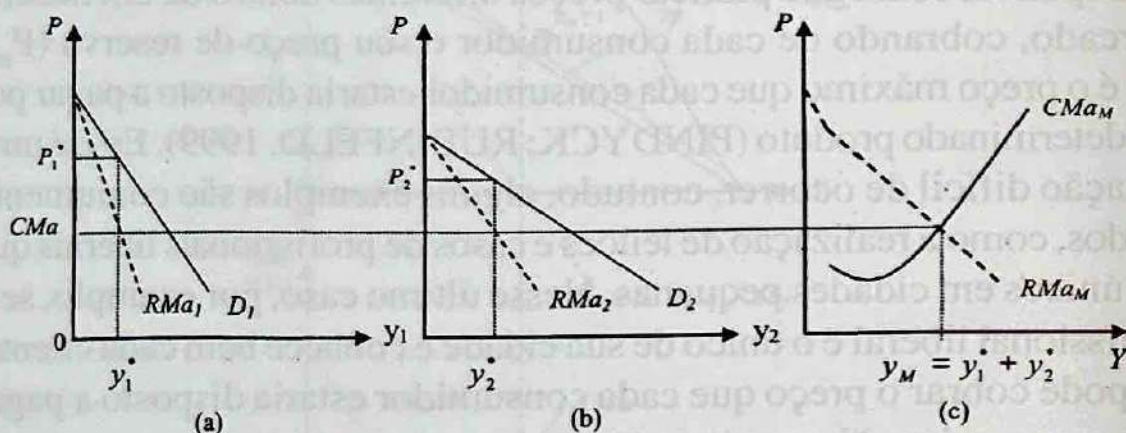



Figura 12.3 - Discriminação de preços de terceiro grau em mercados com elasticidades de demanda diferentes e o lucro da firma:

$$\pi = RT - CT_M$$

$$\pi = RT_1 + RT_2 - CT_M$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y_1} = RMa_1 - CMa_M = 0 \therefore RMa_1 = CMa_M$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y_2} = RMa_2 - CMa_M = 0 \therefore RMa_2 = CMa_M$$

Assim:

$$RMa_1 = RMa_2 = CMa_M$$

ou seja:

$$P_1\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D1}|}\right) = P_2\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D2}|}\right) \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D2}|}\right) \Big/ \left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D1}|}\right) \quad (12.6)$$

Da equação (12.6) conclui-se que: se as elasticidades-preço da demanda forem iguais, os preços cobrados também serão iguais; caso contrário, considerando que em ambos os mercados a firma estará atuando na fase elástica da curva, se:

$$|\varepsilon_{D1}| < |\varepsilon_{D2}| \rightarrow \left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D1}|}\right) < \left(1-\frac{1}{|\varepsilon_{D2}|}\right) \quad (12.7)$$

Logo, para que se atenda à igualdade na equação (12.6), no mercado que tiver a menor elasticidade-preço da demanda será cobrado o maior preço, ou seja, $P_1 > P_2$, como apresentado na Figura 12.3.

12.2.1. Monopólios naturais

Na Figura 12.1b representou-se uma situação em que o monopolista teria lucro zero se produzisse em condições de concorrência perfeita. No entanto, podem existir situações em que os ganhos de escala sejam tão expressivos que os custos sejam decrescentes. Nessa situação, o custo marginal estará sempre abaixo do custo médio e, com isso, ao produzir em condições de concorrência perfeita, a firma teria prejuízo. Assim, só há interesse se for explorado na forma de monopólio. É o caso de monopólios naturais, como a produção de energia, tratamento de água, serviços de correio, etc. No entanto, como são serviços essenciais à população, se forem explorados na condição de monopólio, a quantidade ofertada será menor do que a necessária, deixando parte da população sem ser atendida. Caso haja interesse de um atendimento mais amplo, cabe ao governo explorar, regulamentar ou então subsidiar a produção,

para que maior número de pessoas seja atendido. Esta situação está representada na Figura 12.4.

Ao produzir a quantidade Y_{CP}, em condições de CP, o custo médio é maior que o preço e a firma tem prejuízo igual à área hachurada na Figura 12.4. Nessas condições, não é atrativo investir na atividade. Ao ser produzido Y_M, a firma passa a ter lucro, mas reduz-se a quantidade produzida e, conseqüentemente, o número de consumidores atendidos. O governo pode então regulamentar a atividade, exigindo que a firma atue no ponto (E), em que o custo médio é igual ao preço regulado pelo governo (P_{RG}), situação na qual a empresa tem lucro normal. O governo pode ainda subsidiar a produção, caso queira atender a um maior número de consumidores, ou, ainda, explorar a atividade.

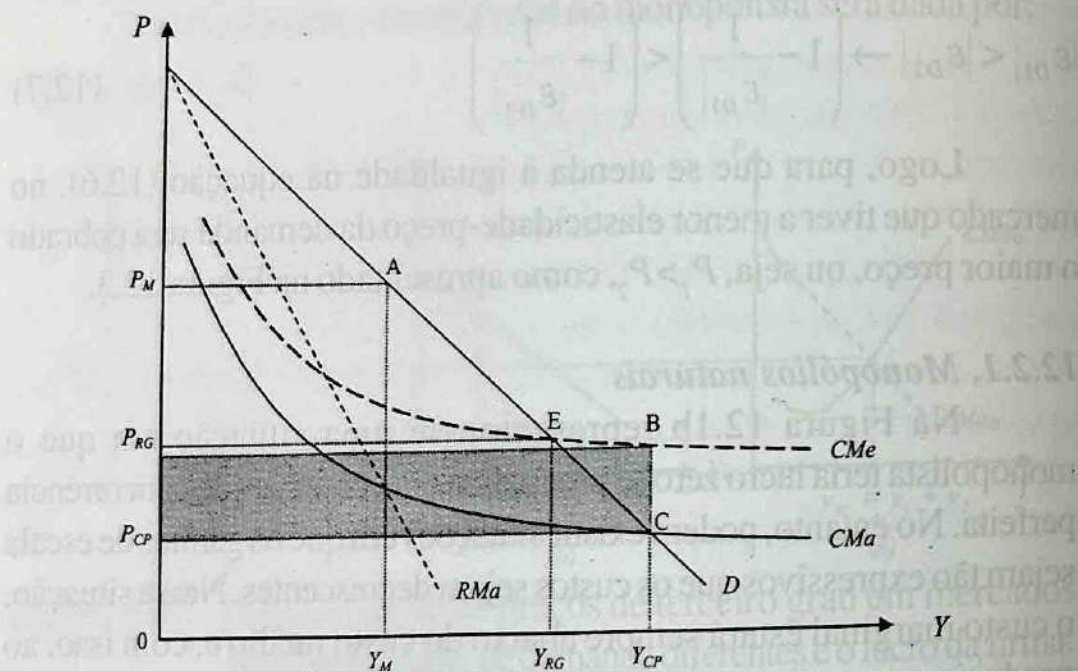



Figura 12.4 - Monopólios naturais

12.3. Monopsônio

O monopólio foi definido como uma estrutura de mercado em que a produção de um bem é feita por uma única firma. Essa situação também pode ocorrer pelo lado de quem compra, sendo chamado de monopsônio. É uma situação similar à do monopólio, porém com apenas uma única firma compradora de insumos ou fatores.

Como foi visto em condições de CP, o preço, que é definido como a própria curva de demanda de cada firma, é predeterminado pelas condições de livre mercado e representa também a receita marginal. No monopólio, a demanda da firma é negativamente inclinada, de modo que sua receita marginal varia com a quantidade produzida, sendo o preço determinado na curva de demanda.

Considerando que a firma que produz também é compradora de insumos, essas mesmas analogias feitas entre a CP e o monopólio podem ser feitas entre a CP e o monopsônio. Em CP, a curva de oferta agregada do produto é o somatório das curvas de custo marginal das firmas que estão ofertando o produto. Para quem compra em regime de CP o preço é o mesmo, independentemente da quantidade comprada, de maneira que, para cada unidade adquirida, o preço representa o próprio custo marginal (CMa). Entretanto, a firma monopsonista, na condição de única compradora do mercado, pode influenciar os preços dos insumos, de forma que o seu CMa varia em função da quantidade adquirida.

De acordo com os pressupostos da teoria da produção, exposta no capítulo 7, define-se que a demanda derivada de um fator é igual à curva do Valor do Produto Marginal *(VPMa)* no processo produtivo do bem Y. Além disso, a firma maximiza o lucro, igualando o *VPMa* ao custo marginal, que é igual ao próprio preço do fator, P_F. No monopsônio, como mencionado, o custo marginal de X (CMa_x) não é igual ao preço do fator, e sim uma função da quantidade comprada de insumos. Assim, para maximizar o lucro da firma monopsonista, deve-se considerar essa informação adicional, de maneira a captar as vantagens do monopsonista na determinação dos preços dos insumos.

Com base em Varian (1999), admitindo que a firma monopsonista produza um produto Y, utilizando apenas um fator X, que sua tecnologia de produção possa ser representada por uma função de produção $Y = f(X)$, que *Py* seja o preço do produto Y e, além disso, que P_F seja uma função da quantidade adquirida do insumo X, isto é, uma curva de oferta inversa, denotada por $P_F = (P(X))$, indicando que maiores quantidades de insumos sejam adquiridas apenas a preços maiores, ou

seja, $(P(X))$ é uma função crescente da quantidade demandada de fator, é possível representar o problema de maximização de lucros do monopsônio da seguinte maneira:

$$Max\ \pi = Y(X).Py - P(X).X \tag{12.8}$$

Considerando que o mercado do produto Y é de CP, é possível demonstrar que a condição de maximização de lucros pode ser denotada por:

$$\frac{d\pi}{dX} = \frac{dY(X)}{dX}Py - \frac{dP(X)}{dX}X - P(X) = 0 \Rightarrow \frac{dY(X)}{dX}Py = P_F + \frac{dP_F}{dX}X \therefore \tag{12.9}$$

$$VPMa = CMa_x$$

A equação (12.9) expressa que o aumento da demanda de insumos em uma unidade onera os custos do monopsônio em $\left(\frac{dP_F}{dX}\right)X$. Assim, a idéia é que quantidades menores de insumos são adquiridas a preços menores, sendo vantajoso para o monopsônio reduzir a quantidade demandada, visando o pagamento de preços menores pelos insumos. Essa prática, conseqüentemente, eleva os lucros da empresa monopsonista e reduz os lucros dos produtores de insumos[7].

O CMa_x pode ser escrito em função da elasticidade-preço da oferta do fator X (η), considerando $P_F = (P(X))$ como a oferta inversa do fator X, de forma que, sendo:

[7] Outra maneira de determinar a quantidade a ser adquirida do insumo de forma a maximizar os lucros do monopsônio é apresentada por Pindyck e Rubinfeld (1999). Segundo esses autores, a quantidade de insumos ótima a ser adquirida é aquela em que o valor marginal da última unidade adquirida se iguala à despesa marginal correspondente a tal unidade.

$$CT = P(X)X$$

$$\frac{\partial CT}{\partial X} = \frac{\partial P(X)}{\partial X} X + P(X)\frac{\partial X}{\partial X} = P(X) + \frac{\partial P(X)}{\partial X} X$$

Colocando $P_F = P(X)$ em evidência:

$$CMa_x = P_F\left(1 + \frac{\partial P_F}{\partial X}\frac{X}{P_F}\right)$$

$$CMa_x = P_F\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \qquad (12.10)$$

As condições de maximização de lucros em uma estrutura de monopsônio são apresentadas na Figura 12.5. Percebe-se que o monopsonista iguala o *VPMa* ao CMa_x, determinando a quantidade comprada, em X^*_M. Para esta quantidade, o preço pago pelo fator é definido na curva de oferta (S), de forma que os produtores recebem um preço P^*_M, menor que o preço praticado em regime de CP, que é determinado igualando-se a curva de oferta (preço) à curva do *VPMa*.

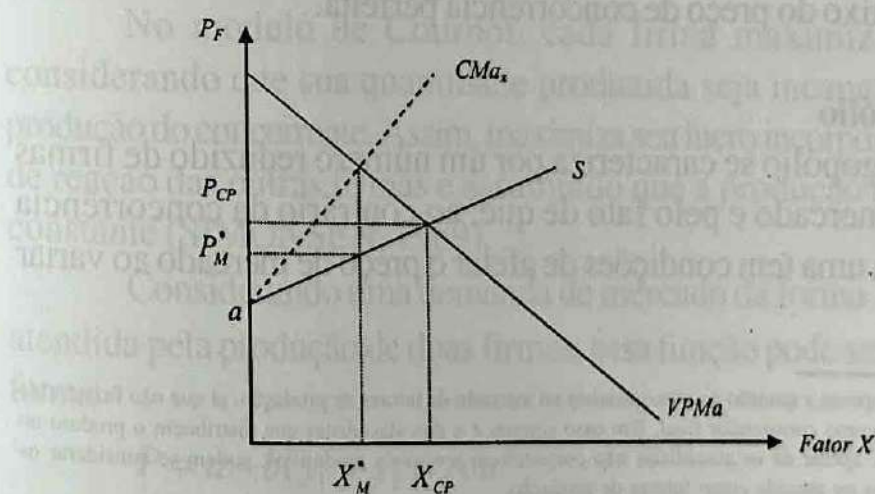



Figura 12.5 - Equilíbrio de mercado sob condições de monopsônio

Outras analogias entre CMa_x e a curva de oferta do fator podem ser feitas. Para isso, considere que a função de oferta inversa do fator[8] é uma função linear, como apresentada na Figura 12.5, do tipo $P_F = a + bX$; desse modo, o custo total de adquirir a mercadoria seria[9]:

$$CT = P_F X$$
$$CT = (a + bX)X$$
$$CT = aX + bX^2$$
$$CMa = a + 2bX \tag{12.11}$$

Assim, de forma similar ao monopólio, pode-se comparar a curva de custo marginal com a curva de preço, que é a própria curva de oferta das firmas que colocam o insumo no mercado (lembrando que X é um insumo da firma monopsonista, mas um produto para aquelas firmas que o produzem). A inclinação da curva de oferta é igual a b, enquanto a inclinação da curva de custo marginal é igual ao dobro da inclinação da curva de oferta, ou seja, $2b$. Quando X é igual a zero, ambas interceptam o eixo P em a. Com isso, a curva de custo marginal terá o dobro da inclinação da curva de oferta, partindo do mesmo ponto no eixo P. Conclui-se que, sempre que a inclinação do CMa_x for maior que a inclinação da curva de oferta do fator, haverá a possibilidade de o monopsonista praticar um preço abaixo do preço de concorrência perfeita.

12.4. Oligopólio

O oligopólio se caracteriza por um número reduzido de firmas atuantes no mercado e pelo fato de que, ao contrário da concorrência perfeita, cada uma tem condições de afetar o preço de mercado ao variar

[8] Considera-se aqui apenas a questão do monopsonista no mercado de fatores de produção, já que não faz sentido um monopsonista como consumidor final. Um caso comum é o dos atacadistas que distribuem o produto no varejo; nesse caso, apesar de os atacadistas não constituírem processos produtivos, podem-se considerar os produtos adquiridos no atacado como fatores de produção.

[9] Esta função representa uma curva de oferta elástica, em que a curva intercepta primeiro o eixo dos preços. Se fosse uma função de oferta de insumos inelástica, teria a forma $P_F = -a + bX$.

sua produção. Por outro lado, nenhuma firma é grande o suficiente para atuar como se fosse um monopolista. Uma das principais características do oligopólio é o reconhecimento da interdependência entre as firmas, isto é, a ação de uma firma vai influenciar o preço ou a parcela de mercado das outras, fazendo com que cada uma leve em conta as ações e reações das outras empresas (MARTIN, 1993).

O oligopólio pode ser puro ou diferenciado. O oligopólio puro ocorre quando o produto da indústria é homogêneo, e o oligopólio diferenciado, quando os produtos de cada firma da indústria apresentam certo grau de diferenciação e são substitutos próximos entre si. Neste caso, cada firma possui sua própria curva de demanda, porém o grau de diferenciação dos produtos não permite que cada uma atue como monopolista. No oligopólio puro, que será tratado neste capítulo, a variável estratégica pode ser a quantidade ou o preço. Quando a variável estratégica é a quantidade, cada firma conhece a estrutura de custos das outras e define uma curva de reação levando em conta o que a outra produz. A quantidade produzida em conjunto pelas firmas determinará o preço de mercado. Serão abordados os modelos de Cournot e Stackelberg, considerando um duopólio. Os modelos cuja variável estratégica é o preço e que serão abordados aqui são os de Bertrand, Edgeworth e Cartel.

12.4.1. O modelo de Cournot

No modelo de Cournot, cada firma maximiza seu lucro considerando que sua quantidade produzida seja incapaz de afetar a produção do concorrente. Assim, maximiza seu lucro incorporando a curva de reação das outras firmas e assumindo que a produção da outra seja constante (SIMONSEN, 1969).

Considerando uma demanda de mercado da forma $P = a - bY$, atendida pela produção de duas firmas, essa função pode ser reescrita na forma:

$$P = a - b(y_1 + y_2) \therefore ou$$

$$P = a - by_1 - by_2 \qquad (12.12)$$

A função de lucro da firma 1 seria:

$$\pi_1 = Py_1 - CT_1$$
$$\pi_1 = (a - by_1 - by_2)y_1 - CT_1$$
$$\pi_1 = ay_1 - by_1^2 - by_1y_2 - CT_1 \qquad (12.13)$$

Assumindo custos marginais constantes e iguais entre as firmas, ao maximizar a função de lucro, é possível obter a função de reação da Firma 1:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \qquad (12.14)$$

Por analogia, a curva de reação da Firma 2 seria:

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \qquad (12.15)$$

Substituindo (12.15) em (12.14), obtém-se a quantidade produzida pela Firma 1:

$$y_1 = \frac{a-c}{3b} \qquad (12.16)$$

e substituindo (12.16) em (12.15), obtém-se a quantidade produzida da Firma 2:

$$y_2 = \frac{a-c}{3b} \qquad (12.17)$$

Somando-se as quantidades produzidas individualmente, a quantidade total produzida seria:

$$Y = \frac{2(a-c)}{3b} \qquad (12.18)$$

Comparando a expressão (12.18) com a (12.3), percebe-se que a quantidade produzida pelo duopólio de Cournot equivale a dois terços da quantidade que seria produzida em concorrência perfeita, sendo,

portanto, uma quantidade maior do que a produzida pelo modelo de monopólio, que é igual à metade do que é produzido em CP. À medida que aumenta o número de firmas do oligopólio, aumenta-se a quantidade produzida, tendendo para a quantidade de concorrência perfeita quando o número de firmas for tal que a produção individual de qualquer firma não afete o mercado (MARTIN, 1993, p. 123).

As curvas de reação das firmas são representadas na Figura 12.6.

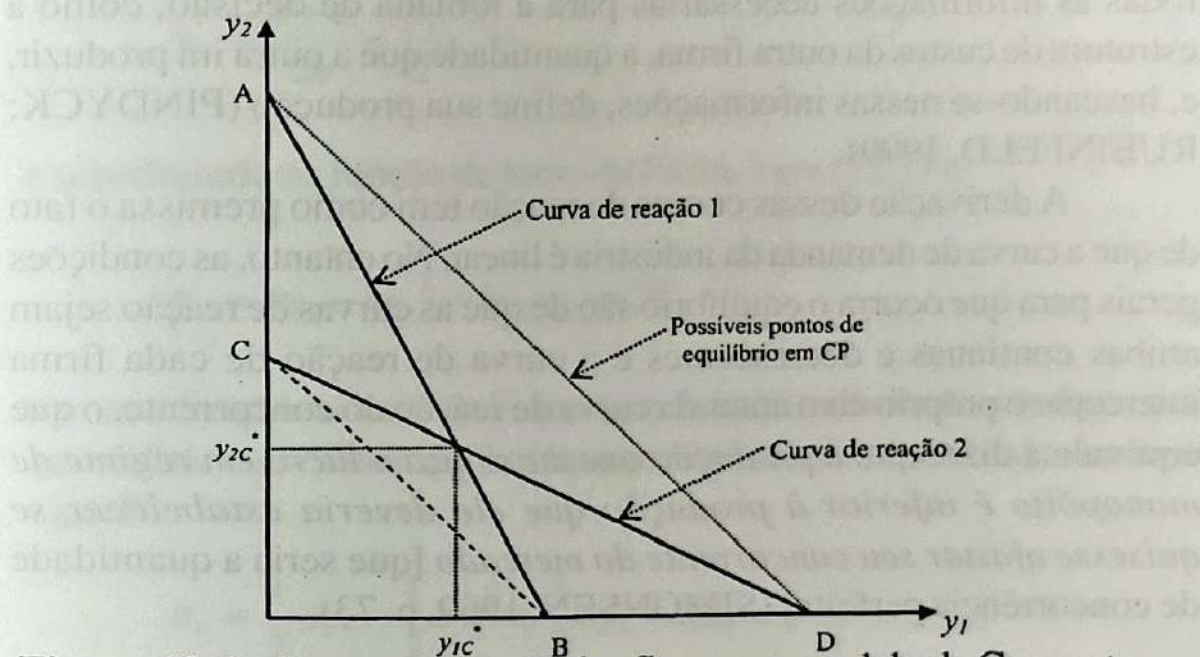



Figura 12.6 - Curvas de reação das firmas no modelo de Cournot

Analisando as curvas de reação de cada firma, torna-se claro o entendimento das pressuposições do modelo. Pela curva de reação da Firma 1, se a Firma 2 produz sozinha a quantidade de concorrência perfeita (ponto A da Figura 12.6), a Firma 1 não produz nada. Por outro lado, se a Firma 2 não produz, a Firma 1 produz a quantidade de monopólio (ponto B). Ao produzir a quantidade B em regime de monopólio, permanece uma demanda residual, que é atendida pela Firma 2. Sabendo disso, a Firma 1 define uma quantidade menor que a quantidade de monopólio (y_{1C}^*), assumindo uma determinada quantidade que a Firma 2 estará produzindo.

A Firma 2, por sua vez, terá o mesmo comportamento, e o equilíbrio

ocorrerá no cruzamento das duas curvas. De acordo com Simonsen (1969), apesar de haver o equilíbrio, ele é instável, porque cada monopolista assume que as outras firmas mantêm sua produção constante e, na verdade, elas também têm uma função de reação. Basta que uma delas mude sua função de reação para que as outras também alterem as suas. O equilíbrio do modelo de Cournot decorre do fato de que cada firma decide o quanto produzir simultaneamente; para isso, as firmas têm todas as informações necessárias para a tomada de decisão, como a estrutura de custos da outra firma, a quantidade que a outra irá produzir, e, baseando-se nessas informações, define sua produção (PINDYCK; RUBINFELD, 1999).

A derivação dessas curvas de reação tem como premissa o fato de que a curva de demanda da indústria é linear. No entanto, as condições gerais para que ocorra o equilíbrio são de que as curvas de reação sejam ambas contínuas e decrescentes e a curva de reação de cada firma intercepte o próprio eixo antes da curva de reação do concorrente, o que equivale a dizer *que a produção que maximiza o lucro em regime de monopólio é inferior à produção que ele deveria estabelecer se quisesse afastar seu concorrente do mercado* [que seria a quantidade de concorrência perfeita] (SIMONSEN, 1969, p. 73).

12.4.2. O modelo de Stackelberg

Enquanto no modelo de duopólio de Cournot ambas as firmas devem tomar a decisão de produzir simultaneamente, no modelo de Stackelberg uma das firmas assume a posição de liderança, definindo primeiro sua quantidade produzida. A outra firma, por sua vez, toma a produção da líder como dada ou predefinida para depois definir a sua quantidade produzida, através de sua curva de reação. Para Simonsen (1969), a liderança por parte de uma das firmas resolve o problema da instabilidade do equilíbrio, contida, segundo ele, no modelo de Cournot, uma vez que agora as estimativas de produção são corretas.

A formulação do problema de maximização é similar ao modelo de Cournot. O preço é definido em função da quantidade produzida das

duas firmas, que definem sua função de lucro. A líder, no entanto, estima a curva de reação da outra, incorporando-a na função de lucro, e, ao maximizar, encontrará uma quantidade produzida maior do que se atuasse conforme as pressuposições do modelo de Cournot.

Considerando a função de reação da Firma 2 derivada no modelo de Cournot em (12.15):

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

e substituindo na função de lucro da Firma 1 em (12.13):

$$\pi_1 = ay_1 - by_1^{\,2} - by_1 y_2 - CT_1$$

tem-se a função de lucro da Firma 1 em função exclusivamente da própria quantidade e do custo marginal (que continua sendo considerado constante e igual):

$$\pi_1 = \frac{1}{2}ay_1 - \frac{1}{2}by_1^{\,2} + \frac{1}{2}cy_1 - CT_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = \frac{1}{2}a - by_1 + \frac{1}{2}c - c = 0$$

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \tag{12.19}$$

que equivale à quantidade produzida no monopólio. A Firma 2 toma a quantidade da Firma 1 como constante e define a quantidade produzida através da sua curva de reação, obtendo:

$$y_2 = \frac{a-c}{4b} \tag{12.20}$$

sendo esta quantidade menor do que a quantidade produzida se ambas

determinassem sua produção simultaneamente.

A quantidade total, no entanto, seria maior do que aquela produzida segundo as condições do modelo de Cournot:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{3(a-c)}{4b} \tag{12.21}$$

Em relação às condições de Cournot, o preço seria menor, já que a quantidade produzida pelas duas firmas seria maior. O aumento da quantidade individual produzida pela Firma 1 mais que compensa a redução do preço, de modo que ela aumentará o lucro – será que isso sempre ocorrerá? Na verdade, isso ocorre devido à pressuposição de que os custos marginais são constantes e iguais para ambas as firmas; logo, se os custos marginais forem diferentes, têm-se diversas outras possibilidades. Derivações do modelo de Cournot e Stackelberg para custos marginais diferentes são feitas no Apêndice. Por outro lado, a Firma 2 tem sua quantidade reduzida e o preço reduzido, fazendo com que seus lucros sejam menores em relação ao modelo de Cournot.

Sendo assim, por que a Firma 2 não atua como líder e deixa a Firma 1 como seguidora? Neste exemplo, por uma questão de simplificação, consideraram-se duas firmas idênticas, de modo que qualquer uma delas teria condições de atuar como líder. Na prática, o que é mais comum, em algumas indústrias, é uma firma agir como líder, seja por ser uma firma que historicamente dominou o mercado, seja porque é mais dinâmica em relação às demais ou por qualquer outro motivo. Assim, esta firma normalmente domina uma fatia maior do mercado e lidera o lançamento de produtos, de modo que as outras, oportunamente, se estabelecem como seguidoras. Para esta situação, o modelo de Stackelberg é mais apropriado. Numa indústria em que as firmas são mais homogêneas e que nenhuma firma apresente condições de liderança, o modelo de Cournot é mais apropriado (PINDYCK; RUBINFELD, 1999).

12.4.3. O modelo de Bertrand

O modelo de Bertrand surgiu em 1883, e o seu princípio básico é que o preço é a variável estratégica. Ao contrário do modelo de Cournot, cada duopolista supõe que o outro mantém seu preço constante. Dessa forma, estando os duopolistas em equilíbrio, aquele que praticar pequenas reduções no seu preço conquistará parcela de mercado do concorrente e aumentará seus lucros. No entanto, o outro duopolista, percebendo a estratégia do concorrente, fará o mesmo e iniciará então uma concorrência de preços, em que cada firma reduz seu preço até um limite igual ao seu custo marginal. Assumindo que ambas possuem o mesmo custo marginal, o modelo de Bertrand pode ser representado graficamente, como na Figura 12.7.

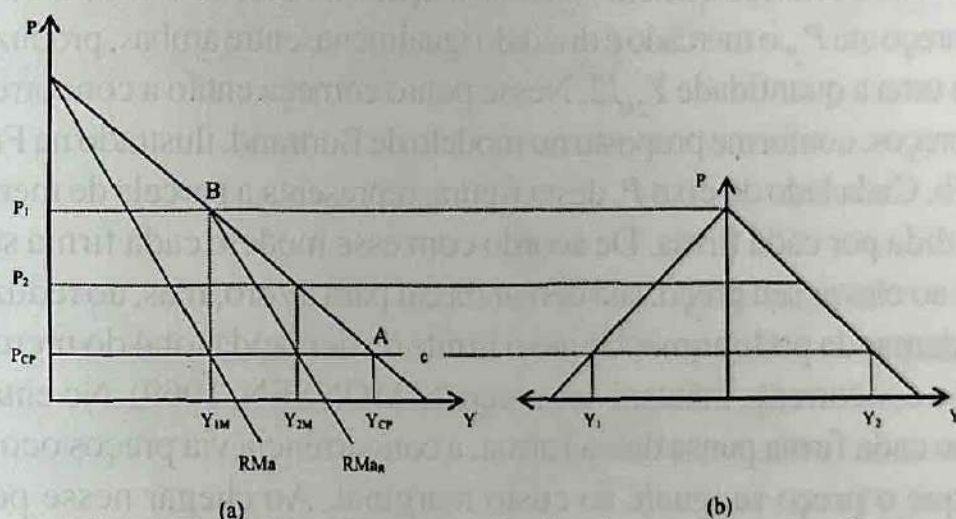



Figura 12.7 - Duopólio sob concorrência via preços, segundo o modelo de Bertrand

Considerando inicialmente a Figura 12.7a, em que as firmas possuem custos marginais constantes e iguais, o equilíbrio em concorrência perfeita seria no ponto A, em que o somatório das curvas de custos marginais (que é a curva de oferta do mercado) cortaria a curva de demanda ($P = CMa$). Nessa situação, cada firma produziria a metade da quantidade ofertada: Y_1 e Y_2. Por outro lado, o ponto B seria o equilíbrio caso uma delas atuasse como monopolista, igualando seu custo marginal à receita marginal[10].

[10] A quantidade de monopólio poderia ser produzida pelas duas firmas em conluio – situação que será tratada adiante.

Para fins de ilustração, considere inicialmente que a Firma 1 atue como monopolista nesse mercado, produzindo a quantidade Y_{1M}. Atuando como monopolista, haverá uma demanda residual não atendida, permitindo a entrada de outra firma nesse mercado. Considerando que a Firma 2 atenda à demanda residual atuando também como monopolista, a quantidade total produzida pelas firmas é Y_{2M} [Y_{1M} da Firma 1 + (Y_{2M}-Y_{1M}) da Firma 2)] e o preço cairia para P_2. Ao praticar o preço P_2, a Firma 2 conquistaria mercado da Firma 1, de modo que esta é obrigada a reduzir seu preço para P_2, tendo como custo de não fazê-lo a perda completa de sua parcela de mercado, uma vez que, nesse nível, a Firma 2 teria capacidade de atender a toda a demanda Y_{2M}.

Assumindo que em resposta à ação da Firma 2, a Firma 1 reduz seu preço até P_2, o mercado é dividido igualmente entre ambas, produzindo cada uma a quantidade $Y_{2M}/2$. Nesse ponto começa então a concorrência via preços, conforme proposto no modelo de Bertrand, ilustrado na Figura 12.7b. Cada lado do eixo P, desta figura, representa a parcela de mercado atendida por cada firma. De acordo com esse modelo cada firma supõe que: ao elevar seu preço, sua demanda cai para a zero, mas, ao reduzi-lo, sua demanda pode aumentar até o limite da demanda total do mercado, pois o concorrente manterá seu preço (SIMONSEN, 1969). No entanto, como cada firma pensa dessa forma, a concorrência via preços ocorrerá até que o preço se iguale ao custo marginal. Ao chegar nesse ponto, nenhuma das firmas tem interesse de alterar seu preço, visto que, se uma delas aumentar o preço e a outra não a acompanhar, a firma que elevou o preço perderá toda a sua parcela de mercado. Assim, o equilíbrio nesse modelo é estável no ponto $P=CMa$, assumindo-se que as duas firmas têm custos marginais constantes e iguais.

O que aconteceria se ambas tivessem custos marginais constantes, mas diferentes? Supondo $c_1>c_2$, a concorrência via preços aconteceria até que o preço fosse igual ao custo marginal c_1. Chegando nesse ponto, se a Firma 2 reduzir seu preço abaixo de c_1 ficará sozinha no mercado,

pois a Firma 1 não terá condições de acompanhá-la. Ao eliminar a Firma 1, a Firma 2 terá então de escolher entre manter um preço baixo, que garanta sua exclusividade no mercado, ou a prática de monopólio, que por sua vez poderá atrair outras empresas.

12.4.4. O modelo de Edgeworth

Este modelo é semelhante ao de Bertrand, ocorrendo também concorrência via preços, porém não existe equilíbrio. Para ilustrar o modelo, considere duas firmas com custos marginais crescentes e iguais, conforme ilustrado na Figura 8(a). Nessa situação, a curva de oferta de mercado será o somatório das curvas de custo marginal de cada firma. O equilíbrio em concorrência perfeita ocorrerá quando $P = \sum CMa$, com cada firma produzindo a metade da quantidade ofertada.

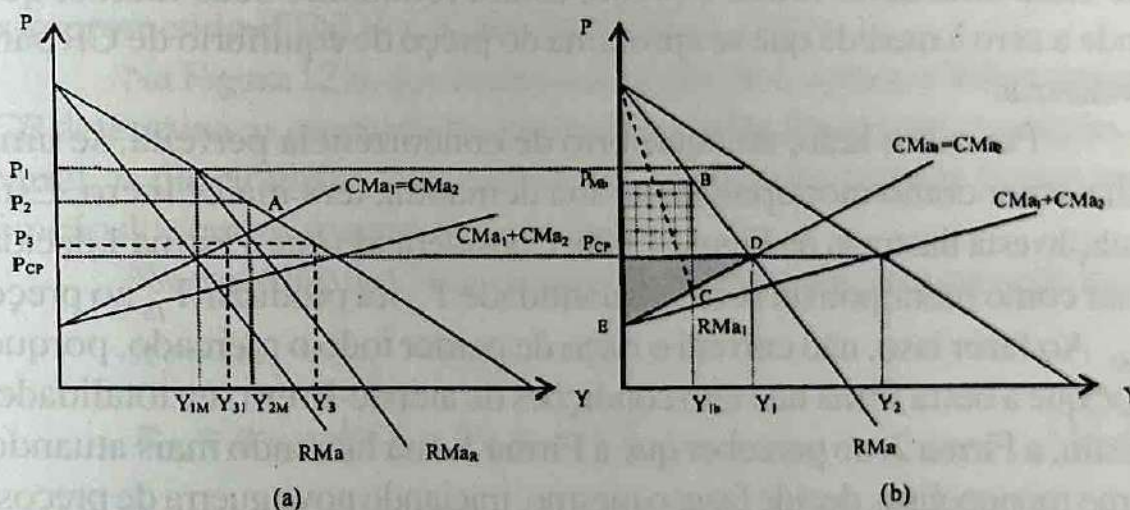



Figura 12.8 - Modelo de Edgeworth

Da mesma forma que no modelo de Bertrand, suponha inicialmente que a Firma 1 atue como monopolista produzindo Y_{1M}, ao preço P_1, deixando uma demanda residual não atendida. A Firma 2, ao entrar no mercado, atuando também como monopolista na demanda residual, irá igualar seu custo marginal à receita marginal (RMa_R), produzindo Y_{2M} ao preço P_2. Ao praticar um preço menor, a Firma 2 conquista parcela de

mercado da Firma 1, que terá que diminuir seu preço, já que, nesse nível de preço, a Firma 2 é capaz de atender a todo o mercado. Inicia-se então a concorrência via preços, até que atinja o ponto A.

A diferença deste modelo para o de Bertrand está no fato de que a concorrência via preços não se encerra no ponto em que cada firma produz sob condições de concorrência perfeita, ou seja, no ponto em que cada firma individual iguala $CMa = P$. Isso significa que, por ter custos marginais crescentes, mesmo estando no ponto A, qualquer uma das firmas pode reduzir seu preço, igualando-o ao seu custo marginal. A firma que fizer isso ficará com uma parcela de mercado maior que a de sua concorrente. Por exemplo, suponha que a Firma 1 reduza o preço para P_3. Igualando-o ao seu custo marginal, produzirá Y_{31}, restando para a concorrente a quantidade Y_3-Y_{31}. A concorrência segue na direção do equilíbrio de concorrência perfeita para a indústria. Contudo, à medida que cada uma delas reduz o preço, estará reduzindo seus lucros, que tende a zero à medida que se aproxima do preço de equilíbrio de CP para a indústria.

Por outro lado, no equilíbrio de concorrência perfeita, se uma delas atuar como monopolista na sua demanda, terá maior lucro. Esta situação está ilustrada na Figura 12.8b. Considerando que a Firma 1 decida atuar como monopolista sobre a quantidade Y_1, irá produzir Y_{1b} ao preço P_{Mb}. Ao fazer isso, não correrá o risco de perder todo o mercado, porque sabe que a outra firma não tem condições de atendê-lo em sua totalidade. Assim, a Firma 2, ao perceber que a Firma 1 está lucrando mais atuando como monopolista, decide fazer o mesmo, iniciando nova guerra de preços. Os preços oscilarão entre o preço de concorrência perfeita, P_{CP}, para a indústria e o preço em que uma delas atuaria como monopolista, P_{Mb} (SIMONSEN, 1969). Note que a decisão das firmas entre praticar o preço de concorrência perfeita e o preço de monopólio é o mesmo que decidir entre um excedente igual à área $P_{CP}DE$ e $P_{Mb}BCE$. Assim, se as estruturas de custos das firmas e da demanda do mercado forem tais que a área $P_{CP}DE<$, $P_{Mb}BCE$ então é vantajoso que a firma estabeleça o preço de monopólio.

12.4.5. *Cartéis*

O cartel é formado por um conjunto de firmas de uma determinada indústria (ou parte delas), com o objetivo de maximizar o lucro total da indústria (ou do grupo). Para que o cartel seja formado são necessárias algumas condições, como: o produto da indústria deve ser o mais homogêneo possível e o número de participantes não deve ser muito grande. O número de participantes influenciará a estabilidade do cartel. Outro fator decisivo sobre a sua estabilidade é a estrutura das empresas participantes do cartel. Empresas mais homogêneas levam a uma distribuição da quantidade produzida e dos lucros de forma mais eqüitativa dentro do cartel, propiciando maior estabilidade.

Entretanto, a presença de uma firma dominante pode levar as empresas menores a aderirem ao cartel. Uma outra condição necessária é a possibilidade de se praticar o poder de monopólio, de modo que, se a demanda de mercado for muito elástica, o sucesso do cartel fica comprometido (PINDYCK; RUBINFELD, 1999).

Na Figura 12.6, que ilustra o duopólio de Cournot, a linha tracejada *CB* determina as quantidades produzidas pelas firmas em condições de cartel. A distribuição das quantidades produzidas entre as firmas seria função dos custos marginais de cada uma.

No duopólio de Cournot, cada firma tem a seguinte curva de lucro:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= ay_1 - by_1^2 - by_1 y_2 - CT_1 \\ \pi_2 &= ay_2 - by_2^2 - by_1 y_2 - CT_2 \end{aligned} \qquad (12.22)$$

A função de lucro da indústria seria dada por:

$$\pi_i = ay_1 + ay_2 - by_1^2 - by_2^2 - 2by_1 y_2 - CT_1 - CT_2 \qquad (12.23)$$

Derivando esta expressão em relação a y_i, obtém-se a quantidade produzida por cada firma:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = a - 2by_i - 2by_j - c_i = 0 \qquad (12.24)$$

Sendo $c_1 = c_2$, $y_1 = y_2$, a quantidade produzida por cada firma seria:

$$y_i = \frac{a-c}{4b} \tag{12.25}$$

A expressão (12.23) é equivalente à função de lucro em regime de monopólio, considerando o custo total da firma como o somatório dos custos marginais das firmas individuais:

$$\pi_I = aY - bY^2 - (CT_1 + CT_2) \tag{12.26}$$

Desse modo, a condição de maximização seria:

$$\begin{aligned} a - 2bY = c \therefore \\ RMa_I = CMa_I \end{aligned} \tag{12.27}$$

Sendo os custos marginais iguais, as firmas dividem o mercado igualmente. Se os custos forem diferentes, a distribuição ocorrerá conforme ilustrado na Figura 12.9.

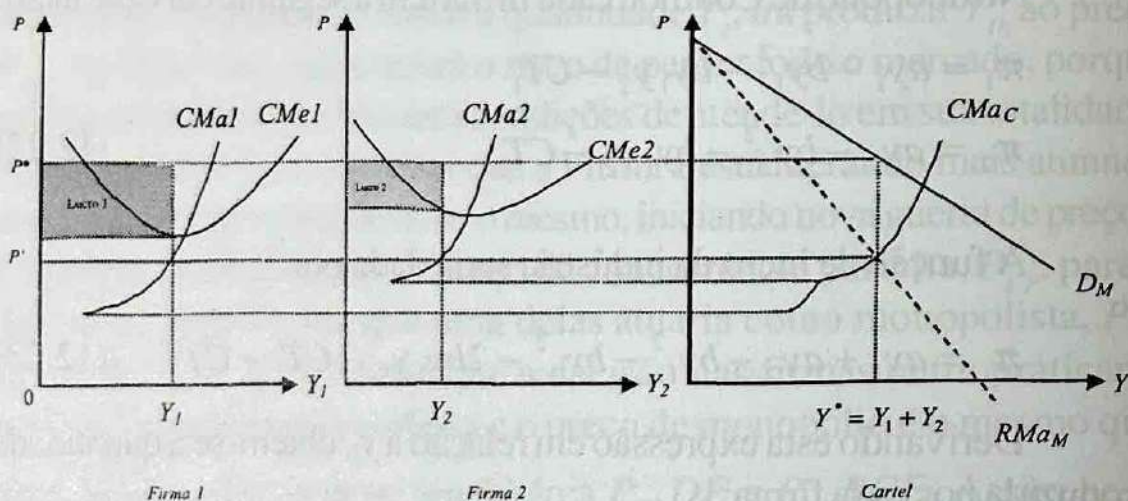



Figura 12.9 - Maximização do lucro do cartel, considerando firmas com custos marginais diferentes

Pela Figura 12.9, percebe-se que a Firma 1 tem custo menor e, por isso, sua cota de produção é maior, gerando conseqüentemente um lucro maior. A Firma 2, por sua vez, produz a quantidade Y_2 um pouco menor que a quantidade produzida pela Firma 1, e por ter uma curva de custo médio maior terá um menor lucro. O preço P^* é definido pela maximização conjunta, isto é, igualando-se no cartel a receita marginal do mercado (RMa_M) ao somatório dos custos marginais de cada firma individual, denominado de custo marginal do cartel (CMa_C); após definido este ponto, define-se o preço na curva de demanda do mercado (D_M). Note que, apesar de o cartel aumentar os lucros de ambas as firmas, há um incentivo para a trapaça, pois, uma vez definido o preço P^*, qualquer uma das firmas poderia elevar seu lucro igualando seu custo marginal a este preço.

12.5. Concorrência monopolística

A concorrência monopolística é uma estrutura com características próximas às da concorrência perfeita, porém permite que em determinados momentos uma firma individual exerça poder de monopólio no curto prazo. As principais características da concorrência monopolística são: a) altas elasticidades-preço cruzadas, indicando que os produtos são substitutos próximos entre si, mas não são homogêneos; b) livre entrada e saída das firmas na indústria; c) lucro supernormal no curto prazo e lucro zero no longo prazo; d) capacidade ociosa da firma no equilíbrio; e e) curva de demanda da firma negativamente inclinada, com alta elasticidade-preço direta da demanda (PINDYCK; RUBINFELD, 1999).

Na concorrência monopolística a firma tem sua curva de demanda negativamente inclinada, mas a sua curva não coincide com a curva de demanda de mercado, que é mais inclinada. Isso decorre do fato de que o produto da indústria apresenta certa diferenciação, de modo que cada firma tem sua curva de demanda. Ao ter sua própria curva de demanda, a firma apresenta certo poder de monopólio, que é limitado devido ao baixo grau de diferenciação dos produtos. A concorrência monopolística é uma condição característica de mercados de sabonetes, detergentes, pasta de

dente, comércio varejista em geral, já que cada loja apresenta um diferencial em relação a outra. Os equilíbrios de curto e longo prazo estão representados na Figura 12.10.

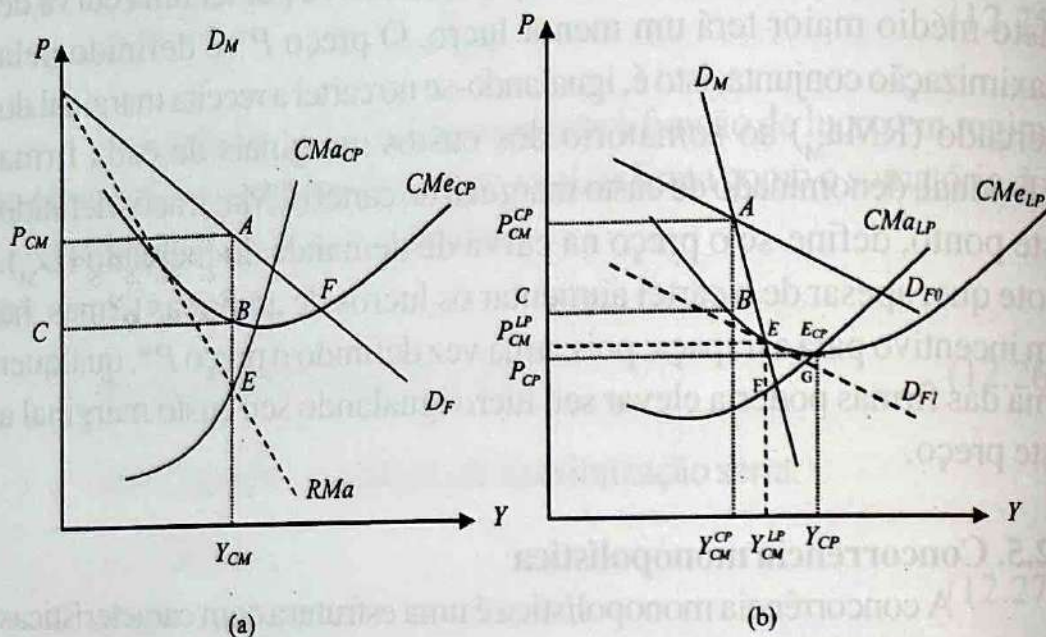



Figura 12.10 - Equilíbrios de curto e longo prazo de uma firma atuando em condições de concorrência monopolística

O poder de monopólio que a firma possui no curto prazo é conseqüência de uma diferenciação do seu produto, que o torna único no curto prazo, conforme equilíbrio representado na Figura 12.10a. Nessa situação, a firma apresenta certo poder de monopólio temporariamente maximizando seu lucro, igualando a receita marginal ao custo marginal. No entanto, a livre entrada de firmas nesse mercado e o baixo grau de diferenciação do produto fazem com que outras firmas passem a produzir produtos similares. À medida que outros produtos com características semelhantes vão sendo lançados no mercado, a demanda da firma vai sendo deslocada para baixo, ao longo da curva de demanda de mercado, conforme Figura 12.10b. O equilíbrio ocorre quando a curva de demanda da firma tangencia a curva de custo médio, em que a firma passa a atuar em condição de lucro zero. A firma continua tendo sua curva de demanda negativamente inclinada, já que o seu produto é único no mercado, mas

não tem mais condição de exercer o monopólio, porque passou a haver produtos substitutos, levando-a a atuar na condição de lucro zero.

O equilíbrio de longo prazo é obtido produzindo-se uma quantidade inferior à quantidade produzida em concorrência perfeita, em que o equilíbrio se dá no ponto de mínimo custo médio. Com isso, o preço praticado na concorrência monopolística é maior que os preços competitivos, gerando uma ineficiência que corresponde à área EFG da Figura 12.10b. Segundo Simonsen (1969), além de o preço praticado ser maior, essa ineficiência decorre ainda do excessivo gasto com propaganda e redução dos ganhos de escala devido à diferenciação do produto. No entanto, Simonsen (1969) e Pindyck e Rubinfeld (1999) argumentam que essa ineficiência pode ser compensada pela diferenciação dos produtos da indústria, que permite ao consumidor escolher o produto com base não só no preço, com o também nas características do produto que mais lhe convêm – conforme suas preferências individuais.

12.6. A função de produção em mercados imperfeitos[11]

No capítulo 7 tratou-se da função de produção considerando os preços constantes. A maximização do lucro consiste em igualar o valor do produto marginal (VPMa) ao custo marginal (CMa). O VPMa é determinado pelo produto do preço pela produtividade marginal do fator, enquanto o CMa é o próprio preço do fator. Como foi visto, esta condição é válida em caso de concorrência perfeita, em que os preços são dados pelas condições de livre mercado. Assim, a firma não influencia nem o preço do produto nem o preço do insumo. No entanto, como ficam as condições de maximização com preços variáveis, tanto para o produto quanto para o fator, como ocorre em mercado de concorrência imperfeita?

Conforme visto anteriormente, em mercados imperfeitos a curva de demanda da firma passa a ser função do preço. Nesse caso, a receita total da firma seria:

[11] Com base em Debertin (1986).

$$RT = P(Y).Y \qquad (12.28)$$

A receita marginal, nesse caso, será obtida desenvolvendo-se a expressão:

$$\frac{\partial RT}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y}Y + P\frac{\partial Y}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y}Y + P$$

Resultando na expressão (12.4):

$$RMa = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_D}\right) \quad \text{ou} \quad RMa = P\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_D|}\right)$$

sendo esta expressão igual à da receita marginal obtida para o monopolista. Da mesma forma, a firma também irá atuar na fase elástica da curva de demanda, conforme ilustrado na Figura 12.2.

No entanto, a maximização do lucro da firma quando se tem apenas um fator variável é feita igualando-se o valor do produto marginal ao custo marginal do fator. Ou seja, a produção Y é determinada pela quantidade de insumo X, definindo-se a função de produção $Y = f(X)$. Assim, a curva de demanda da firma pode ser escrita na forma $P = P(Y(X))$. O produto total seria então:

$$PT = P[Y(X)][Y(X)] \qquad (12.29)$$

Para se encontrar então a variação do produto total dada uma variação na quantidade do insumo X, que será chamado de valor marginal do produto ($VMaP$), deriva-se a expressão (12.29) em relação a X. Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial VPT}{\partial X} = VMaP = \left[\frac{\partial P[Y(X)]}{\partial Y(X)}\frac{\partial Y(X)}{\partial X}\right]Y(X) + P[Y(X)]\left[\frac{\partial Y(X)}{\partial X}\right]$$

Isolando $\partial Y/\partial X$ e considerando $P[Y(X)] = P;\ Y(X) = Y$:

$$VMaP = \frac{\partial Y}{\partial X}\left(\frac{\partial P}{\partial Y}Y + P\right)$$

Isolando P, tem-se:

$$VMaP = P\frac{\partial Y}{\partial X}\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial X}+1\right)$$

que pode ser escrito da forma:

$$VMaP = VPMa\left(1+\frac{1}{\varepsilon_D}\right) \therefore VMaP = VPMa - \frac{VPMa}{|\varepsilon_D|} \qquad (12.30)$$

ou seja, o VMaP é o próprio VPMa já definido mais uma parcela do VPMa ponderado pela elasticidade-preço da demanda. A expressão (12.30) pode ser interpretada com o auxílio da Figura 12.12.

Na Figura 11a, a curva de VPT_1 representa a função de produção ao preço P_1. Considerando a princípio que os preços não variam, ao aumentar a quantidade do insumo X, de X_1 para X_2, o $VPMa$ passa de $VPMa_1$ ($P.PMa_1$) para $VPMa2$ ($P.PMa2$). Contudo, como $P=f(y)$, aumentando-se X, aumenta-se Y e reduz-se P, de modo que, ao aumentar a quantidade utilizada de insumo de X_1 para X_2, tem-se a nova VPT_2 ($P_2.PT$), abaixo da curva VPT_1 ($P.PT_1$), já que P_2 é menor que P_1. Nesse caso, o $VMaP_2$ é menor que o $VPMa_1$, pelo fato de se estar trabalhando na fase inelástica da curva de demanda ($|\varepsilon_D| < 1$). Pela expressão (12.30), para $\varepsilon_D < 1$, a expressão no interior dos parênteses é menor que um e negativa, resultando em um $VMaP_2$ menor que $VPMa_1$.

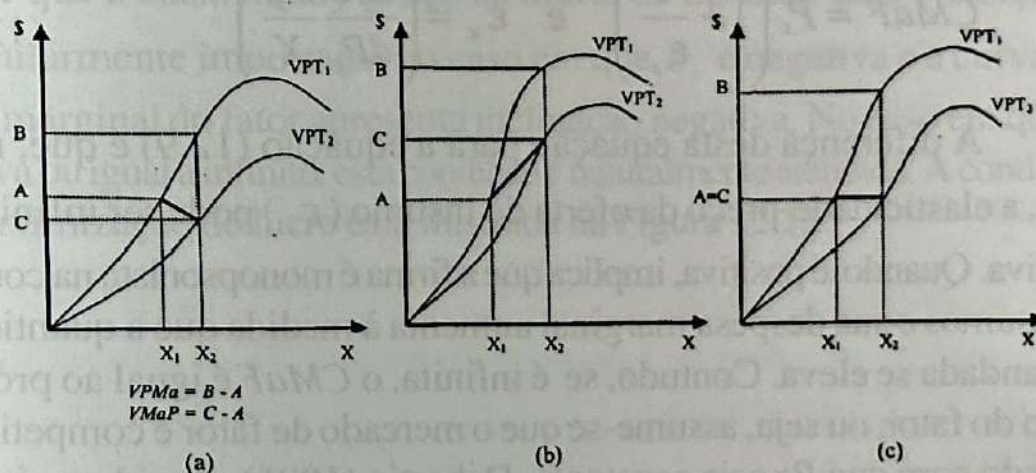



Figura 12.11 - Valor marginal do produto (VMaP) definido em função da elasticidade-preço da demanda

Por outro lado, se $|\varepsilon_D| > 1$, a expressão dentro dos parênteses é menor que a unidade, mas positiva, e o $VMaP_2$ é maior que o $VPMa_I$ e corresponde à Figura 12.11b. No caso da elasticidade-preço da demanda unitária (Figura 12.11c), não ocorre variação, e o $VMaP_2$ é igual ao $VPMa_I$.

Entretanto, considerando-se que a firma está atuando em um mercado imperfeito, o preço do insumo também pode variar. Enquanto em concorrência perfeita o custo marginal do fator era o próprio preço, aqui o preço do fator varia de acordo com a quantidade comprada. Nesse caso, ter-se-á $P_x = P_x(X)$, e o custo total *(CT)* será dado pela expressão:

$$CT = P_x(X)X \tag{12.31}$$

e o custo marginal do fator é fornecido por:

$$\frac{\partial CT}{\partial X} = \frac{\partial P_x}{\partial X} X + P_x \frac{\partial X}{\partial X}$$

resultando na expressão (12.32) semelhante à expressão (12.9), mas cuja interpretação difere um pouco daquela que será vista adiante. Para diferenciar o custo marginal derivado na equação (12.9), a expressão (12.32) será denominada custo marginal do Fator (CMaF):

$$CMaF = P_x\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_x}\right) \quad \text{e} \quad \varepsilon_x = \left(\frac{dX}{dP_x}\frac{P_x}{X}\right) \tag{12.32}$$

A diferença desta equação para a equação (12.9) é que, neste caso, a elasticidade-preço da oferta do insumo (ε_x) pode ser infinita ou positiva. Quando é positiva, implica que a firma é monopsonista na compra de insumos e sua despesa marginal aumenta à medida que a quantidade demandada se eleva. Contudo, se é infinita, o *CMaF* é igual ao próprio preço do fator, ou seja, assume-se que o mercado de fator é competitivo, fazendo com que *Px* seja constante. Debertin (1986) considera ainda a possibilidade de a elasticidade-preço da oferta ser negativa.

Quando a firma se depara com essa situação, sua função lucro é denotada por:

$$\pi = RT - CT = P_y[Y(X)] - P_x(X) \qquad (12.33)$$

Derivando a função lucro e igualando a zero, encontra-se a expressão (12.34), que é a condição de maximização de lucro, nessas condições.

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = \frac{\partial P_y[Y(X)]}{\partial X} - \frac{\partial P_x(X)}{\partial X} = 0 \therefore VMaP - CMaF = 0$$

$$VMaP = CMaF \qquad (12.34)$$

Para garantir a maximização do lucro, deve-se verificar a condição de segunda ordem, de forma que:

$$\frac{\partial VMaP}{\partial X} - \frac{\partial CMaF}{\partial X} < 0 \therefore \frac{\partial VMaP}{\partial X} < \frac{\partial CMaF}{\partial X} \qquad (12.35)$$

Esta expressão diz que a inclinação da curva do valor marginal do produto deve ser menor que a inclinação do custo marginal do fator. Em outras palavras, a elasticidade-preço da demanda do produto deve ser menor que a elasticidade-preço da oferta do insumo. Esta condição é particularmente importante no caso em que ε_x é negativa e a curva do custo marginal do fator apresenta inclinação negativa. No caso em que é positiva ou igual a infinito, esta condição é naturalmente atendida. A condição de maximização do lucro está ilustrada na Figura 12.12.

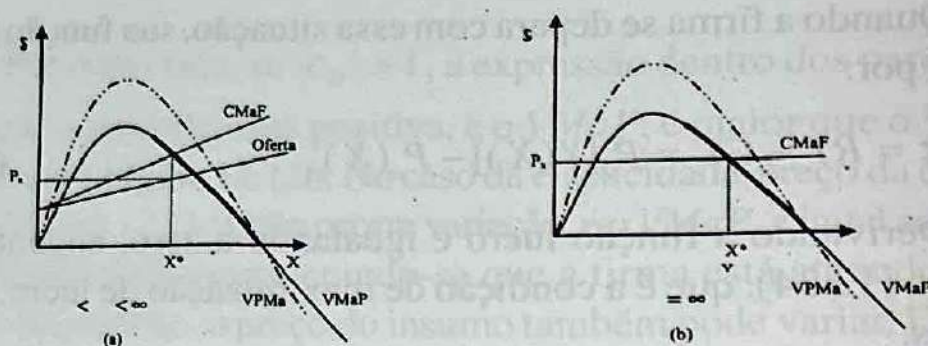



Figura 12.12 - Condições de maximização do lucro da firma em condições de concorrência imperfeita

A situação de maximização do lucro em condições de concorrência imperfeita foi ilustrada considerando apenas um fator variável, porém pode ser entendida para mais de um fator. Sendo $Y = Y(X_1, X_2, ... X_n)$, $P_y = P_y(Y)$, $C = C(X_1, X_2, ..., X_n)$ e $P_x = P_x(X)$, o lucro da firma seria dado por:

$$\pi = RT - CT = P_y Y - P_x X$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X_i} = \frac{\partial RT}{\partial X_i} - \frac{\partial CT}{\partial X_i} = 0$$

$$VMaP_i = CMaF_i \tag{12.36}$$

ou seja, o valor do produto marginal do fator *i* ($VMaF_i$) deve ser igual ao seu custo marginal ($CMaF_i$). As condições de segunda ordem podem ser verificadas através do Hessiano simples (sem orla), cujas condições para um máximo devem ser: H1<0, H2>0 e H3<0... (CHIANG, 1982, p. 307).

12.7. Exercício resolvido

1) Considere um mercado com duas firmas (1 e 2), que produzem um produto Y, cuja demanda é Q = 24 – P, em que Q é a quantidade demandada e P o preço do produto. O custo de produção, por unidade, das firmas 1 e 2 são, respectivamente, R$ 15 e R$ 18.

a) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada

firma, considerando que elas agem competitivamente no mercado.

b) *Determine o preço e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas agem conforme o modelo duopolista de Cournot.*

c) *Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas agem conforme o modelo de Stackelberg.*

d) *Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas agem conforme o modelo duopolista de Bertrand.*

e) *Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas resolvam formar um cartel.*

Resolução

a) Os custos totais das firmas 1 e 2 são:

$$CT_1 = 15y_1$$

$$CT_2 = 18y_2$$

Em concorrência perfeita a Firma 2 não produz, pois seu custo é muito elevado. Assim, a Firma 1 produz sozinha, de forma que:

- $CMa_1 = P = 15$
- $Q = Y = 24 - 15$

$Q = 9$

- $\pi = P.Y - CT_1$

$\pi = 15(9) - 15(9)$

$\pi = 0$

b) Sabendo-se que a curva de demanda é $Q = Y = 24 - P$ e que, portanto, $a = 24$ e $b = 1$, basta usar as equações (12.5A), (12.6A) e (12.7A), do Apêndice A, para se encontrar facilmente a quantidade produzida por cada firma e pela indústria.

✓ Quantidade produzida pela Firma 1, equação (12.5A):

- $y_1 = \dfrac{24 - 2(15) + 18}{3(1)} = 4$

✓ Quantidade produzida pela Firma 2, equação (12.6A):

- $y_2 = \dfrac{24 - 2(18) + 15}{3(1)} = 1$

✓ Quantidade produzida pela indústria, equação (12.7A),

- $Q = Y = y_1 + y_2 = \dfrac{2(24 - 15 - 18)}{3(1)} + \dfrac{15 + 18}{3(1)} = 5$

✓ O preço de mercado é:

- $Q = 24 - P \Rightarrow P = 24 - 5 = 19$

c) Considerada a Firma 1 como líder de Stackelberg, tomando-se a equação (12.4B), do Apêndice B, tem-se:

- $y_1 = \dfrac{24 - 2(15) + 18}{2(1)} = \dfrac{12}{2} = 6$

Pela equação (12.5B), a quantidade produzida pela Firma 2 é:

- $y_2 = \dfrac{24 - 3(18) + 2(15)}{4(1)} = \dfrac{0}{4} = 0$

✓ Quantidade produzida pela indústria, equação (12.6B):

- $Q = Y = y_1 + y_2 = 6 + 0 = 6$

✓ O preço de mercado é:

- $Q = 24 - P \Rightarrow P = 24 - 6 = 18$

Considerada a Firma 2 como líder de Stackelberg, tem-se:

- $y_2 = \dfrac{24 - 2(18) + 15}{2(1)} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

- $y_1 = \dfrac{24 - 3(15) + 2(18)}{4(1)} = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$

- $Q = Y = y_1 + y_2 = 1{,}5 + 3{,}75 = 5{,}25$

• $Q = 24 - P \Rightarrow P = 24 - 5{,}25 = 18{,}75$

d) Considerando que os custos das firmas 1 e 2 são tais que o $CMa_1 = 15 < CMa_2 = 18$, basta que a Firma 1 estabeleça um preço pouco abaixo de R$ 18 para que ela tire a Firma 2 do mercado. Depois da saída da Firma 2, a Firma 1 pode estabelecer um preço de R$ 18 e continuar sozinha no mercado, pois qualquer firma com custos marginais maiores ou iguais a R$ 18 vislumbra, respectivamente, prejuízo ou lucros nulos no longo prazo. Assim:

• $y_1 = Y = 24 - P$ e $P = 18$

$y_1 = 24 - 18$

$y_1 = 6$

• $\pi = 18(6) - 15(6)$

$\pi = 18$

e) Estabelecido o cartel, apenas a Firma 1 produz, pois ela possui custo menor e tem condições de atender a todo o mercado. De forma que:

• $RT_1 = P.y_1$

$= (24 - y_1)y_1$

$= 24y_1 - y_1^2$

• $RMa_1 = 24 - 2y_1$

$RMa_1 = CMa_1$

$24 - 2y_1 = 15$

$2y_1 = 9$

$y_1 = 4{,}5$

• $P = 24 - 4{,}5$

$P = 19{,}5$

• $\pi = RT_1 - CT_1$

$\pi = 19{,}5(4{,}5) - 15(4{,}5)$

$\pi = 20{,}25$

12.8. Exercícios propostos

1) Comente as seguintes questões:

a) A Concorrência Monopolística difere do Mercado Competitivo apenas pelo ponto de equilíbrio de longo prazo, que no primeiro caso ocorre fora do ponto onde o custo médio é mínimo.

b) Quanto mais inelástica a curva de demanda do mercado, maior é o lucro auferido pelo monopolista; assim, ele sempre atua na fase inelástica da curva de demanda.

c) Na solução de duopólio de Cournot, as empresas dividirão o mercado igualmente entre si.

d) Para Cournot, em um mercado oligopolizado em que todos os oligopolistas possuem exatamente a mesma curva de custos, o mercado será dividido igualmente entre todos os participantes, ou seja, $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = ... = y_n = Y/n$ (em que $Y = \Sigma y_i$; i=1,...n.).

e) O equilíbrio obtido na resolução de Stackelberg só pode ser considerado estável se as empresas duopolistas assumem, de fato, as posições de líder e seguidora. Em outras palavras, uma das empresas terá que se conformar em apenas acompanhar a outra, sem almejar a liderança.

f) Um monopolista que produz com duas fábricas atende a dois mercados distintos. Ao maximizar o lucro, praticando discriminação de preços de terceiro grau, não terá que igualar os custos marginais das fábricas às receitas marginais dos mercados.

2) Resolva os seguintes problemas

a) Considerando um duopólio, em que uma das firmas possa atuar como líder, mostre que o produto total da indústria será: $q_1 + q_2 = \dfrac{3a}{4b}$.

b) Considere um mercado com duas firmas, 1 e 2, que produzem um produto homogêneo, cuja demanda é P = 60 – 0,4Q, em que Q é a quantidade demandada e P, o preço do produto. Os custos de produção das duas firmas são, respectivamente:

$C_1 = 10 + 5y_1$
$C_2 = 12 + 4y_2$

1) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas agem competitivamente no mercado.
2) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas mesmas agem conforme o modelo duopolista de Cournot.
3) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que a Firma 1 atuará como líder, conforme o modelo de Stackelberg.
4) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que a Firma 2 atuará como líder, conforme o modelo de Stackelberg.
5) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que ambas atuarão como líder, conforme o modelo de Stackelberg.
6) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas agem conforme o modelo duopolista de Bertrand.
7) Discuta objetivamente o resultado encontrado em (6) f em relação aos resultados encontrados no equilíbrio de Cournot e Stackelberg.
8) Determine o preço de mercado e a quantidade produzida por cada firma, considerando que elas resolveram formar um cartel.

3) Considere os seguintes dados sobre um mercado duopolista:

$P = 300 - 0,9\,(y_1 + y_2)$

$C_1 = 9y_1$ e $C_2 = 0,9\,y_2^2$

em que P é o preço do produto comercializado; y_1 e y_2 são as quantidades produzidas pelas firmas 1 e 2; e C_1 e C_2 são os custos totais das firmas 1 e 2.

Com base nessas informações, pede-se:

a) A função de lucro da empresa 1.
b) A curva de reação da empresa 1, com relação à empresa 2, segundo o modelo de Cournot.

c) A função de lucro da empresa 2.

d) A curva de reação da empresa 2, com relação à empresa 1, segundo o modelo de Cournot.

e) O preço e as quantidades de equilíbrio das firmas 1 e 2, segundo a proposta de Cournot.

f) Os lucros obtidos pelas firmas 1 e 2, segundo o modelo de Cournot.

g) Com base nas premissas de Stackelberg, encontre os valores do lucro das empresas 1 e 2, considerando a empresa 1 como líder.

h) Repita o mesmo processo, considerando 2 como líder e 1 como seguidora.

i) Comente as diferenças encontradas nas soluções de Cournot e Stackelberg.

j) Se ambas as firmas agissem competitivamente, quais seriam, no equilíbrio de mercado, os valores de preço e quantidade?

12.9. Referências

CHIANG, A.C. **Matemática para economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. 684 p.

DEBERTIN, D.L. **Agricultural production economics**. New York: MacMillan, 1986. 366 p.

MARTIN, S. **Industrial economics**: economic analysis and public policy. New Jersey: Prentice Hall, 1993. 623 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. 4.ed. São Paulo: Makron Books, 1999. 791 p.

SIMONSEN, M.H. **Teoria microeconômica**: teoria da concorrência imperfeita. 4.ed. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1969. 196 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1999. 740 p.

12.10. Apêndices

12.10.1. Apêndice A

Modelo de Cournot com custos marginais diferentes

Considerando uma demanda de mercado igual a $P = a - bY$, no duopólio de Cournot, cada firma tem a seguinte curva de lucro:

$$\pi_1 = ay_1 - by_1^2 - by_1 y_2 - CT_1 \quad (12.1A)$$

$$\pi_2 = ay_2 - by_2^2 - by_1 y_2 - CT_2 \quad (12.2A)$$

Dado que as firmas possuem custos marginais diferentes, denotados por c_1 e c_2, para as firmas 1 e 2, respectivamente, ao maximizar suas funções de lucro, cada firma se depara com curvas de reações diferentes. Derivando as equações (12.1A) e (12.2A) em relação a y_1 e y_2, obtêm-se as curvas de reação, respectivamente para as firmas 1 e 2:

$$y_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{y_2}{2} \quad (12.3A)$$

$$y_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{y_1}{2} \quad (12.4A)$$

Substituindo (12.4A) em (12.3A), obtém-se a quantidade produzida pela Firma 1:

$$y_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b} \quad (12.5A)$$

Substituindo (12.5A) em (12.4A), obtém-se a quantidade produzida pela Firma 2:

$$y_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b} \quad (12.6A)$$

Somando-se as quantidades produzidas individualmente, a quantidade total produzida seria:

$$Y = \frac{2(a - c_1 - c_2)}{3b} + \frac{c_1 + c_2}{3b} \qquad (12.7A)$$

12.10.2. Apêndice B

<u>Modelo de Stackelberg com custos marginais diferentes</u>

Considerando que a Firma 1 é líder de Stackelberg, tomando a função de reação da Firma 2 derivada no modelo de Cournot em (12.4A):

$$y_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{y_1}{2} \qquad (12.1B)$$

e substituindo na função de lucro da Firma 1 em (12.11):

$$\pi_1 = ay_1 - \tfrac{1}{2}by_1^2 - \tfrac{1}{2}y_1 a + \tfrac{1}{2}y_1 c_2 - CT_1 \qquad (12.2B)$$

tem-se a função de lucro da Firma 1 em função exclusivamente da própria quantidade e do custo marginal (que são agora distintos para cada firma), derivando:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = a - by_1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c_2 - c_1 = 0 \qquad (12.3B)$$

$$y_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2b} \qquad (12.4B)$$

que é a quantidade produzida pela Firma 1. A Firma 2 toma a quantidade da Firma 1 como constante e define sua quantidade produzida, obtendo:

$$y_2 = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b} \qquad (12.5B)$$

A quantidade total, no entanto, seria maior do que aquela produzida segundo as condições do modelo de Cournot:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{3a - 2c_1 - c_2}{4b} \qquad (12.6B)$$

De forma análoga, os resultados considerando a Firma 2 como líder de Stackelberg podem ser deduzidos pelos leitores mais atentos.

CAPÍTULO 13

Teoria da troca: uma introdução aos conceitos de equilíbrio geral

Viviani Silva Lirio[1]
Maurinho Luiz dos Santos[2]
Francisco Armando da Costa[3]
Rosangela Aparecida Soares Fernandes[4]
Norberto Martins Vieira[5]

13.1. Introdução

Nos capítulos anteriores, a percepção e o comportamento do consumidor, ou do produtor, sempre foram considerados tomando por base regras de maximização individuais. No caso da teoria do consumidor (capítulo 3), foram derivadas as curvas de demandas para cada bem e cada indivíduo, que, em seqüência, foram utilizadas para determinar a curva de demanda de mercado de cada produto ou serviço considerado. Esta, por sua vez, em conjunto com a curva de oferta, determina o preço e a quantidade de equilíbrio de mercado.

No entanto, em todos esses contextos, úteis e completos em seus limites de análise, os efeitos de quaisquer mudanças exógenas sobre um determinado mercado sempre foram considerados apenas para as condições de equilíbrio desse mesmo mercado individual. Essa abordagem,

[1] Professora do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: vslirio@ufv.br.
[2] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br.
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: fdacosta@ufv.br.
[4] Doutoranda em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV. e-mail: roaeconomista @yahoo.com.br.
[5] Doutorando em Economia Aplicada pelo Departamento de Economia Rural da UFV. e-mail: norbertoufv @yahoo.com.br.

bastante usual em várias circunstâncias, é chamada de *equilíbrio parcial*, visto que as condições de equilíbrio são analisadas para um mercado em particular. Nesse âmbito, observa-se como a demanda e a oferta são afetadas pelo preço de determinada mercadoria, mas se ignora o efeito dos preços dos demais bens. Em outras palavras, todos os preços são constantes, exceto o preço do bem (ou serviço) que está sendo estudado.

Em muitos casos, essa limitação analítica não compromete o entendimento do objeto que se pretende compreender nem reduz a qualidade das inferências realizadas. Todavia, quanto mais se amplia e complexifica um sistema econômico, quanto mais integradas são as análises e quanto mais simultâneas e dependentes são as tomadas de decisão dos agentes, mais restritiva se torna a análise em equilíbrio parcial.

Em síntese, sem qualquer demérito à análise individual ou singular é preciso considerar que, na prática, essa dicotomia entre mercados correlatos não se mantém, uma vez que alterações em um mercado específico afetam, em graduação variada, diferentes outros mercados a ele correlacionados.

Nesse sentido, a *teoria da troca* é a base para modelos de *equilíbrio geral*. No equilíbrio geral, os preços são passíveis de variação, e o equilíbrio final requer que todos os mercados atinjam seus respectivos equilíbrios. Assim, a teoria do equilíbrio geral leva em consideração todas as interações entre os mercados.

É certo afirmar que o grau de interdependência e, por conseguinte, do grau dos efeitos de uma modificação em um mercado sobre os demais, irá variar segundo a integração verdadeira destes; contudo, no caso de produtos alimentares, por exemplo, ou de setores como o elétrico, a quantidade de setores afetados é muito alta.

Assim, considerando a importância de uma análise integrada e não apenas segmentar, este capítulo se propõe a examinar, como forma de iniciar essa incursão, um caso especial de modelo de equilíbrio geral, em que todos os agentes são consumidores. Essa situação é conhecida como o caso de *troca pura*. Embora seja uma economia bastante simplificada, esse modelo apresenta muitos fenômenos básicos que

permitem desenvolver princípios de equilíbrios, os quais poderão ser expandidos para os modelos mais complexos, envolvendo firmas e produção.

A estrutura deste capítulo foi organizada considerando, em primeiro lugar, a discussão sobre as premissas do modelo, seguida da exemplificação (construção gráfica, derivação matemática e exemplo numérico), discussão dos critérios de Alocação Eficiente de Pareto e cálculo do Equilíbrio Walrasiano. Em seguida, são apresentados os exercícios resolvidos, os propostos e as referências bibliográficas.

13.2. Troca pura

13.2.1. Pressupostos do modelo

Para facilitar o desenvolvimento do modelo de troca pura, será considerada uma economia com apenas dois indivíduos, aqui denominados **A** e **B**, e dois bens, **X** e **Y**. Um dos pressupostos a considerar é que nenhuma produção é possível nessa economia. Cada consumidor dispõe de uma dotação inicial, contendo quantidades não-negativas de X e Y, e tem suas preferências por esses mesmos bens especificadas por meio de funções de utilidade.

Assume-se, ainda, que cada consumidor se comporta no sentido de que os preços dos bens independem de suas ações, sendo determinados exogenamente. Finalmente, considera-se, como base analítica, que cada consumidor é maximizador de utilidade, isto é, escolhe sempre a cesta de mercadoria que proporciona o mais alto nível factível de utilidade. Para facilitar o entendimento, serão usadas as seguintes notações:

- Dois consumidores, A e B.
- Dois produtos, X e Y.
- Função Utilidade do Consumidor A, especificada como: $U_A (X_A, Y_A)$.
- Função Utilidade do Consumidor B, especificada como: $U_B (X_B, Y_B)$.
- Uma alocação (cesta), $Z_i = (X_i, Y_i)$, mostra as quantidades consumidas de X e de Y pelo consumidor i.
- A dotação inicial do consumidor i (cesta inicial) é representada por $w_i = (w_x, w_y)$, em que w_i é a dotação inicial dos bens X (w_x) e Y (w_y).

- p_x e p_y são os preços dos bens X e Y, respectivamente.
- ρ é o preço relativo, isto é, $\rho = \frac{p_x}{p_y}$.

Uma alocação $Z_i = (X_i, Y_i)$ é factível se ela é fisicamente possível, isto é, $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_x^i$; no caso de dois consumidores, n=2, tem-se $X_A + X_B \leq w_x^A + w_x^B$ e $Y_A + Y_B \leq w_y^A + w_y^B$. Isso significa que a quantidade total demandada de cada bem não pode ser superior à quantidade total disponível de cada bem. Nessa economia, os agentes (consumidores) trocam bens entre si de acordo com certas regras, com vistas a obter melhor nível de utilidade.

Assim, as questões centrais que a teoria da troca pura objetiva responder são: Há incentivo para a troca? Qual o resultado do processo de troca entre os agentes? Qual a quantidade de cada bem que cada agente trocará? Quais as alocações desejáveis desse processo de troca? Quais mecanismos de alocação são apropriados para que cada consumidor atinja sua alocação desejável?

As respostas a essas dúvidas envolvem uma mistura de questões normativas e positivas, as quais se buscará explicitar e organizar nas seções a seguir.

13.2.2. A caixa de Edgeworth

Quando há dois consumidores e dois bens, pode-se usar um conveniente instrumento gráfico, denominado "caixa de Edgeworth", que facilita o entendimento dos mecanismos de troca e os prováveis resultados desse processo. Para facilitar a representação gráfica, considere a seguinte situação:

Suponha que o consumidor A dispõe de 10 unidades do bem X e de 5 unidades do bem Y. O consumidor B, por sua vez, dispõe de 5 unidades do bem X e de 10 unidades do bem Y. Ambos os consumidores têm curvas de indiferença estritamente convexas (função utilidade quase-côncava). A caixa de Edgeworth é construída conforme a Figura 13.1.

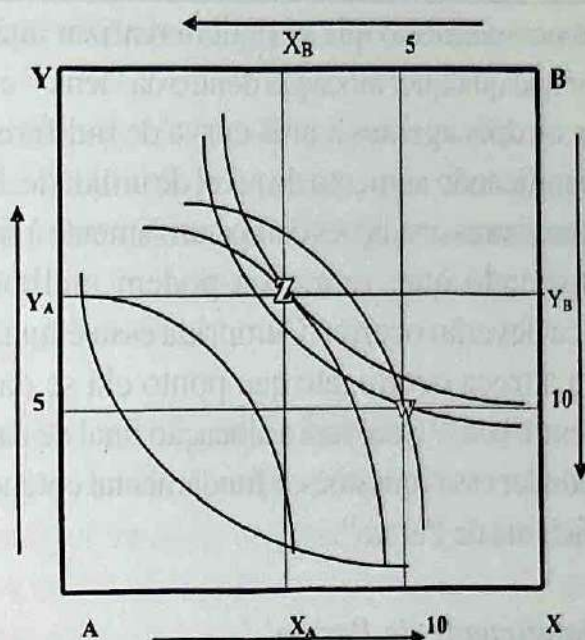



Figura 13.1 - Apresentação esquemática da caixa de Edgeworth
Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que qualquer cesta dentro da caixa de Edgeworth é, por construção, fisicamente factível. O eixo dos X, na caixa, é determinado pela soma das dotações do bem X, isto é, $w_x^A + w_x^B = 10 + 5 = 15$. O eixo dos Y tem sua dimensão igual à soma das dotações do bem Y, $w_y^A + w_y^B = 5 + 10 = 15$.

13.2.3. O mecanismo de troca

Na Figura 13.1, os agentes A e B podem, simplesmente, permanecer com suas respectivas dotações, optando por não iniciar nenhum procedimento de troca, ou, caso percebam que podem melhorar seu nível de bem-estar (utilidade), envolver-se em um sistema de troca. Disso decorre que a questão inicial é, de fato, entender se há motivação, ou não, para que alguma troca entre esses dois indivíduos ocorra. No caso proposto, a resposta é afirmativa: há motivação.

Como o elemento motivador da troca é o aumento de bem-estar, representado, nesse esquema, pelo alcance de curvas de indiferença

mais elevadas, é nesse âmbito que se podem realizar análises. Assim, compete observar que qualquer alocação dentro da "lente" é uma alocação factível que leva os dois agentes a uma curva de indiferença acima da curva original, significando aumento do nível de utilidade. Nesse caso, os dois estariam em melhores condições comparativamente à situação inicial.

Fica constatado que, se ambos podem melhorar, então os processos de troca deverão ocorrer. Cumprida essa etapa, as perguntas seguintes são: se a troca ocorre, até que ponto ela se dará? Com que padrão de trocas entre bens? Qual será a alocação final de cada indivíduo?

Para responder essas questões, é fundamental entender o conceito de "Alocação Eficiente de Pareto".

13.2.4. Alocação eficiente de Pareto

O conceito de eficiência de Pareto, em termos das trocas possíveis, é um conceito limítrofe. Diz-se que uma alocação $Z_i = (X_i, Y_i)$ é eficiente de Pareto se, e somente se, nenhum agente envolvido no processo de troca pode melhorar sua utilidade sem reduzir a utilidade do outro, o que significa dizer que cada agente maximiza sua utilidade condicionada ao nível de utilidade dos demais.

Assim, o que se considera é que cada indivíduo está em sua mais alta curva de indiferença possível, dada a curva de indiferença da outra pessoa. Atingindo esse ponto, os agentes não têm mais motivação para continuar o processo de troca, visto que, fora dele, alguém perderá algum nível de satisfação.

A seqüência de alocações eficientes gera, ao longo da caixa de Edgeworth, um conjunto de pontos, e a linha (curva) que conecta essas alocações eficientes de Pareto é denominada de *linha (ou curva) de contrato*. Ela ganha esse nome porque simboliza, de fato, as diversas possibilidades acordadas (contratuadas) entre ambas as partes envolvidas no processo de troca – nesse caso, os agentes A e B.

Além da definição formal, descrita nesta seção, existem algumas definições alternativas para a alocação eficiente de Pareto:

- não há como fazer com que todos melhorem;

- não há como fazer com que um indivíduo melhore sem piorar a situação do outro;
- todos os ganhos de comércio foram exauridos; ou
- não há troca mutuamente vantajosa para ser efetuada.

Assim, formalmente, uma alocação factível **z**, qualquer, é eficiente de Pareto se não existe outra alocação factível **z'**, tal que todos os agentes estritamente prefiram **z'** a **z**.

13.2.5. Alocações eficientes de Pareto e cálculo

Até agora, foram apresentadas premissas e considerações variadas sobre os incentivos à troca e os limites envolvendo esse procedimento. É importante, a partir de agora, compreender o formato de resolução algébrica de problemas envolvendo a troca pura. Matematicamente, a definição de alocação eficiente de Pareto implica resolver o seguinte problema:

$$\text{MAX } U_A (X_A, Y_A) \text{ sujeito a:} \qquad (13.1)$$

1) $U_B(X_B, Y_B) \geq U_0$ (a utilidade final do indivíduo B é, no mínimo, igual ao nível inicial)

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{2)} & X_A + X_B \leq w_x^A + w_x^B = w_x \\ \textbf{3)} & Y_A + Y_B \leq w_Y^A + w_Y^B = w_y \end{array}\right\} \text{Condição de factibilidade}$$

Na formulação de Lagrange, tem-se:

$$L = \text{Max } U_A (X_A, Y_A) + \lambda [U_B (X_B, Y_B) - U_0] + \sigma_x (w_x - X_A - X_B) + \sigma_y (w_y - Y_A - Y_B) \qquad (13.2)$$

As condições de primeira ordem para solução interior, isto é, $X_i > 0$ e $Y_i > 0$, $\forall i$, são:

$$\begin{cases} 1)\ \partial L/\partial X_A = \dfrac{\partial U_A}{\partial X_A} - \sigma_x = 0 \\ 2)\ \partial L/\partial Y_A = \dfrac{\partial U_A}{\partial Y_A} - \sigma_y = 0 \\ 3)\ \partial L/\partial X_B = \dfrac{\lambda \partial U_B}{\partial X_B} - \sigma_x = 0 \\ 4)\ \partial L/\partial Y_B = \dfrac{\lambda \partial U_B}{\partial Y_B} - \sigma_y = 0 \\ 5)\ \partial L/\partial \lambda = [U_B(X_B, Y_B) - U_0] \\ 6)\ X_A + X_B = w_x \\ 7)\ Y_A + Y_B = w_y \end{cases}$$

Dividindo (1) por (2), e (3) por (4), tem-se:

$$\frac{\dfrac{\partial U_A}{\partial X_A}}{\dfrac{\partial U_A}{\partial Y_A}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \therefore TMS^A_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{e} \quad \frac{\dfrac{\partial U_B}{\partial X_B}}{\dfrac{\partial U_B}{\partial Y_B}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \therefore TMS^B_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (13.3)$$

Portanto, a condição necessária para uma alocação factível ser eficiente de Pareto, para a solução interior, é: $TMS^A_{XY} = TMS^B_{XY}$.

Assim, a *curva de contrato*, já descrita como o seqüenciamento dos pontos Pareto eficientes, é *locus* de todas as alocações factíveis que satisfazem a condição de igualdade das taxas marginais de substituição entre os indivíduos.

Embora seja simples compreender, teórica e matematicamente, os procedimentos até aqui delineados, a utilização de um exemplo numérico é bastante útil ao entendimento pleno das informações e solidifica o conhecimento adquirido. Assim, tome-se como exemplo a descrição feita a seguir.

Exemplo 1

Da mesma forma que na apresentação literal (seção 13.2.1), suponha dois indivíduos, A e B, e que se comportem segundo os seguintes padrões:

$$U_A(X, Y) = XY \qquad U_B(X, Y) = XY$$
$$w_A = (10, 5) \qquad w_B = (5, 10)$$

em que U_A é função utilidade do consumidor A; UB, função utilidade do consumidor B; w_A, representação da dotação inicial do consumidor A (cesta inicial); e w_B, representação da dotação inicial do consumidor B (cesta inicial).

Com base nessas informações, é possível responder às seguintes questões:

a) Há motivação por parte dos dois agentes para se envolverem num processo de troca?

b) Em caso afirmativo, utilizando a caixa de Edgeworth, é possível representar a curva de contrato?

c) Pode-se encontrar uma alocação que torne ambos os agentes estritamente melhores.

Comecemos, então, por determinar as alocações eficientes de Pareto, para a solução interior, que permitirão verificar se há, ou não, motivação para a troca entre esses indivíduos. Tem-se a condição de que $TMX^A_{XY} = TMX^B_{XY}$.

$$TMS^A_{x,y} = \frac{Y_A}{X_A} \quad \text{e} \quad TMS^B_{x,y} = \frac{Y_B}{X_B}$$

$$TMS^{A}_{x,y} = TMS^{B}_{x,y} = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{Y_B}{X_B}$$

Como visto na seção 13.2.5, a condição de factibilidade diz que a quantidade consumida pelos dois indivíduos não pode, em conjunto, ser superior à quantidade existente de mercadorias, já que não se supõe a possibilidade de produção. Isso implica dizer que $X_A + X_B = 15$ e $Y_A + Y_B = 15$. Em outras palavras, $X_B = 15 - X_A$ e $Y_B = 15 - Y_A$. Substituindo essa restrição quantitativa na equação da taxa marginal, tem-se:

$$\frac{Y_A}{X_A} = \frac{15 - Y_A}{15 - X_A} \therefore Y_A = X_A$$

Assim, a linha de contrato é formada pelas alocações em que $Y_A = X_A$, sendo, portanto, uma reta partindo da origem correspondente ao indivíduo A. Como a caixa é quadrada (15x15), nesse caso, a linha de contrato passará, também, pela origem correspondente ao indivíduo B, conforme mostra a Figura 13.2.

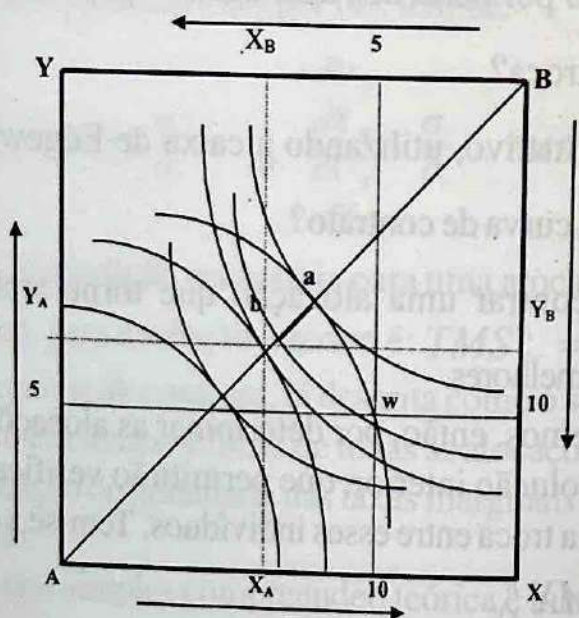



Figura 13.2 - Exemplificação da curva de contrato

Fonte: Elaborado pelos autores.

Dessa maneira, a resposta da questão *a* é, claramente: sim, há motivação para troca, uma vez que a dotação inicial não pertence à linha de contrato, indicando que ambos podem melhorar se se envolverem num mecanismo de troca.

De fato, é possível observar que, se ambos permanecerem com suas dotações iniciais, os níveis de utilidade são:

$U_A(w_x, w_y) = U_A(10,5) = 10 \times 5 = 50$, e;

$U_B(w_x, w_y) = U_B(5,10) = 5 \times 10 = 50$.

Feita a curva de contrato, no interior da caixa (Figura 13.2), cumpre-se o segundo objetivo proposto (letra b).

Consideremos, agora, uma alocação factível em que A recebe $Z_A = (6, 9)$ e B recebe $Z_B = (9, 6)$. Com esta alocação, $U_A = 54$ e $U_B = 54$. Portanto, ambos estão melhores, implicando que a dotação inicial não é eficiente de Pareto, uma vez que existe pelo menos uma alocação factível que torna ambos os agentes estritamente melhores.

A questão a ser respondida é: seria essa alocação a melhor possível? Não, pois essa alocação não é eficiente de Pareto, indicando que eles podem melhorar, continuando o processo de troca.

Uma alocação eficiente de Pareto que poderia ser o resultado final do processo de troca seria distribuir para cada agente 7,5 unidades de cada bem. Essa alocação é eficiente de Pareto, visto que a quantidade dos bens X e Y que cada agente recebe é igual. Nesse caso, o nível de utilidade de cada agente passaria para 7,5 x 7,5 = 56,25, superior ao nível de todas as alocações anteriores.

É importante ressaltar que essa não é a única alocação eficiente de Pareto. *Todas as alocações que se encontram no segmento* $\overline{ab}$ *da curva de contrato são candidatas a um equilíbrio de Pareto.*

Na verdade, qualquer alocação dentro da "lente" e que satisfaz a condição de igualdade de taxa marginal de substituição entre os indivíduos é uma alocação candidata a ser resultante do sistema de troca. Todavia, não é possível, sem informações complementares, precisar qual delas seria a alocação final. Isso significa dizer que o sistema de equilíbrio de Pareto, por si só, não tem como prever a alocação final que cada indivíduo terá após o mecanismo de troca pura, mas apenas definir um conjunto de

prováveis alocações.

A determinação de uma alocação de forma precisa é feita utilizando-se o conceito de equilíbrio de Walras, conhecido como Equilíbrio Walrasiano, Equilíbrio Competitivo ou Equilíbrio de Mercado, que será descrito a seguir.

13.2.6. Equilíbrio de mercado

O equilíbrio de mercado (equilíbrio Walrasiano ou equilíbrio competitivo) procura determinar a alocação final que cada agente escolherá numa situação competitiva, em que a quantidade que cada indivíduo deseja comprar de cada bem se iguale à quantidade disponível à venda. Em outras palavras, procura-se estabelecer um nível de preço para cada bem, de tal sorte que a demanda excedente de cada bem seja nula.

A demanda excedente de um bem X (e_x) é a diferença entre a quantidade demanda por um dado agente (X_A) menos sua respectiva dotação inicial:

$$e_A^x = X_A - w_A^X$$

Uma alocação de equilíbrio Walrasiano é uma lista de preços (p) e quantidades de bens que satisfaz as seguintes condições:

a) a alocação é factível; e

b) cada agente escolhe as quantidades ótimas sujeito às restrições de renda.

Considerando o caso de dois bens e dois indivíduos, essa definição significa que cada agente resolve o seguinte problema:

$$\text{Max } \mathbf{U}_A(\mathbf{X}_A, \mathbf{Y}_A) \text{ sujeito à}$$

$$\mathbf{p}_x\mathbf{X}_A + \mathbf{p}_y\mathbf{Y}_A = p_x w_A^x + p_y w_A^y$$

A resposta desse problema é a função de demanda ordinária, já discutida nos capítulos anteriores. A única diferença é que a renda é expressa de forma alternativa, em função da dotação inicial de cada indivíduo.

Evidentemente, para um vetor de preços arbitrário, as quantidades demandadas podem não ser iguais às quantidades ofertadas. Dessa forma, torna-se necessário incluir a restrição de que todos os mercados apresentem demanda excedente para cada indivíduo igual a zero:

$$\mathbf{X_A} + \mathbf{X_B} = w_A^X + w_B^X \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Y_A} + \mathbf{Y_B} = w_A^Y + w_B^Y$$

ou,

$$X_A - w_A^X + X_B - w_B^X = 0 \therefore e_A^X + e_B^X = 0 \quad \text{e}$$

$$Y_A - w_A^Y + Y_B - w_B^Y = 0 \therefore e_A^Y + e_B^Y = 0$$

Considere, nesse sentido, a Figura 13.3, que reproduz o mesmo problema anteriormente comentado. Nele, a linha que passa pelo ponto w, dotação inicial dos agentes, é a linha orçamentária ao nível de preços p_x e p_y, cuja inclinação é a relação de preços, $\rho = \dfrac{p_x}{p_y}$. Nesse caso, as quantidades demandadas por cada agente são X_A, X_B, Y_A e Y_B, e a relação de preços ρ representa uma situação de equilíbrio competitivo?

Observe que a demanda excedente do bem X para o indivíduo A (e_A^x) é igual a $\mathbf{X_A}$ **- 10** e a demanda excedente do bem X para o indivíduo B (e_B^X) é igual a $\mathbf{X_B}$ **- 5.** Claramente, a demanda excedente de B por X, pelo gráfico, é inferior à demanda excedente de A por X. Conseqüentemente, a demanda excedente por X não é nula, indicando que esse mercado, nessas condições, não se encontra em equilíbrio competitivo.

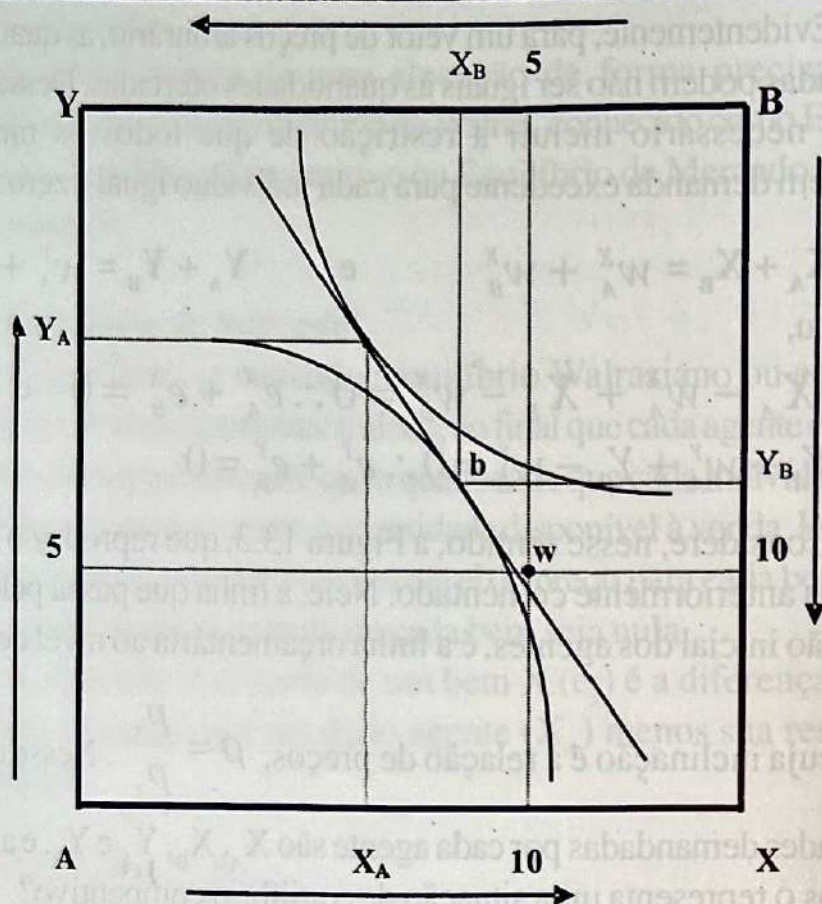



Figura 13.3 - Aproximação da busca do equilíbrio competitivo

Fonte: Elaborado pelos autores.

A única alocação, nesse problema, que atende aos requerimentos de um equilíbrio competitivo é a alocação a^*, mostrada na Figura 13.4. A alocação a^*, em que a relação de preços é ρ^* e as quantidades demandadas são $\mathbf{X^*}$ e $\mathbf{Y^*}$, é o equilíbrio competitivo, uma vez que os dois indivíduos estão em seus níveis ótimos de consumo e não há demandas excedentes aos preços $\mathbf{p^*}$.

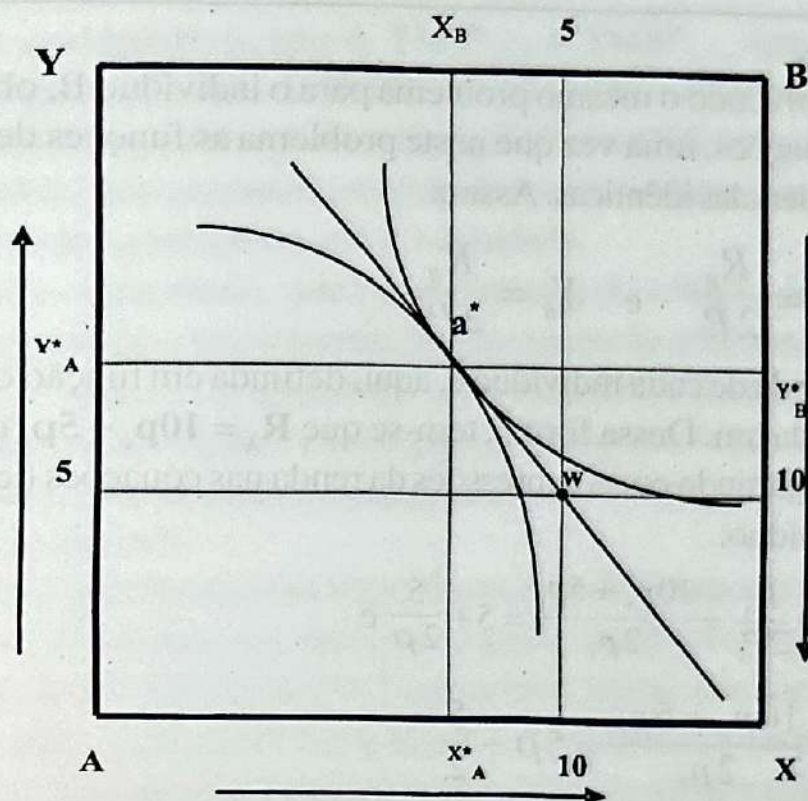



Figura 13.4 - Explicitação gráfica do equilíbrio competitivo

Fonte: Elaborado pelos autores.

13.2.7. Derivação matemática do equilíbrio competitivo

Além da observação gráfica, é útil verificar a derivação matemática do equilíbrio competitivo. Por questões didáticas, serão utilizados os mesmos dados apresentados no exemplo discutido anteriormente. Como visto, cada agente enfrenta o seguinte problema:

MAX $U_A(X_A, Y_A)$ sujeito a:

$$p_x X_A + p_y Y_A = p_x w_A^x + p_y w_A^y$$

Utilizando as funções de utilidade e formulando o Lagrange, tem-se:

$$L = \text{Max } X_A Y_A + \lambda[R - p_x X_A + p_y Y_A]$$

$X_A = \dfrac{R_A}{2P_x}$ e $Y_A = \dfrac{R_A}{2P_Y}$, que são as equações de demanda

ordinária.

Resolvendo o mesmo problema para o indivíduo B, obtêm-se as mesmas equações, uma vez que neste problema as funções de utilidade foram consideradas idênticas. Assim:

$$X_B = \frac{R_B}{2P_x} \quad \text{e} \quad Y_B = \frac{R_B}{2P_Y}$$

A renda de cada indivíduo é, aqui, definida em função da dotação inicial de cada um. Dessa forma, tem-se que $\mathbf{R_A = 10p_x + 5p_y}$ e $\mathbf{R_B = 5p_x + 10p_y}$. Substituindo essas expressões da renda nas equações de demanda de cada indivíduo:

$$X_A = \frac{R_A}{2P_x} = \frac{10p_x + 5p_y}{2p_x} = 5 + \frac{5}{2\rho} \text{ e}$$

$$Y_A = \frac{R_A}{2P_Y} = \frac{10p_x + 5p_Y}{2p_Y} = 5\rho + \frac{5}{2}$$

$$X_B = \frac{R_B}{2P_x} = \frac{5p_x + 10p_y}{2p_x} = \frac{5}{\rho} + \frac{5}{2} \text{ e}$$

$$Y_B = \frac{R_B}{2P_Y} = \frac{5p_x + 10p_Y}{2p_Y} = \frac{5\rho}{2} + 5$$

A condição de factibilidade, já comentada, é $\mathbf{X_A + X_B = 15}$

$$5 + \frac{5}{2\rho} + \frac{5}{\rho} + \frac{5}{2} = 15 \therefore 10\rho + 5 + 10 + 5\rho = 30\rho \therefore \rho = 1$$

Portanto, $\mathbf{X_A = 7{,}5; X_B = 7{,}5; Y_A = 7{,}5}$ e $\mathbf{Y_B = 7{,}5}$

Vale ressaltar que na maximização da função utilidade, condicionada à dotação inicial, tem-se como condição de primeira ordem que, para cada indivíduo, $TMS^A_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$. Como a relação de preços é a mesma para todos os indivíduos, as TMS entre os indivíduos devem ser iguais no

equilíbrio competitivo, isto é, $TMS^{A}_{x,y} = TMS^{B}_{x,y}$, que é condição necessária para eficiente de Pareto. *Isso significa dizer que a alocação de equilíbrio competitivo é uma alocação Pareto Eficiente.* Essa relação é conhecida como primeiro teorema da teoria do Bem-Estar. Observe, no entanto, que a recíproca não é verdadeira.

Fica claro, então, que a compreensão da solução dos problemas de troca pura exige, tão-somente, a observação de critérios matemáticos simples, e mesmo os aspectos relacionados à teoria são de fácil entendimento. Contudo, a base aqui delineada é fundamental para a compreensão de outros temas importantes e correlatos, como os discutidos no próximo capítulo.

Para aprimorar esse entendimento, são listados a seguir alguns exercícios, divididos em duas categorias: resolvidos e propostos. Os exercícios resolvidos têm por finalidade orientar o leitor em algumas questões adicionais, tanto em teoria quanto na prática. Os propostos são o desafio adicional ao avanço do conhecimento sobre o tema.

Todos os exercícios, em maior ou menor grau, são adaptações de proposições de diferentes autores, mais ou menos conhecidos, sendo importante destacar que vários foram resolvidos (total ou parcialmente) por professores vinculados a importantes instituições de ensino em economia. Nesse sentido, sempre que ocorrer, haverá citação da fonte de cada uma das respostas ou questões. Importante salientar, ainda, que mesmo aquelas respostas mais completas foram lastreadas em questões de livros-textos reconhecidamente úteis, como base em microeconomia, como Eaton e Eaton (1999), Pindyck e Rubinfeld (2005) e Varian (2007).

13.3. Exercícios resolvidos

1) Por que os efeitos de feedback tornam a análise de equilíbrio geral substancialmente diferente da análise de equilíbrio parcial?

A análise de equilíbrio parcial trata da interação entre oferta e demanda em um mercado, ignorando os efeitos que as variações em determinado mercado possam causar nos mercados de produtos complementares ou substitutos. A análise de equilíbrio geral procura levar

em consideração as inter-relações entre os mercados, possibilitando a realização de previsões mais precisas dos efeitos de mudanças na oferta ou demanda em determinado mercado. Em termos ideais, a análise deveria considerar todas as possíveis inter-relações entre mercados; entretanto, esta é uma tarefa muito complexa, cabendo ao economista identificar os mercados que estejam mais diretamente relacionados ao mercado de interesse, de modo a concentrar a análise nesses mercados (Fonte: Prof. Edson Domingues, Departamento de Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG).

2) *Explique, no diagrama da caixa de Edgeworth, de que forma um determinado ponto consegue simultaneamente representar as cestas de mercado possuídas por dois consumidores.*

O diagrama da caixa de Edgeworth permite representar a distribuição das quantidades disponíveis de dois bens entre dois indivíduos. A caixa é desenhada invertendo-se as curvas de indiferença de um indivíduo e sobrepondo-as às curvas de indiferença do outro indivíduo. Os lados da caixa representam as quantidades totais disponíveis dos dois bens. A distância entre o eixo horizontal e cada ponto ao longo do eixo vertical indica a quantidade do bem 1 alocada para cada consumidor. Para um dos consumidores, a distância é medida de cima para baixo, enquanto para o outro consumidor a distância é medida de baixo para cima. De forma análoga, os pontos ao longo do eixo horizontal representam as quantidades do bem 2 alocadas para cada consumidor. Cada ponto na caixa representa, assim, uma alocação diferente dos dois bens entre os consumidores (Fonte: Prof. Edson Domingues, Departamento de Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG).

3) *Em uma análise de trocas utilizando um diagrama da caixa de Edgeworth, explique a razão pela qual a taxa marginal de substituição dos dois consumidores é igual em cada um dos pontos da curva de contrato.*

A curva de contrato é o conjunto de pontos, numa caixa de Edgeworth, em que as curvas de indiferença dos dois indivíduos são tangentes. Sabe-se que a taxa marginal de substituição é igual à inclinação (multiplicada por –1) da curva de indiferença. Além disso, sabe-se que, no ponto de tangência entre duas curvas, suas inclinações são iguais. Logo, supondo que as curvas de indiferença sejam convexas, pode-se concluir que, ao longo da curva de contrato, as taxas marginais de substituição entre os dois bens devem ser iguais para os dois indivíduos (Fonte: Prof. Edson Domingues, Departamento de Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG).

4) De que forma a fronteira de possibilidades de produção se relaciona com a curva de contrato de produção?

É possível apresentar, em um gráfico, os níveis de produção de cada bem correspondentes a cada ponto da caixa de Edgeworth, representando no eixo vertical os níveis de produção de um bem e, no eixo horizontal, a produção do outro bem. A fronteira de possibilidades de produção mostra os níveis de produção de cada bem para cada um dos pontos eficientes ao longo da curva de contrato. Os pontos que se encontram entre a origem e a fronteira de possibilidades de produção são factíveis, mas ineficientes. Por sua vez, os pontos fora da fronteira não são factíveis, dadas as quantidades dos dois insumos disponíveis no mercado e a tecnologia existente. (Fonte: Prof. Edson Domingues, Departamento de Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG).

5) Jane possui oito litros de refrigerante e dois sanduíches. Bob, por outro lado, possui dois litros de refrigerante e quatro sanduíches. Considerando tais posses, a taxa marginal de substituição (TMgS) de Jane, de refrigerante por sanduíches, é 3 e a TMgS de Bob é igual a 1. Desenhe um diagrama da caixa de Edgeworth para mostrar se essa alocação de recursos é eficiente. Em caso positivo, explique a razão. Em caso negativo, quais as trocas que poderiam ser vantajosas para ambos?

A caixa de Edgeworth deve ter dimensão vertical igual a 8+2=10 litros de refrigerante e dimensão horizontal igual a 4+2=6 sanduíches (esse seria o padrão da caixa e, portanto, a solução da primeira pergunta).

Dado que TMgSBob "' TMgSJane, a atual alocação de recursos é ineficiente. Jane e Bob poderiam trocar entre si de modo a aumentar o bem-estar de um deles sem diminuir o bem-estar do outro. Apesar de não se conhecer o formato das curvas de indiferença de Jane e Bob, é conhecida a inclinação de ambas as curvas de indiferença na *alocação atual*: *TMgSJane* = 3 e *TMgSBob* = 1.

Dada essa alocação, Jane está disposta a trocar três sanduíches por um refrigerante, ou abrir mão de um refrigerante em troca de três sanduíches, enquanto Bob está disposto a trocar um refrigerante por um sanduíche. Se Jane desse a Bob dois sanduíches em troca de um refrigerante, seu bem-estar aumentaria, pois ela estaria disposta a dar até três sanduíches pelo refrigerante, mas teria dado apenas dois.

Bob também estaria em situação melhor que antes, pois ele estaria disposto a aceitar um sanduíche para abrir mão do refrigerante, porém teria recebido dois. Se Jane quisesse dar refrigerantes em troca de sanduíches, ela estaria disposta a abrir mão de um refrigerante em troca de três sanduíches. Entretanto, Bob não estaria disposto a abrir mão de mais do que um sanduíche em troca de um refrigerante, de modo que não haveria nenhuma troca entre os dois.

Cabe observar que, no equilíbrio resultante, Jane teria dado todos os seus sanduíches em troca de refrigerantes. Essa é uma solução pouco usual, pois geralmente supõe-se que os consumidores prefiram consumir um pouco de cada bem. Além disso, caso a TMgS de Jane na alocação atual fosse 1/3 em vez de 3, ela estaria disposta a abrir mão de um sanduíche em troca de três refrigerantes, ou aceitar 1/3 de sanduíche em troca de um refrigerante. Bob, por sua vez, estaria disposto a dar um sanduíche inteiro em troca de um refrigerante, o que deixaria Jane em melhor situação do que originalmente e resultaria em uma alocação final mais balanceada. (Fonte: Prof. Dr. Moisés A. Resende Filho).

13.4. Exercícios propostos

Marque as questões que julgar verdadeiras

1. O critério de Pareto diz que o equilíbrio geral de uma economia eficiente é:
a) A menos que alguém deseje algum equilíbrio diferente.
b) Em todas as condições.
c) Se deixar alguém melhor, faria com que alguém ficasse pior.
d) Se a maioria dos eleitores fosse a seu favor.

2. Qual das afirmações não é verdadeira para diagramas da caixa de Edgeworth:
a) Cada ponto indica uma cesta de consumo.
b) Curvas de diferença são convexas em relação à origem apropriada.
c) Curvas de indiferença convexas regulares indicam ótimos de Pareto.
d) Suas dimensões refletem as quantidades disponíveis de dois bens.

3. Dados os pressupostos para um equilíbrio geral, uma alocação eficiente é:
a) Ser apoiado pela maioria dos votantes, caso se trate de um acordo coletivo.
b) Ser permitido por lei.
c) Ser constitucional e não houver impedimento distributivo.
d) A TMS for idêntica para todos os indivíduos.

4. A curva de contrato representa todas:
a) As oportunidades de ganhos derivados das trocas.
b) As possibilidades de trocas injustas.
c) As possíveis trocas voluntárias.
d) As tangências entre as curvas de indiferença.

5. Quando todos os produtores em uma economia têm taxas marginais de substituição técnica idênticas e todos os recursos são usados para produzir bens:

a) O mix de produtos é eficiente e a distribuição é socialmente justa.
b) As cestas de bens produzidas estão na fronteira das possibilidades de produção.
c) A economia está no equilíbrio geral.
d) A taxa marginal de transformação é igual à taxa marginal de substituição técnica comum.

6. Qual das condições a seguir não é necessária para obtenção de eficiência no equilíbrio geral?
a) A taxa marginal de transformação na economia tem que ser igual à taxa marginal de substitui-ção de cada consumidor.
b) As taxas marginais de substituição devem ser diferentes para todos os consumidores.
c) As taxas marginais de substituição técnica devem ser iguais para todas as firmas.
d) Todos os consumidores precisam ter rendas idênticas.

7. Qual das seguintes é uma condição necessária para que o mix de produtos de uma economia seja eficiente:
a) Os consumidores devem ter taxas marginais de substituição idênticas.
b) Os produtores devem ter taxas marginais de transformação idênticas.
c) As taxas marginais de substituição e de transformação são diferentes.
d) Os produtos marginais devem ser idênticos.

8. A eficiência no equilíbrio geral requer que:
a) As taxas marginais de transformação sejam iguais para todos os níveis de produção e a distribuição deverá ser equitativa.
b) A alocação de produtos entre as firmas seja eficiente no sentido de Pareto.
c) As taxas marginais de substituição técnica sejam iguais para todas as firmas.
d) Todos os produtos marginais sejam idênticos de forma que as taxas de substituição também sejam.

Fonte: Professor Sabino Porto Júnior, Departamento de Economia Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, baseado em Eaton e Eaton (1999).

9. Você concorda com essa afirmação: Se todos os pontos de uma linha de contrato são eficientes, então estes pontos são socialmente eficientes. Justifique.

10. Em um diagrama da caixa de Edgeworth, por que os equilíbrios competitivos estão situados na curva de contrato?

13.5. Referências

EATON, B.C.; EATON, D.F. **Microeconomia**. São Paulo: Saraiva, 1999.

HALL, R.E.; LIEBERMAN, M. **Microeconomia**: princípios e aplicações. Thomson, 2003. 603 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia.** 6.ed. New York: Prentice Hall, 2005. 711 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos - uma abordagem moderna. 7.ed. São Paulo: Campus, 2006. 807 p.

Capítulo 14

Equilíbrio na produção e nos mercados

Ângelo Costa Gurgel[1]
Maurinho Luiz dos Santos[2]

14.1. Introdução

O presente capítulo completa a análise de equilíbrio geral iniciada no capítulo anterior. Pretende-se analisar neste capítulo como se dá o equilíbrio geral nos mercados de fatores, utilizando uma análise bastante similar. Ainda, é introduzida a noção de equilíbrio geral nos mercados, que se daria, de forma simultânea, na produção e nas trocas. Primeiramente, será analisada uma situação em que existe apenas um consumidor e, posteriormente, uma situação com dois consumidores. Finalmente, apresentam-se algumas aplicações das idéias de equilíbrio geral no comércio internacional e teoremas relacionados com mudanças em preços e em dotação de fatores na economia. Como nos demais capítulos do livro, são apresentados após a teoria, alguns exercícios resolvidos e propostos outros para fixação e aplicação da teoria.

14.2. Equilíbrio na produção

O equilíbrio geral nas trocas, analisado no capítulo 13, e a caixa de Edgeworth podem ser utilizados para entender como se dá a escolha eficiente dos insumos ou fatores de produção em um processo produtivo.

[1] Professor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo (FEA-RP/USP). e-mail: angelocg@usp.br.
[2] Professor do departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: mlsantos@ufv.br

De forma análoga à alocação eficiente de mercadorias no equilíbrio nas trocas, as condições necessárias para o equilíbrio geral na produção de dois bens ou mercadorias, Y_A e Y_B, empregando dois fatores, L e K, podem ser obtidas utilizando-se a análise de equilíbrio geral.

Para limitar a análise ao mercado de fatores, suponha que existam apenas duas firmas, A e B, cada qual produzindo um dos bens, e os preços dos bens produzidos sejam fixos, ou seja, as firmas produtoras são tomadoras de preços, de forma que suas escolhas de produção não são capazes de influenciar os preços de mercado desses bens.[3]

Para representar a produção através da caixa de Edgeworth, considera-se que cada um dos eixos mede a quantidade de cada um dos fatores, enquanto a produção de cada bem é representada por curvas isoquantas a partir de cada origem, nos cantos inferior esquerdo (firma A produzindo Y_A) e superior direito (firma B produzindo Y_B). A extensão total da caixa de Edgeworth é delimitada pela dotação inicial disponível dos fatores para a produção dos bens. A Figura 14.1 apresenta o fator L no eixo horizontal, na dotação de 10 unidades; o fator K no eixo vertical, na dotação de 8 unidades; a origem O_A para a produção do bem Y_A; e a origem O_B para a produção de Y_B. No lugar das curvas de indiferença traçadas no capítulo 13 para definir o nível de utilidade dos consumidores, traça-se agora as isoquantas para cada processo produtivo, cada qual representando as diversas combinações possíveis dos fatores K e L para produzir uma determinada quantidade de cada um dos bens. Observe que, na Figura 14.1, as isoquantas Y_{A1}, Y_{A2} e Y_{A3} representam níveis de produção do bem Y_A e devem ser vistas a partir da origem O_A, enquanto as isoquantas Y_{B1}, Y_{B2} e Y_{B3} representam níveis de produção do bem Y_B, que são maiores quanto mais afastados estiverem da origem O_B.

Cada ponto da caixa de Edgeworth representa uma combinação

---

[3] Note que, em uma economia com apenas duas firmas decidindo como melhor alocar seus fatores produtivos para produzir dois bens, não seria realista supor que essas firmas não fossem capazes de influenciar os preços dos bens. A pressuposição de tomadoras de preços, portanto, é apenas uma forma de simplificar o modelo de forma a acomodar o comportamento mais simples possível na análise de equilíbrio geral. Pode-se tornar a pressuposição mais realista se considerar que, em vez de duas firmas, a economia fosse composta de um número muito grande de dois grupos de firmas, cada grupo produzindo um bem com tecnologias semelhantes.

dos fatores K e L sendo utilizada para produzir determinada quantidade dos bens Y_A e Y_B. Dessa forma, o ponto D na Figura 14.1 mostra a combinação de seis unidades de L e três unidades de K para produzir A_2 unidades de Y_A, e a combinação de quatro unidades de L e cinco unidades de K para produzir B_2 unidades de Y_B.

Para que uma combinação qualquer dos insumos seja considerada uma forma eficiente de produzir os bens, é necessário atingir um nível de produção para cada bem, que só pode ser aumentado se causar a redução na produção do outro bem. Ou seja, se para uma determinada alocação dos fatores maiores quantidades de um bem só puderem ser obtidas com uma realocação de fatores que reduza a quantidade produzida do outro bem, então atingiu-se uma alocação tecnicamente eficiente.[4]

Na Figura 14.1, o ponto E, que indica uma alocação inicial de fatores entre as firmas, não representa uma alocação eficiente, uma vez que maior quantidade de pelo menos um dos dois bens pode ser obtida por combinações dos fatores dentro ou sobre o arco formado pelas isoquantas A_2 e B_2, como, por exemplo, a combinação de fatores determinada pelo ponto D.

Para atingir o ponto D, a partir do ponto E, basta desviar um pouco do fator L utilizado pela firma A para a firma B, e parte do fator K utilizado na produção de B para a produção de A. Dessa forma, a produção de A pode aumentar de Y_{A1} para Y_{A2}, enquanto a produção de B continua sendo de Y_{B2}.

Os pontos nos quais as isoquantas de produção do bem Y_A tangenciam as isoquantas de Y_B determinam os pontos de eficiência produtiva para a economia de dois fatores e dois produtos. A ligação de todos os pontos imaginários de tangência entre as isoquantas de Y_A e Y_B forma a **curva de contrato da produção**, representada na Figura 14.1 pela curva que liga as origens O_A e O_B. Todos os pontos fora da curva de contrato são pontos de ineficiência produtiva, uma vez que duas isoquantas

[4] A eficiência de Pareto existirá se todas as firmas agirem como maximizadoras de lucro competitivas, com retornos constantes de escala, e se as escolhas de cada firma não afetarem as possibilidades de produção das demais ou as possibilidades de consumo dos consumidores, ou seja, não há externalidades na produção ou no consumo.

quaisquer que passam por esses pontos não se tangenciam, indicando ser possível realocar os fatores de forma a aumentar a quantidade produzida de uma mercadoria sem diminuir a quantidade produzida da outra.

Figura 14.1 - Caixa de Edgeworth para produção de dois bens a partir de dois fatores

Considerando que cada processo produtivo seja representado por uma função de produção côncava, estritamente crescente e diferenciável, ou seja, que os mercados de insumos são competitivos e os processos produtivos possuem retornos constantes à escala, uma alocação eficiente dos fatores deve ser obtida, similarmente à alocação eficiente de bens obtida no capítulo 13. Sendo os mercados de insumos competitivos, a remuneração do fator L, que será chamada de P_L, é a mesma independentemente de quanto deste fator está sendo utilizado na produção de Y_A ou de Y_B. Da mesma forma, a remuneração do fator K, P_K, é a mesma para as duas firmas. Considerando que uma firma produzindo um dos bens procura maximizar seus lucros na produção do bem, esta deve igualar a relação de preços dos insumos à relação entre os produtos marginais dos dois insumos, como definido no capítulo 7:

$$TMST_{LK} = \frac{PMa_L}{PMa_K} = \frac{P_L}{P_K} \qquad (14.1)$$

Essa relação afirma que o lucro máximo é obtido quando a firma iguala sua taxa marginal de substituição técnica (TMST), dada pela relação entre os produtos marginais dos fatores, à relação de preços dos fatores. Vale lembrar o significado dessa relação. Reorganizando os termos da equação (14.1), pode-se obter a relação: $PMa_L / P_L = PMa_K / P_K$ Esta relação indica que a eficiência na produção é obtida quando a produtividade marginal de um fator por unidade monetária (custo unitário do fator) iguala-se à produtividade marginal por unidade monetária do outro fator. Supondo, por exemplo, que a produtividade marginal por unidade monetária do fator L fosse maior que a do fator K, o fator L estaria gerando maiores quantidades de produto por unidade monetária gasta com insumo, fazendo com que a firma desejasse utilizar mais deste fator L, ou menos do fator K, de forma a aproveitar melhor esses insumos. À medida que a firma empregasse maior quantidade de L e, ou, menor quantidade de K, a produtividade marginal de L decresceria e, ou, a produtividade marginal de K aumentaria, até que a relação (14.1) fosse satisfeita, significando que as produtividades marginais dos fatores por unidade monetária igualaram-se. Nessa situação, o custo unitário de se produzir uma quantidade a mais do produto seria o mesmo quando se empregasse qualquer um dos dois insumos. Portanto, a firma não teria mais razões para aumentar ou diminuir as quantidades de um dos dois insumos.

Como se está analisando uma economia formada por duas firmas diferentes, cada qual resolvendo o seu problema de maximização de lucro, cada firma deve procurar atingir a igualdade definida na relação (14.1). Como o preço de cada fator é o mesmo para as duas firmas, ou para a economia como um todo, a condição de equilíbrio geral na produção passa a ser:

$$TMST_{LK}^{A} = \frac{PMa_L^A}{PMa_K^A} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{PMa_L^B}{PMa_K^B} = TMST_{LK}^{B} \qquad (14.2)$$

A relação (14.2) de eficiência na produção também pode ser visualizada graficamente. A TMST representa a inclinação da isoquanta. Para que haja eficiência no uso de dois fatores para a produção de dois bens em mercados competitivos, é necessário que cada firma empregue quantidades de K e L de forma a igualar as inclinações das isoquantas de Y_A e Y_B à relação de preços dos fatores (linha pontilhada na Figura 14.1). O ponto de eficiência também determina uma situação de equilíbrio na produção, já que as firmas não têm nenhum estímulo para mudar as quantidades de fatores empregadas.

Vale notar que a quantidade a ser produzida das mercadorias Y_A e Y_B será influenciada pela demanda por esses bens, o que significa que as firmas devem procurar empregar seus fatores de forma a produzir as quantidades desejadas dos produtos, que serão sinalizadas para o produtor nos mercados competitivos de acordo com os preços dos bens. Essa questão será analisada mais adiante, nos tópicos 14.3 e 14.4, quando se considerar o equilíbrio na produção e na troca ao mesmo tempo. Por enquanto, deve-se ter em mente que qualquer ponto sobre a curva de contrato será um ponto de equilíbrio e eficiência na produção, independentemente de este ponto indicar grandes ou pequenas quantidades produzidas de cada mercadoria. Nesse sentido, o ponto marcado pela origem O_B poderia estar indicando um ponto de eficiência na produção, uma vez que todos os recursos estão sendo empregados apenas para a produção do bem A. Nesse caso, ter-se-ia uma situação na qual o bem Y_B não deve estar sendo desejado pelos consumidores nessa economia.

14.1.1. Derivação das condições de equilíbrio geral nos mercados de fatores

Pretende-se determinar as condições de equilíbrio nos mercados de fatores, considerando que as firmas atinjam a eficiência na produção. Serão consideradas duas firmas, A e B, cada uma produzindo um bem,

chamados de Y_A e Y_B, a partir da dotação dos fatores L e K, com tecnologias de retornos constantes à escala e comportamento competitivo. A quantidade de fator utilizada por cada firma é indicada pelo seu subscrito.

Pela caixa de Edgeworth da Figura 14.1, percebe-se que o problema de escolha dos insumos para uma firma consiste em otimizar a utilização dos fatores disponíveis na economia, tentando produzir na isoquanta mais elevada possível, sem reduzir a quantidade produzida pela outra firma. Dessa forma, pode-se definir o problema da firma como sendo a tentativa de maximizar a sua produção, dada a produção da outra firma e a disponibilidade de fatores na economia. Considerando que a dotação de fatores seja representada por $\bar{L}$ e $\bar{K}$ e o nível inicial de produção da firma B seja $\bar{Y}_B$, a firma A se depara com o seguinte problema de otimização:

$$\text{Max } Y_A = Y_A(L_A, K_A) \qquad (14.3)$$

$$\text{S.a. } \bar{Y}_B = Y_B(L_B, K_B)$$

$$\bar{L} = L_A + L_B \qquad (14.4)$$

$$\bar{K} = K_A + K_B$$

O Lagrangeano desse problema pode ser especificado como:

$$\Gamma = Y_A(L_A, K_A) + \lambda\left[Y_B(L_B, K_B) - \bar{Y}_B\right] + \sigma_L(\bar{L} - L_A - L_B) + \sigma_K(\bar{K} - K_A - K_B) \qquad (14.4)$$

As condições de primeira ordem para uma solução interior para esse problema são:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial L_A} = \frac{\partial Y_A}{\partial L_A} - \sigma_L = 0 \therefore \frac{\partial Y_A}{\partial L_A} = \sigma_L \qquad (14.5)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_A} = \frac{\partial Y_A}{\partial K_A} - \sigma_K = 0 \therefore \frac{\partial Y_A}{\partial K_A} = \sigma_K \qquad (14.6)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial L_B} = \lambda \frac{\partial Y_B}{\partial L_B} - \sigma_L = 0 \therefore \lambda \frac{\partial Y_B}{\partial L_B} = \sigma_L \quad (14.7)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K_B} = \lambda \frac{\partial Y_B}{\partial K_B} - \sigma_K = 0 \therefore \lambda \frac{\partial Y_B}{\partial K_B} = \sigma_K \quad (14.8)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = Y_B(L_B, K_B) - Y_B = 0 \therefore Y_B = Y_B(L_B, K_B) \quad (14.9)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_L} = \bar{L} - L_A - L_B = 0 \therefore \bar{L} = L_A + L_B \quad (14.10)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_K} = \bar{K} - K_A - K_B = 0 \therefore \bar{K} = K_A + K_B \quad (14.11)$$

As relações (14.9) a (14.10) são as condições do problema de otimização condicionada.

Dividindo a equação (14.5) pela equação (14.6), e a equação (14.7) pela equação (14.8), obtém-se:

$$\frac{\frac{\partial Y_A}{\partial L_A}}{\frac{\partial Y_A}{\partial K_A}} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \therefore \frac{PMaL_A}{PMaK_A} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \therefore TMST_{LK}^{A} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \quad (14.12)$$

$$\frac{\lambda \frac{\partial Y_B}{\partial L_B}}{\lambda \frac{\partial Y_B}{\partial K_B}} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \therefore \frac{PMaL_B}{PMaK_B} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \therefore TMST_{LK}^{B} = \frac{\sigma_L}{\sigma_K} \quad (14.13)$$

Igualando as relações (14.12) e (14.13), obtém-se a condição de equilíbrio geral na produção, $TMST^A = TMST^B$.

14.2. Fronteira de produção

Considerando as mercadorias Y_A e Y_B e os fatores K e L citados anteriormente, a fronteira de produção[5] para uma firma, ou para uma economia, representa todas as quantidades de mercadorias que poderiam ser produzidas a partir de uma dotação fixa dos fatores, dado um nível de tecnologia constante. De outra forma, a fronteira de produção procura mostrar todas as combinações de Y_A e Y_B que podem ser obtidas ao se utilizar plenamente os fatores K e L com uma dada tecnologia.

A Figura 14.2 apresenta uma possível fronteira de produção. Pontos no interior da fronteira, como o ponto E, representam alocações ineficientes dos fatores de produção, já que maiores quantidades de Y_A e Y_B, determinadas pela fronteira, poderiam ser produzidas a partir dos fatores disponíveis. Os pontos sobre a fronteira, por sua vez, representam alocações eficientes dos fatores e, portanto, correspondem aos diversos pontos de equilíbrio na produção sobre a curva de contrato de produção da Figura 14.1, como, por exemplo, o ponto D. Os pontos O_A e O_B correspondem aos pontos de origem da caixa de Edgeworth, indicando que todos os fatores estão sendo eficientemente empregados na produção de apenas uma das duas mercadorias. Note que a fronteira de produção é a passagem da representação da curva de contrato da dimensão de insumo para a dimensão de produção.

A inclinação da fronteira de produção em um ponto qualquer da curva determina a taxa marginal de transformação de Y_B em Y_A, ou seja, mostra a quantidade de Y_B de que se deve abrir mão para que, realocando os fatores, se produza uma unidade a mais de Y_A. No capítulo 10 essa relação foi definida pela equação a seguir:

$$TMT = \frac{CMa_A}{CMa_B} \tag{14.14}$$

À medida que se percorre a fronteira de produção da esquerda para a direita, a taxa marginal de transformação, dada pela inclinação da

[5] Também conhecida como fronteira de possibilidades de produção ou curva de transformação.

fronteira, aumenta em módulo, ou seja, a fronteira de produção da Figura 14.2 é côncava. Isso significa que, à medida que se deslocam fatores produtivos da produção de Y_B para a produção de Y_A, deve-se abrir mão de quantidades cada vez maiores de Y_B para se conseguir uma unidade a mais de Y_A. Esse fenômeno ocorre por se considerar que a produtividade de cada fator não é a mesma ao se produzir cada uma das mercadorias. Dessa forma, evidenciam-se os rendimentos decrescentes no uso de cada fator, o que significa que maiores quantidades do fator são necessárias, uma vez que se abre mão de maiores quantidades de uma mercadoria para que se aumente em uma unidade a quantidade produzida da outra mercadoria.

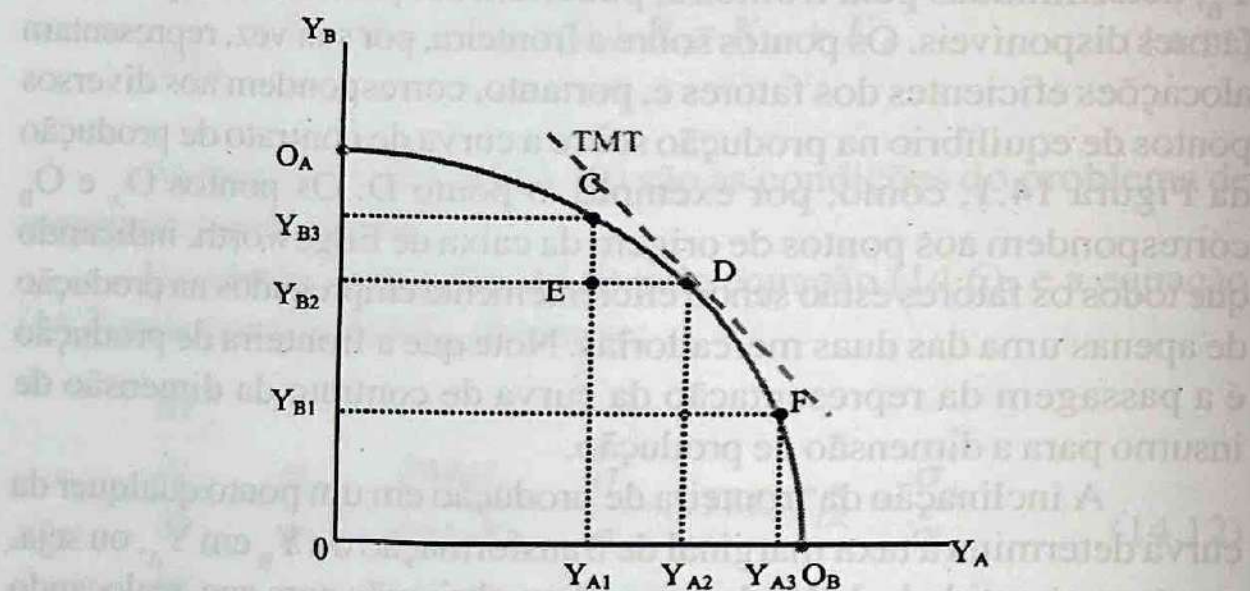



Figura 14.2 - Fronteira de produção

14.3. Equilíbrio na produção e nas trocas com um consumidor

Considerando o equilíbrio na produção, discutido no tópico 14.1, e o equilíbrio nas trocas, discutido no capítulo 13, pode-se considerar agora como se daria o equilíbrio simultâneo na produção e nas trocas, ou o equilíbrio em uma economia simples.

A forma mais simples de apresentar o equilíbrio na troca e na

produção ao mesmo tempo em uma economia é através de um modelo que considere apenas um consumidor, ou que todos os consumidores possam ser representados de forma agregada por meio de um único conjunto de curvas de indiferença. Admite-se que tanto o consumidor quanto as firmas são tomadores de preços nos mercados de bens e de fatores. As firmas precisam alocar os recursos para produzir duas mercadorias diferentes, e o consumidor precisa decidir sua cesta de consumo entre as duas mercadorias produzidas pela firma.

Para que ocorra o equilíbrio na produção e na troca ao mesmo tempo, é necessário atingir a eficiência simultânea nos mercados de fatores e de bens. Isso significa dizer que as mercadorias produzidas a partir dos insumos devem satisfazer os desejos dos consumidores. Em uma economia simples, com um produtor e um consumidor, por exemplo, de nada adiantaria para a firma produzir uma quantidade de um bem que não é completamente demandada pelo consumidor. A firma, nessa situação, mudaria a alocação de recursos de forma a produzir menos dessa mercadoria e mais da mercadoria mais desejada, até atingir a eficiência no uso dos seus recursos e atender com eficiência o desejo do consumidor.

Em termos técnicos, essa eficiência nos dois mercados será atingida apenas quando a taxa marginal de transformação for igual à taxa marginal de substituição para cada consumidor. Isso porque a taxa marginal de substituição mede a disposição do consumidor em adquirir menor quantidade da mercadoria Y_B para adquirir uma unidade adicional da mercadoria Y_A, enquanto a taxa marginal de transformação mede o custo adicional de se obter uma unidade da mercadoria Y_A em termos da menor quantidade da mercadoria Y_B, como evidenciado na relação (14.14).

Um exemplo ajuda a ilustrar essa situação. Se a taxa marginal de substituição for maior que a taxa marginal de transformação, significa que o consumidor está desejando uma maior quantidade do bem Y_A do que está sendo produzida, porque o consumidor está disposto a trocar uma quantidade de Y_B por Y_A maior que o custo adicional de desviar recursos da produção de Y_B para a produção de Y_A. Se o consumidor está valorizando a mercadoria Y_A mais do que ela custa para ser produzida, a decisão lógica do produtor é desviar recursos para a produção de Y_A

para atender ao desejo do consumidor. À medida que maiores quantidades de Y_A forem produzidas e consumidas, a taxa marginal de transformação aumenta (observar a Figura 14.2) e a taxa marginal de substituição diminui, até que as duas se igualem. Nesse momento, atinge-se o equilíbrio na economia e a eficiência nas trocas e na produção.

A Figura 14.3 exemplifica o equilíbrio simultâneo nos mercados de fatores e de bens. Nessa figura são representadas, ao mesmo tempo, as possibilidades de produção e consumo das mercadorias Y_A e Y_B. As possibilidades de produção são representadas pela fronteira de produção e as possibilidades de consumo podem ser representadas por um mapa de curvas de indiferença, mostrando maiores níveis de utilidade no consumo dos bens quanto mais distante da origem estiver a curva de indiferença.

No equilíbrio, a fronteira de produção e a curva de indiferença do consumidor são tangentes, como exemplificado no ponto C. Isso ocorre devido à necessidade de igualdade entre a taxa marginal de substituição e a taxa marginal de transformação.

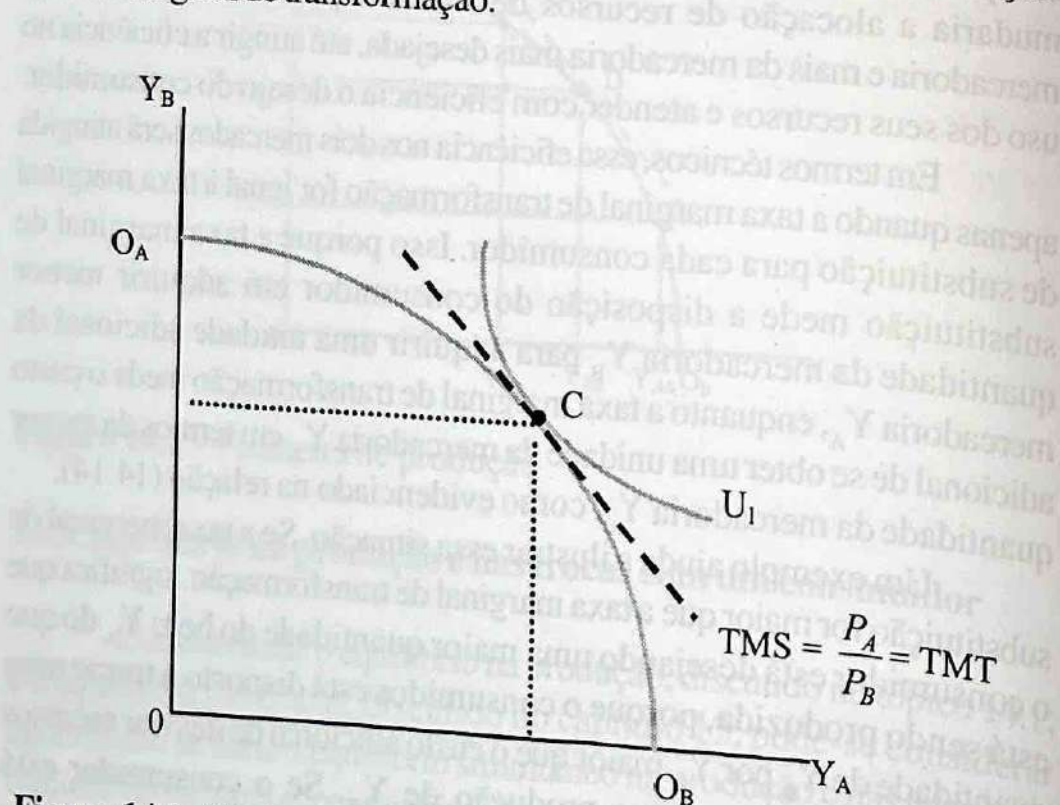



Figura 14.3 - Equilíbrio na produção e no consumo

A relação de igualdade entre taxa marginal de substituição e taxa marginal de transformação ainda revela mais detalhes do equilíbrio de mercado. No capítulo 3 discutiu-se sobre a igualdade entre a taxa marginal de substituição e a relação de preços dos bens no equilíbrio, enquanto no capítulo 10 demonstrou-se a igualdade entre preços e custos marginais no equilíbrio competitivo. Dessa forma:

$$TMS = \frac{P_A}{P_B} = \frac{CMa_A}{CMa_B} = TMT \quad (14.15)$$

Essa relação indica que o equilíbrio nos mercados competitivos é atingido quando a taxa marginal de substituição e a taxa marginal de transformação se igualam à relação de preços das mercadorias. Isso significa dizer que, sendo os mercados perfeitamente competitivos, a eficiência e o equilíbrio devem ser atingidos, mesmo que produtores e consumidores tomem suas decisões de produção e consumo, respectivamente, de forma separada. Nesse caso, o mecanismo de preços irá sinalizar para ambos qual deve ser a decisão eficiente.

A Figura 14.4 ajuda a entender esse processo. A relação de preços $(P_A/P_B)'$ na figura está sinalizando para os produtores a alocação eficiente dos recursos de forma a produzir as quantidades Y_{A1} e Y_{B1}. Já para os consumidores, a escolha ótima de consumo a esses preços deve ser de Y_{A2} e Y_{B2}. Note que, nesse caso, haverá excesso de demanda pelo bem Y_A e excesso de oferta do bem Y_B. Como nessa situação a produção e o consumo não se equilibram, deve ocorrer um ajuste de preços no mercado, refletindo os excessos de oferta e de demanda. Dessa forma, o bem Y_A deve sofrer aumento de preço enquanto o bem Y_B deve sofrer queda de preço, levando a um deslocamento da relação de preços para a direita, ao longo da fronteira de produção da Figura 14.4. O equilíbrio entre produção e consumo – portanto, o equilíbrio no mercado – deve ser alcançado quando a relação de preços for igual a $(P_A/P_B)^*$, como evidenciado no ponto F. Nesse ponto, produtores e consumidores estão dispostos a produzir e consumir as mesmas quantidades dos bens Y_A e

Y_B, não havendo excessos de demanda ou de oferta, e a taxa marginal de substituição se iguala à taxa marginal de transformação e à relação de preços.

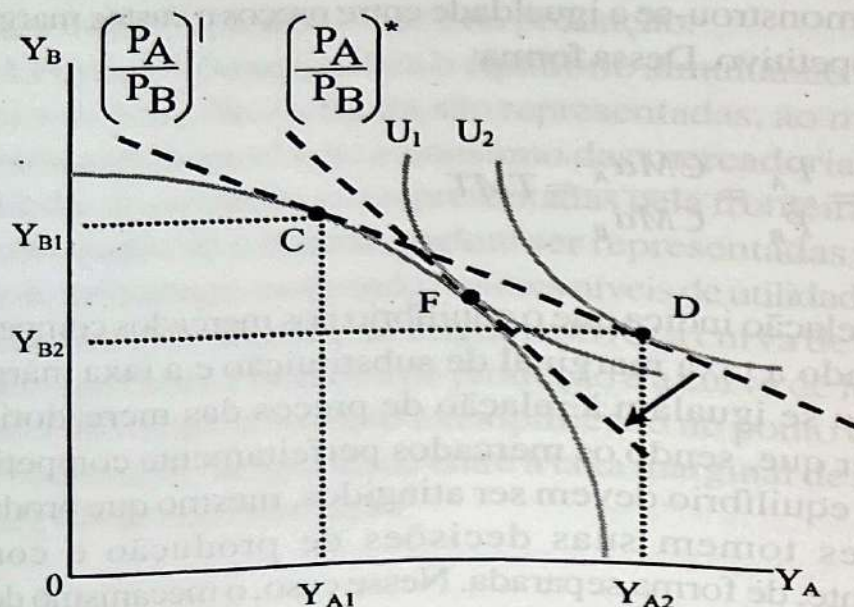



Figura 14.4 - Processo de equilíbrio na produção e no consumo

14.4. Produção e troca com dois consumidores

Outra forma de analisar o equilíbrio geral nos mercados é considerando que a fronteira de produção define um conjunto de possibilidades de consumo, representados através da caixa de Edgeworth. Nessa situação, considera-se que existem duas firmas na economia responsáveis pela alocação de recursos, como nos tópicos anteriores, e dois consumidores que realizam trocas entre si[6], como no capítulo 13. Imagine, ainda, que cada firma seja capaz de produzir os dois bens, Y_A e

[6] Essa situação também pode ser analisada como representando uma economia de muitas firmas e muitos consumidores, sendo os agentes agrupados em dois grupos diferentes de firmas, que possuem funções de produção semelhantes dentro de cada grupo, e dois grupos diferentes de consumidores, com funções de utilidade semelhantes dentro do grupo.

Y_B, e que a quantidade produzida por cada firma passe a representar a dotação inicial de cada consumidor, chamados de A e B, como uma simplificação do fluxo de renda na economia. O paralelo dessa situação com a realidade seria imaginar que os consumidores recebem as remunerações dos fatores utilizados pelas firmas, sendo essa renda expressa em unidades dos bens produzidos. Dessa forma, a satisfação do consumidor pode ser atingida pela troca de bens ou pela realocação de recursos entre firmas para produção de quantidades diferentes dos bens.

Nessa situação, pode-se representar produção e troca na mesma figura. A decisão de uso dos fatores pelas firmas define a quantidade produzida das mercadorias, determinando a dotação de bens que estará disponível para troca pelos consumidores, sendo, portanto, o tamanho da caixa de Edgeworth. A Figura 14.5 exemplifica três possibilidades diferentes para a dotação inicial de bens dessa economia, determinando três tamanhos diferentes para a caixa de Edgeworth, de acordo com as decisões de produção pelas firmas. Assim, o ponto E_1 sobre a fronteira de produção determina que as firmas produzem para a economia uma dotação de Y_{A1} unidades do bem Y_A e Y_{B1} unidades do bem Y_B. Dessa forma, este ponto também determina a origem da caixa de Edgeworth para o consumidor B, de onde partem suas curvas de indiferença U_{B1} e U_{B2}. O ponto de origem da fronteira de produção também é o ponto de origem da caixa de Edgeworth para o consumidor A. O ponto E_2 determina uma caixa de Edgeworth para os consumidores dotada de Y_{A2} unidades do bem Y_A e Y_{B2} unidades do bem Y_B. O ponto E_3, por sua vez, determina uma economia dotada de Y_{A3} e Y_{B3} unidades dos bens.

A decisão de troca pelos consumidores nessa economia segue a condição de equilíbrio nas trocas, ou seja, a taxa marginal de substituição de um consumidor se iguala à taxa marginal de substituição do outro consumidor. Contudo, para que o mercado como um todo esteja equilibrado, a taxa marginal de substituição de cada consumidor deve igualar-se à taxa marginal de transformação, medida na fronteira de produção. A Figura 14.6 mostra essa situação de equilíbrio nas trocas e na produção.

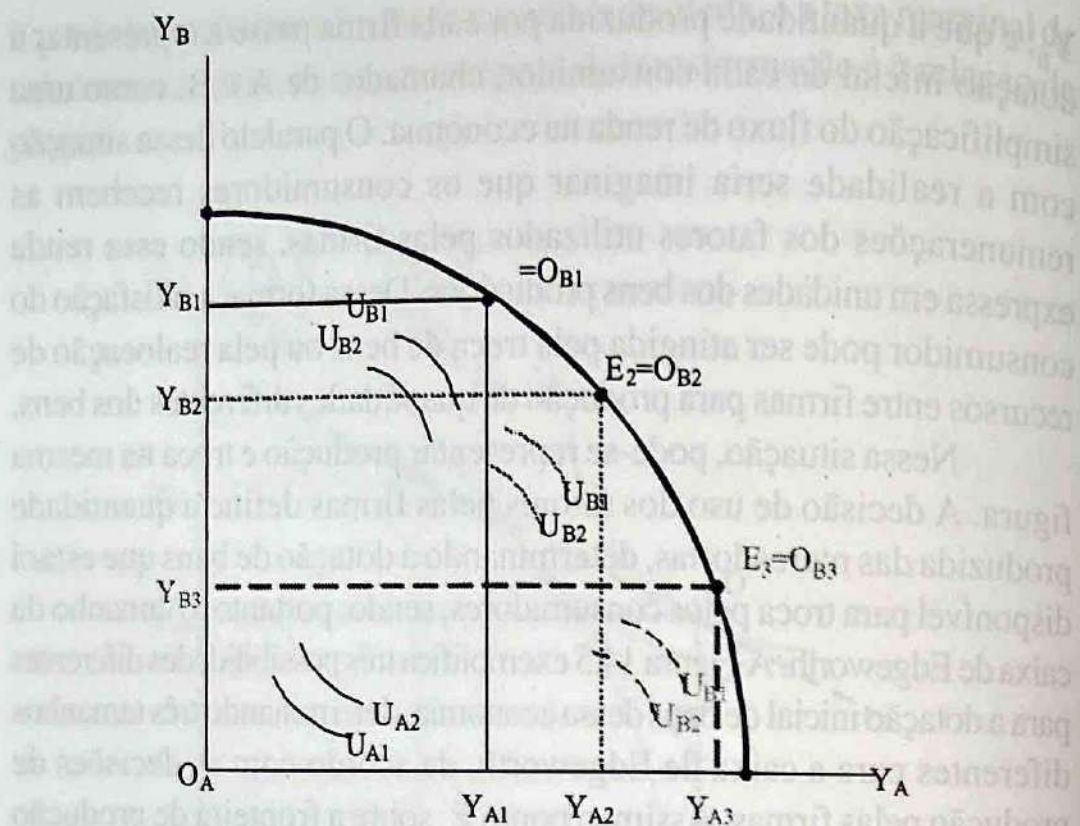



Figura 14.5 - Fronteira de produção delimitando o tamanho da caixa de Edgeworth

Vale ressaltar que o equilíbrio na produção e nas trocas deve ser simultâneo, ou seja, a produção eficiente para o mercado não é definida antes do consumo. Se em determinado momento a taxa marginal de transformação que define as quantidades produzidas dos bens pelas firmas não se iguala às taxas marginais de substituição dos consumidores, as firmas devem realocar os fatores para produzir quantidades diferentes dos bens, definindo uma nova taxa marginal de transformação e uma nova dotação inicial de bens para os consumidores, que realizarão trocas até que suas taxas marginais de substituição se igualem. Esse processo de ajustamento de quantidades produzidas e consumidas ocorre até que, finalmente, a taxa marginal de transformação se iguale às taxas marginais de substituição, e, à relação de preços dos bens.

Outra forma de entender o processo de ajuste na produção e no consumo é considerar que, se a taxa marginal de substituição de um consumidor for diferente da taxa marginal de transformação, significa que

a taxa em que o consumidor está disposto a trocar Y_A por Y_B difere da taxa na qual Y_A pode ser transformado em Y_B. Isso quer dizer que se pode melhorar a condição deste consumidor mudando o padrão de produção. A relação de preços entre os bens no consumo deve indicar para as firmas qual bem deve ser mais produzido e qual deve ser menos, a partir da realocação dos fatores.

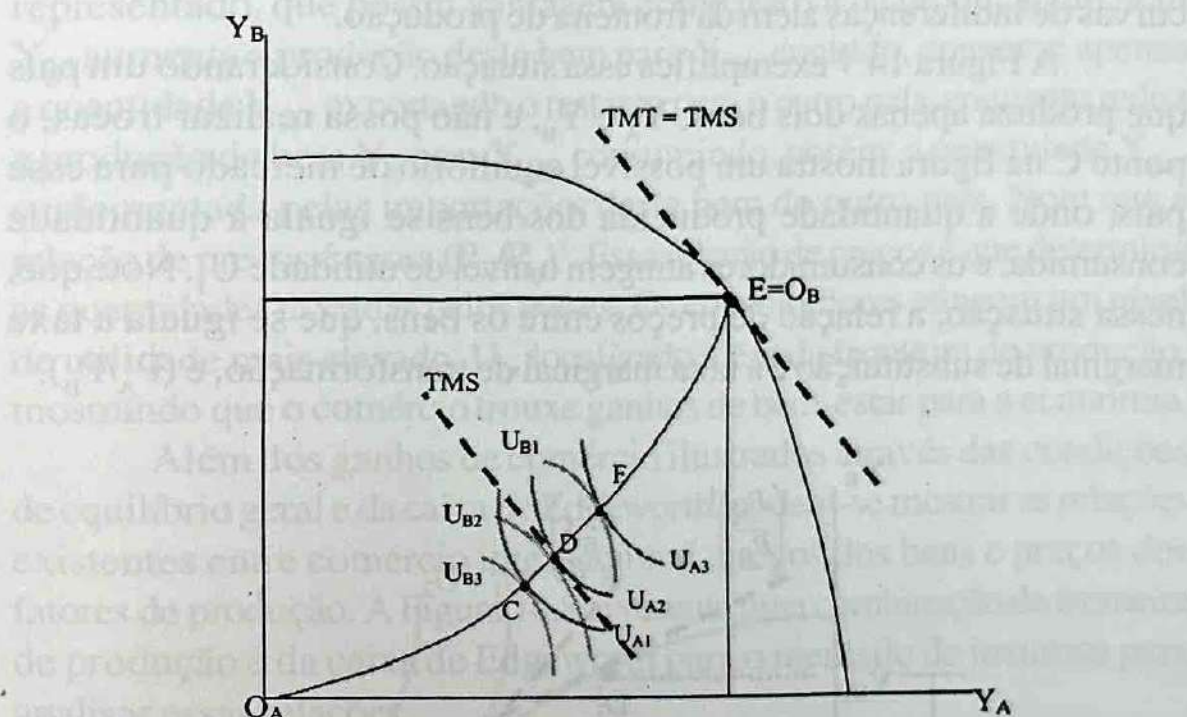



Figura 14.6 - Equilíbrio na produção e na troca com dois consumidores

14.5. Aplicações – livre comércio

O equilíbrio nos mercados discutido no tópico 14.3 pode ser utilizado para analisar os ganhos que o livre comércio traz para os países através da especialização na produção de bens nos quais os países possuem vantagem comparativa.[7]

---

[7] O conceito de vantagem comparativa pode ser definido, de forma simples, como a situação na qual um país possui um menor custo na produção de uma mercadoria Y_A, em relação à mercadoria Y_B, que esse mesmo custo relativo em outro país.

Quando um país vive um regime de autarquia, sem a possibilidade de realizar trocas, deve produzir todas as quantidades de bens que seus consumidores consomem. Isso significa que a curva de indiferença do conjunto de consumidores desse país deve tangenciar a fronteira de produção. Contudo, se o país possui vantagem comparativa na produção de um bem e existe a possibilidade de realizar trocas com outro país que possui vantagem comparativa na produção de outro bem, é possível atingir curvas de indiferenças além da fronteira de produção.

A Figura 14.7 exemplifica essa situação. Considerando um país que produza apenas dois bens, Y_A e Y_B, e não possa realizar trocas, o ponto C na figura mostra um possível equilíbrio de mercado para esse país, onde a quantidade produzida dos bens se iguala à quantidade consumida, e os consumidores atingem o nível de utilidade U_1. Note que, nessa situação, a relação de preços entre os bens, que se iguala à taxa marginal de substituição e à taxa marginal de transformação, é (P_A/P_B).

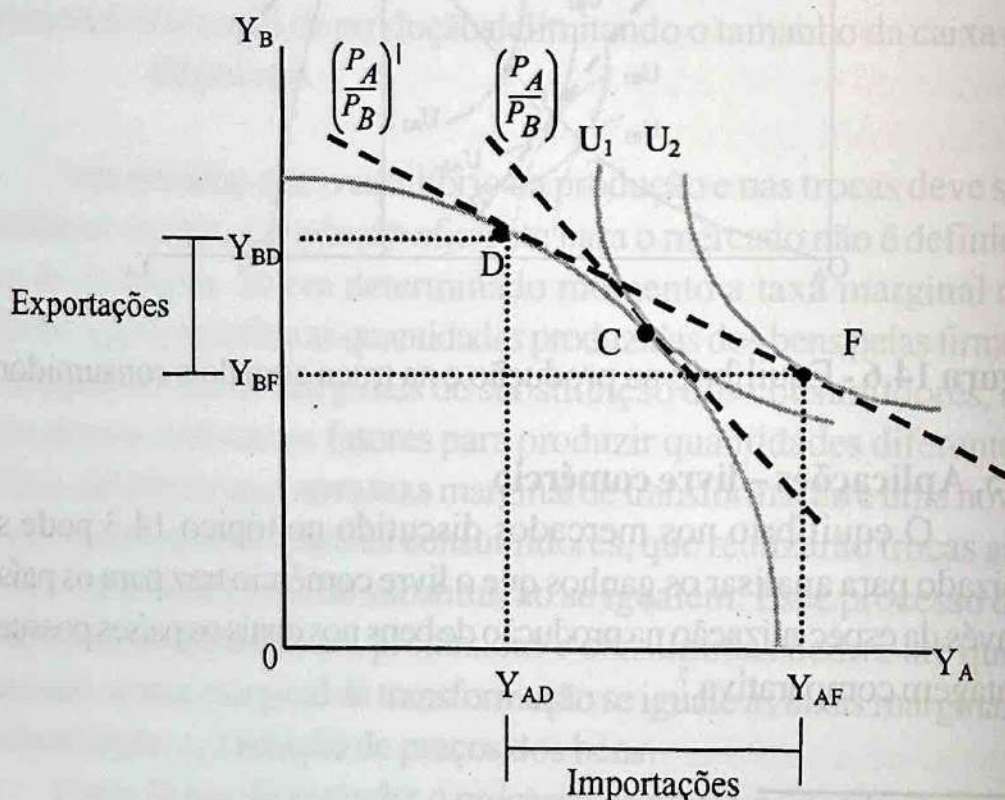



Figura 14.7 - Ganhos do comércio internacional

Agora, considere que este país possua uma vantagem comparativa na produção do bem Y_B em relação a um outro país, enquanto este outro país possui uma vantagem comparativa na produção do bem Y_A. Se for possível a realização de trocas entre esses países, ambos tendem a ganhar com a especialização na produção daquele bem no qual possuem vantagem comparativa. Uma possível situação de equilíbrio para esse caso é representada pelos pontos D e F na Figura 14.7. Nestes pontos, o país representado, que possui vantagem comparativa na produção do bem Y_B, aumenta a produção deste bem para Y_{BD}, contudo, consome apenas a quantidade Y_{BF}, exportando o restante para o outro país, enquanto reduz a produção do bem Y_A para Y_{AD}, consumindo, porém, a quantidade Y_{AF}, suplementada pelas importações deste bem do outro país. Note que a relação de preços é agora $(P_A/P_B)'$. Essa relação de preços é que determina as quantidades trocadas pelos países. Os consumidores atingem um nível de utilidade mais elevado, U_2, localizado além da fronteira de produção, mostrando que o comércio trouxe ganhos de bem-estar para a economia.

Além dos ganhos de comércio ilustrados através das condições de equilíbrio geral e da caixa de Edgeworth, podem-se mostrar as relações existentes entre comércio internacional, preços dos bens e preços dos fatores de produção. A Figura 14.8 apresenta uma combinação da fronteira de produção e da caixa de Edgeworth para o mercado de insumos para analisar essas relações.

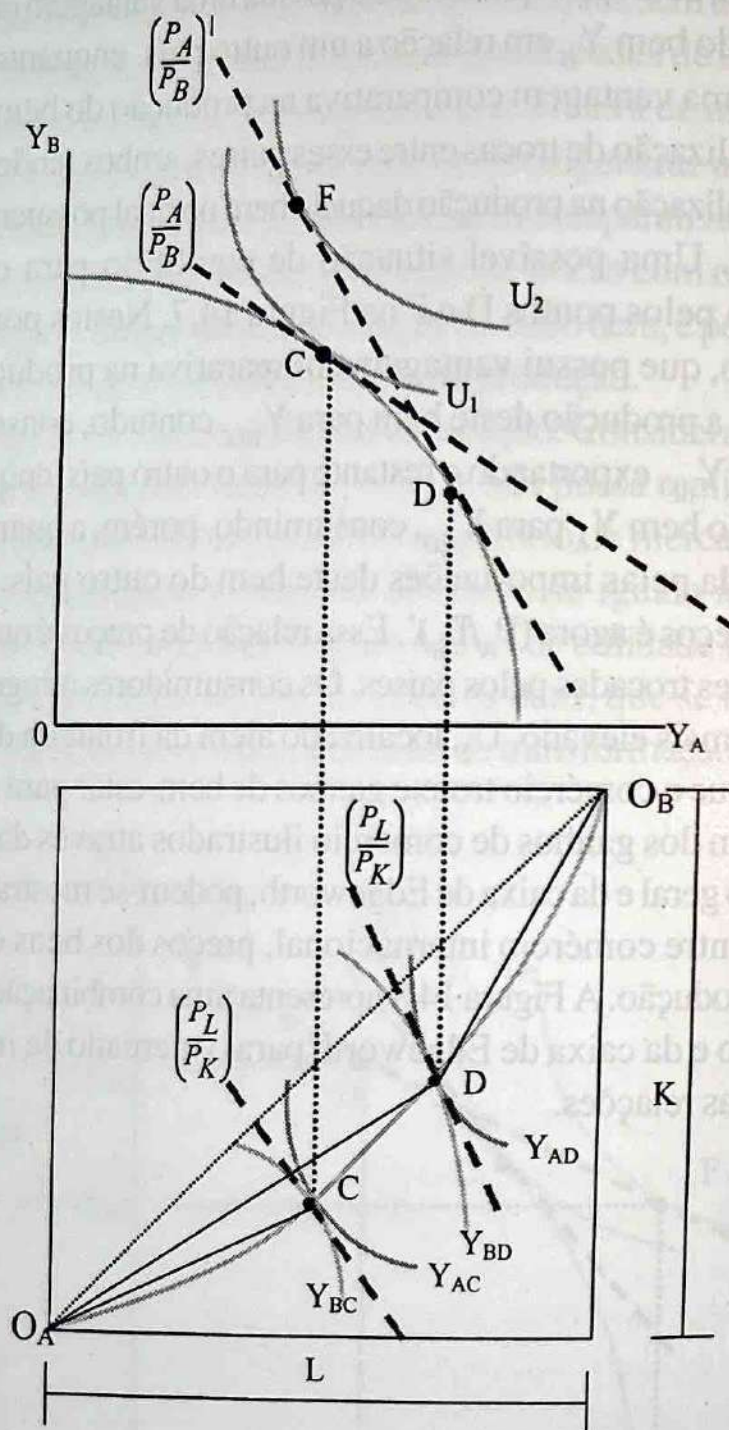



Figura 14.8 - Relação entre preços dos bens e preços dos fatores

Considere inicialmente que o país encontra-se fechado ao comércio internacional, com os mercados de bens e fatores em equilíbrio, dado pelo ponto C; a relação de preços de equilíbrio é dada por (P_A/P_B) na

parte superior da figura. Ainda, suponha que a produção do bem Y_A seja mais intensiva no uso do fator L, enquanto a produção do bem Y_B é mais intensiva no uso do fator K, gerando pontos de equilíbrio sempre abaixo da diagonal principal da caixa de Edgeworth.[8]

Se houver a possibilidade de comércio, a relação de preços deve mudar. Suponha que o país em questão possua uma vantagem comparativa na produção do bem Y_A e, com o comércio, a relação de preços mude para $(P_A/P_B)'$, evidenciando o aumento do preço e da quantidade produzida do bem Y_A. O aumento na quantidade produzida deste bem faz com que os fatores L e K sejam deslocados, dentro do país, da produção de Y_B para a produção de Y_A. Como a produção de Y_A é mais intensiva no uso do fator L, o preço deste fator deve aumentar em relação ao fator K, já que L está sendo relativamente mais demandado que K.

Pela figura, pode-se notar que no equilíbrio determinado pelo ponto D a $TMST_{KL}$, e, portanto, a relação de preços $(P_L/P_K)'$, possui maior inclinação do que no ponto C, evidenciando o aumento relativo no preço do fator L. Mas, como se pode ter certeza de que esse resultado não é apenas uma mera questão de desenho? Lembre-se de que, como visto no capítulo 7, para funções com retornos constantes de escala, todas as isoquantas devem ter uma inclinação constante ao longo de qualquer raio partindo da origem. Traçando um segmento de reta da origem O_A até o ponto de equilíbrio D na caixa de Edgeworth, verifica-se que a inclinação da isoquanta Y_{AD} neste ponto deve ser a mesma que a inclinação da isoquanta Y_{AC}- no ponto C. Pode-se perceber, portanto, que a inclinação das isoquantas Y_{AD} e Y_{AC} em relação ao ponto D excede a inclinação da isoquanta Y_{AC} no ponto C, ou seja, a relação de preços $(P_L/P_K)'$ é maior que a relação de preços (P_L/P_K).

[8] A produção do bem Y_A é relativamente mais intensiva no uso do fator L do que a produção do bem Y_B se, para qualquer relação de preços dos fatores, a relação entre as quantidades de trabalho e capital empregada na firma A (L_A/K_A) é maior que essa relação na firma B (L_B/K_B). Na Figura 14.8, esse fato pode ser observado simplesmente pela curva de contrato situar-se abaixo da diagonal principal da caixa. Dessa forma, a inclinação do segmento de reta que liga a origem de cada bem ao ponto de equilíbrio, em relação ao eixo L de cada firma, é sempre menor para o bem Y_A do que para o bem Y_B, evidenciando que a proporção L/K é sempre maior para o bem Y_A.

Dessa forma, pode-se verificar relação direta entre os preços relativos dos bens no comércio internacional e os preços relativos dos fatores em cada país. Na teoria tradicional de comércio internacional existe um teorema, conhecido como **teorema de equalização de preços dos fatores**, que afirma que, se o comércio internacional é capaz de igualar os preços dos bens para os países envolvidos na troca, e se os países produzem os bens a partir da mesma tecnologia (tecnologias idênticas), sob comportamento tomador de preços e sob retornos constantes de escala, então as remunerações dos fatores de produção nos dois países também devem ser igualadas. Isso significa que o comércio internacional substitui a migração internacional dos fatores. Esse teorema é válido apenas se nenhum dos países envolvidos no comércio especializa-se completamente na produção de apenas um dos bens.

14.6. Teoremas de Stolper-Samuelson e Rybcszynski

Outra forma de verificar a relação entre preços dos bens e preços dos fatores, sem precisar recorrer à situação de comércio internacional, é através do **teorema de Stolper-Samuelson**. Esse teorema afirma que, no modelo de produção de duas mercadorias a partir de dois fatores, considerando que cada fator é usado mais intensamente na produção de um dos bens, se o preço de um bem aumentar, então o preço de equilíbrio do fator utilizado mais intensivamente na produção deste bem aumenta, enquanto o preço do outro fator diminui (assumindo equilíbrio interior antes e depois da mudança de preço).

A intuição por trás desse teorema é relativamente simples: um aumento no preço do bem Y_A, mais intensivo no uso do fator L, deve provocar um aumento na produção deste bem, que por sua vez aumenta a pressão no mercado de fatores pelo uso de L. Considerando que a economia possua uma dotação fixa desse fator, a maior demanda por este deve provocar o aumento no seu preço.

Considerando uma situação similar à da caixa de Edgeworth da Figura 14.8, suponha que tenha ocorrido apenas aumento no preço do bem Y_A, deslocando o mercado de fatores para o ponto de equilíbrio D.

Pode-se perceber, pelas inclinações dos segmentos de reta que ligam cada origem ao ponto D, que ocorre aumento na intensidade de uso do fator K em ambos os setores, já que essas inclinações aumentam, em relação ao eixo L de cada origem. Lembrando da condição de equilíbrio na produção, de que a relação de preços P_L/P_K deve igualar-se à relação entre os produtos marginais PMa_L/PMa_K na produção de um bem, percebe-se que no ponto D da Figura 14.8 a relação entre os produtos marginais na produção de Y_A é maior do que no ponto C. Daí conclui-se que, no ponto D, o PMa_L aumentou relativamente ao PMa_K na produção de Y_A. Considerando as regras de maximização do lucro dadas pelas expressões $PMaL_A = P_L/P_A$ e $PMaK_A = P_K/P_A$ como condições de equilíbrio no setor Y_A, um aumento na relação $PMaL_A/PmaK_A$, dado o aumento em P_A, só pode ser possível pelo aumento em P_L e redução em P_K, como na relação a seguir:

$$(\uparrow)\frac{PMaL_A}{PMaK_A} = \frac{\frac{P_L}{P_A}}{\frac{P_K}{P_A}} = \frac{P_L}{P_K}\begin{matrix}(\uparrow)\\(\downarrow)\end{matrix} \qquad (14.16)$$

Outra análise interessante em equilíbrio geral diz respeito aos efeitos que um aumento na dotação de um dos fatores traria para a economia. Essa questão é tratada no **teorema de Rybczynski**. Este teorema procura mostrar, no modelo de produção de duas mercadorias a partir de dois fatores e considerando que cada fator é usado mais intensamente na produção de um dos bens, que, se a dotação de um fator aumentar, então a produção do bem que usa esse fator de forma relativamente mais intensiva deve aumentar e a produção do outro bem deve diminuir, assumindo que os preços dos bens não se alteram e ocorre equilíbrio interior antes e depois da mudança.[9]

[9] Uma situação prática que exemplifica a situação analisada pelo teorema de Rybczynski seria a de aumento repentino no estoque de mão-de-obra de um país devido à chegada de levas de imigrantes.

A Figura 14.9 demonstra esse teorema através da fronteira de produção e da caixa de Edgeworth para o mercado de fatores. O ponto C na figura apresenta a situação inicial de equilíbrio quando a economia possui a dotação L deste fator. Caso a dotação aumente para L', a fronteira de produção é expandida, já que a economia é capaz de produzir maior quantidade dos bens. Passa-se a representar a origem O_B para o setor Y_B mais para a direita, na extensão ΔL de aumento do fator L.

Qual deve ser o novo equilíbrio diante da expansão do fator L? Dos teoremas anteriores, pode-se afirmar que, se os preços dos bens são mantidos constantes e as tecnologias exibem retornos constantes de escala, não deve ocorrer nenhuma mudança na relação de preços dos fatores, nem na TMST. Isso significa que a razão L/K na produção de equilíbrio das duas firmas não deve ser alterada, mantendo constante a inclinação do raio partindo da origem até o ponto de equilíbrio. Portanto, o novo ponto de equilíbrio, D, deve se localizar sobre os segmentos de reta que representam as razões L/K para ambos os setores.

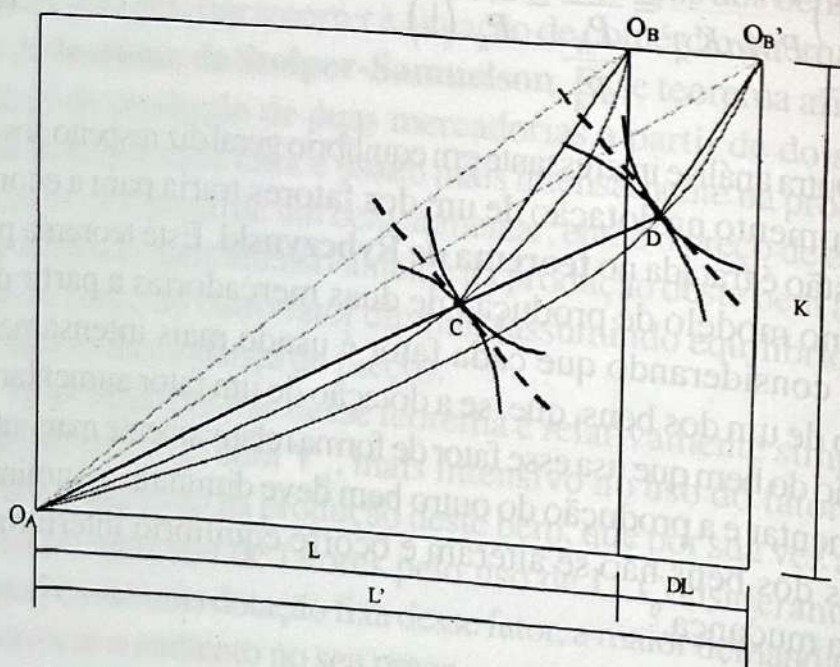



Figura 14.9 - Teorema de Rybczynski

Note que, no novo equilíbrio, a quantidade produzida do bem Y_B, menos intensivo no uso do fator L, diminui. Isso ocorre porque, com o aumento da quantidade do fator L e conseqüente aumento da produção de Y_A, mais intensivo neste fator, alguma quantidade do fator K deve ser desviada da produção de Y_B para permitir esse aumento de Y_A. Como o setor Y_B é intensivo no uso de K, acaba por sofrer queda na produção a partir da redução do seu fator mais demandado.

14.7. Exercícios resolvidos

1) Como é atingido o equilíbrio na produção em uma economia com duas firmas tomadoras de preços nos mercados de bens e fatores, cada uma produzindo um bem a partir de dois fatores de produção?

Considere as firmas A e B, produzindo os bens Y_A e Y_B a partir dos fatores K e L. Nessa economia, as firmas devem procurar maximizar seu lucro, escolhendo a quantidade a ser utilizada dos fatores, dados os preços destes e dos bens produzidos. Dessa forma, as firmas devem trocar fatores de produção até adquirirem a quantidade ótima para produzir um nível de produção maximizador de lucro. Cada firma, então, procura atingir um nível de produção no qual a taxa marginal de substituição técnica (TMST), dada pela relação entre os produtos marginais do fatores, se iguale à relação de preços dos fatores:

$$TMST_{LK} = \frac{PMa_L}{PMa_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

Quando a firma estiver empregando quantidades dos fatores L e K de forma a satisfazer a relação anterior, não haverá nenhuma razão para alterar a quantidade empregada de fatores. Se, por exemplo, a firma resolver empregar maiores quantidades do fator L, reduzindo sua produtividade marginal, a eficiência deste fator por unidade monetária (PMa_L/P_L) passa a ser inferior à do outro fator, de modo que a firma achará mais lucrativo reduzir a quantidade utilizada deste fator, ou aumentar a quantidade utilizada do outro fator, até que os dois fatores tragam a mesma contribuição por unidade monetária para a produção.

Se ambas as firmas atingirem a eficiência no uso dos fatores, como são tomadoras de preços, a TMST de ambas deve se igualar, satisfazendo a relação:

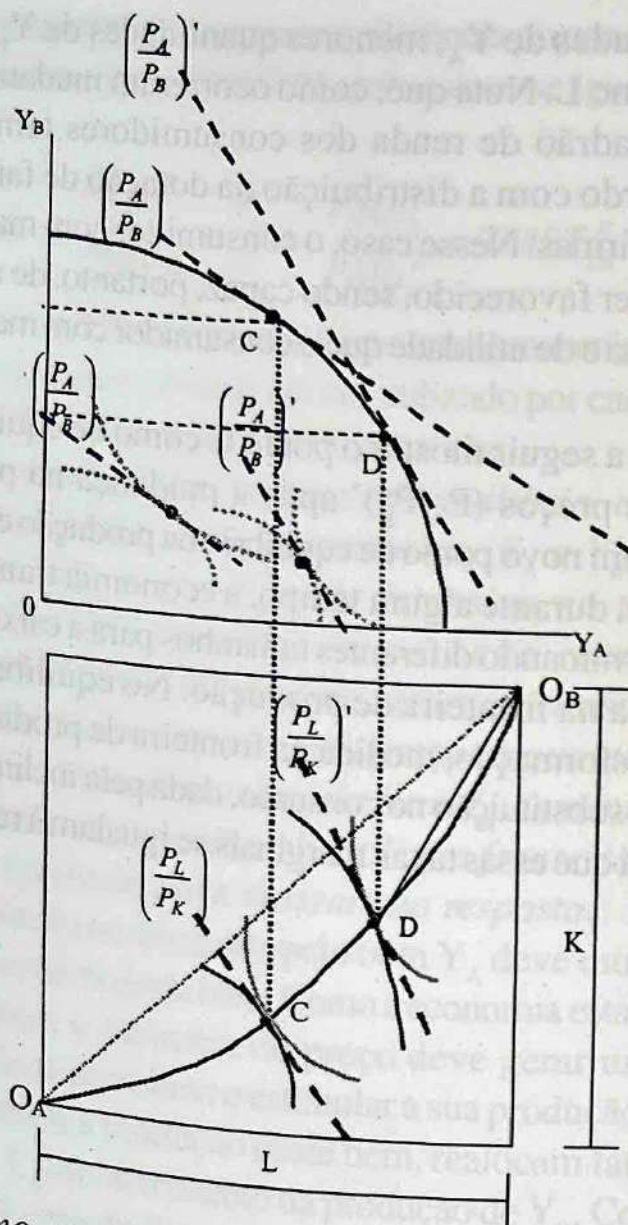
$$TMST_{LK}^{A} = \frac{PMa_L^A}{PMa_K^A} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{PMa_L^B}{PMa_K^B} = TMST_{LK}^{B}$$

Assim, o equilíbrio na produção em uma economia com duas firmas deve ser obtido quando o nível de fatores utilizado por cada uma se igualar a taxa marginal de substituição técnica entre elas.

2) Considere uma economia simples em equilíbrio, com dois fatores de produção (L e K), duas mercadorias (Y_A e Y_B, sendo Y_A mais intensivo no uso de L e Y_B mais intensivo no uso de K), dois consumidores que consideram os bens como substitutos, comportamento competitivo e de retornos constantes à escala. Discuta o que deve acontecer com preços e quantidades dos bens e dos fatores caso a demanda pelo bem Y_A aumente (mudança na preferência dos consumidores). Utilize a fronteira de produção e caixas de Edgeworth para ilustrar sua resposta.

Um aumento na demanda pelo bem Y_A deve mudar a relação de preços (P_A/P_B) em favor deste bem. Como a economia estava em equilíbrio antes da mudança, o aumento do preço deve gerar uma escassez na quantidade ofertada deste bem e estimular a sua produção. À medida que as firmas aumentam a produção deste bem, realocam fatores na direção da produção de Y_A em detrimento da produção de Y_B. Como o bem Y_A é mais intensivo no uso do fator L, esse fator deve ser mais demandado e, portanto, seu preço deve aumentar em relação ao preço do fator K. Dessa forma, a mudança no preço do bem Y_A altera a relação de preços dos fatores em favor de L, a taxa marginal de transformação na produção e a taxa marginal de substituição dos fatores. As mudanças devem continuar ocorrendo até que a taxa marginal de substituição no consumo se iguale à relação de preços dos bens e à taxa marginal de transformação na produção. Ainda, a taxa marginal de substituição técnica deve igualar-se à relação de preços dos fatores. Nessas condições, a economia terá atingido um novo equilíbrio na produção e nas trocas, produzindo e consumindo

maiores quantidades de Y_A, menores quantidades de Y_B e com preços maiores do insumo L. Note que, como ocorreram mudanças nos preços dos fatores, o padrão de renda dos consumidores também deve ser alterado, de acordo com a distribuição da dotação de fatores que estes vendem para as firmas. Nesse caso, o consumidor com maiores dotações do fator L deve ser favorecido, sendo capaz, portanto, de atingir maiores níveis de consumo e de utilidade que o consumidor com menores dotações do fator L.

A figura a seguir mostra o ponto C como de equilíbrio inicial, a nova relação de preços $(P_A/P_B)'$ após a mudança na preferência dos consumidores e um novo ponto de equilíbrio na produção e na troca (ponto D). Observe que, durante algum tempo, a economia transita do ponto C ao ponto D, determinando diferentes tamanhos para a caixa de Edgeworth da troca definida na fronteira de produção. No equilíbrio final, a taxa marginal de transformação, medida na fronteira de produção, se iguala à taxa marginal de substituição no consumo, dada pela inclinação das curvas de indiferença, já que essas taxas marginais se igualam à relação de preços dos bens.

3) Discuta como os resultados no exercício anterior diferem dos que seriam observados sob equilíbrio parcial.

Sob equilíbrio parcial, o aumento na demanda pelo bem Y_A provocaria o aumento de preço deste bem. A produção deste bem aumentaria em resposta ao aumento de preços, e o fator usado mais intensamente nesse setor seria mais demandado e também sofreria aumento de preço. A análise de equilíbrio parcial terminaria aqui. Os efeitos sobre a produção do outro bem e sobre o mercado de fatores para K, bem como sobre a renda e o bem-estar dos consumidores, não seriam analisados no equilíbrio parcial.

14.8. Exercícios propostos

1) Explique o significado da curva de contrato na produção.

2) O que é a fronteira de produção?

3) Qual a relação entre a curva de contrato na produção e a fronteira de produção?

4) Considerando uma economia com duas firmas, cada qual produzindo um bem a partir da combinação de dois fatores, explique por que a taxa marginal de substituição técnica é igual para ambas as firmas em cada ponto da curva de contrato de produção.

5) Como é definida a inclinação da fronteira de produção?

6) Por que a fronteira de produção possui a forma côncava?

7) Como seria o formato da fronteira de produção se as funções de produção dos bens apresentassem retornos constantes de escala? E retornos crescentes de escala?

8) Em uma economia com dois consumidores, dois bens e dois fatores, qual a condição para equilíbrio geral na produção e nas trocas?

9) Em uma economia com dois consumidores, dois bens e dois fatores, por que não ocorre eficiência e equilíbrio se as TMS dos consumidores forem diferentes da TMT?

10) Por que a curva de contrato da produção em uma economia com dois bens e dois fatores de produção não se localiza sobre a diagonal da caixa de Edgeworth se cada um dos bens for intensivo na utilização de um dos fatores?

11) Desenhe uma caixa de Edgeworth para uma economia com duas firmas, dois bens e dois fatores de produção e represente nessa caixa a curva de contrato de produção, considerando que os fatores são utilizados na mesma intensidade na produção de cada bem.

12) A economia poderia atingir o equilíbrio geral na produção e nas trocas no mundo real?

13) Adaptado de Salvatore (1984)

a) Construa uma caixa de Edgeworth para uma economia com as dotações de fatores de 18 unidades de L e 12 unidades de K, com as seguintes isoquantas:

Y_A						Y_B					
Y_{A1}		Y_{A2}		Y_{A3}		Y_{B1}		Y_{B2}		Y_{B3}	
L	K	L	K	L	K	L	K	L	K	L	K
3	10	5	11	8	11	4	6	10	7	13	10
4	5	7	8	10	9	8	3	11	4	14	7
6	2	10	6	13	8	14	2	14	3	16	5

b) O ponto em que as isoquantas Y_{A1} e Y_{B1} se tocam representa um ponto de equilíbrio da produção? Por quê?

c) Trace a curva de contrato na produção para esta economia. O que esta curva representa?

d) Trace a TMST que representa a condição de equilíbrio para o encontro de cada par de isoquantas e dê o valor dessa taxa para cada ponto de equilíbrio. Dica: lembre-se de que o valor da TMST é dado pelo valor positivo da inclinação da reta que define a TMST.

e) Construa uma fronteira de produção considerando que $Y_{A1} = 3$, $Y_{A2} = 6$, $Y_{A3} = 9$, $Y_{B1} = 5$, $Y_{B2} = 7$ e $Y_{B3} = 8$.

f) Represente a TMT para cada um dos pontos do exercício da letra *e*.

14) Considerando uma economia com um consumidor e dois bens, represente uma fronteira de produção, uma posição de equilíbrio para um país em autarquia e os efeitos da abertura comercial, levando-se em conta que este país apresenta vantagem comparativa na produção de um dos bens.

15) Represente graficamente, utilizando a fronteira de produção conjugada com a caixa de Edgeworth para o consumo, uma situação de equilíbrio na produção e nas trocas em uma economia com dois consumidores, dois bens e dois fatores. Explicite a condição de equilíbrio geral nessa economia.

16) Considerando uma país com dois produtos e dois fatores, explique por que ocorre o aumento do preço do fator utilizado de forma mais intensiva na produção de um bem quando o país que possui vantagem comparativa na produção deste bem passa de autarquia para livre comércio. Represente graficamente essa situação.

17) O que diz o teorema de Stolper-Samuelson? Explique a lógica econômica deste teorema.

18) Explique e mostre graficamente o que deve ocorrer com o preço do fator utilizado de forma menos intensiva na produção de um bem quando o país que possui vantagem comparativa na produção deste bem passa de livre comércio para autarquia. Represente graficamente essa situação.

19) Explique o teorema de Rybczynski.

20) Represente graficamente o que deve ocorrer em uma economia de dois fatores e dois bens quando houver aumento na dotação de ambos os fatores.

14.9. Referências

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

MILLER, R.L. **Microeconomia**: teoria, questões e aplicações. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1981.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. Rio de Janeiro: Campus, 1994.

SALVATORE, D. **Microeconomia**. 2.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1984.

SILBERBERG, E. **The structure of economics: a mathematical analysis.** New York: McGraw-Hill, 1990.

Capítulo 15

Externalidades

Rubicleis Gomes da Silva[1]
Viviani Silva Lírio[2]
João Eustáquio de Lima[3]

15.1. Introdução

Em uma economia competitiva, uma alocação é considerada eficiente em função de os produtores maximizarem lucro, os consumidores maximizarem utilidade e devido ao fato de que ninguém pode melhorar seu nível de bem-estar sem que exista piora para algum outro agente. Nesse ambiente, o preço é um vetor que possui todas as informações necessárias para organizar a economia, de modo que os mecanismos de mercado propiciam alocações Pareto eficiente. Contudo, há falhas no mercado competitivo e, conseqüentemente, as regras usuais não produzirão equilíbrios Pareto ótimos: isso significa que o ótimo privado é diferente do ótimo social.

Nesse contexto, dois conceitos ganham especial relevância: externalidades e bens públicos. O primeiro conceito traz à economia neoclássica a incorporação da possibilidade de que tanto a produção de uma firma quanto o bem-estar do consumidor, sejam, em algumas circunstâncias, afetados pelas atividades de outras firmas e outros consumidores. Já o segundo diz respeito a um tipo de bem que não apresenta rivalidade ou excludência em seu consumo, ou seja, o seu

[1] Professor da Universidade Federal do Acre. e-mail: rubicleis@uol.com.br.
[2] Professora do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: vslirio@ufv.br.
[3] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: jelima@ufv.br.

consumo não reduz a disponibilidade de consumo de outro alguém, o que é denominado de bem público.

15.2. Conceituação e características das externalidades

A literatura econômica aborda o conceito de externalidade de diferentes perspectivas. Pindyck e Rubinfeld (1994) caracterizam-na como os efeitos das atividades de produção e consumo que não se refletem diretamente no mercado. Por sua vez, Eaton e Eaton (1999) expressam um conceito mais objetivo, entendendo que, sempre que o comportamento de um agente econômico exerce impacto sobre outro agente, e esse impacto não tem preço no mercado, diz-se que este está impondo uma externalidade sobre o outro; já para Mas-Colell (1995) uma externalidade está presente quando o bem-estar de um consumidor ou a possibilidade de produção de uma firma é diretamente afetada pela ação de outro agente na economia.

Apesar da diversidade de abordagens, em todas elas o conceito de externalidade divide-se sob duas óticas: a do consumo e da produção. Uma externalidade de consumo ocorre quando o consumo de um bem afeta a produção e o consumo de outro agente; já a externalidade na produção ocorre quando a produção de uma firma é impactada pela de outra firma ou de um consumidor.

Nesse contexto, as externalidades podem surgir entre consumidores, entre firmas ou entre a combinação de ambos, sendo positivas quando os recursos são sub-alocados à fonte da externalidade e negativas quando os recursos são sobre-alocados à fonte, ou seja, na presença de externalidades negativas ocorre uma ineficiência econômica, visto que o nível de produção, quando não é considerado o custo externo, é superior ao nível de produção eficiente; no caso de externalidades positivas, este nível de produção é inferior ao nível de produção eficiente.

É importante mencionar que as externalidades possuem três bases de origem: a primeira diz respeito à deficiência na definição dos direitos de propriedade; a segunda resulta do avanço tecnológico que gera retornos crescentes de escala e custos médios decrescentes a longo prazo, ou seja,

o surgimento de um monopólio; e a terceira fonte de externalidade advém dos bens públicos.

Uma vez que os mercados concorrenciais negligenciam a presença de externalidades, as alocações que são realizadas não correspondem às alocações eficientes, o que implica em que o custo marginal (CMa) é diferente do custo marginal social (CMaS); a partir disso, a produção da firma ou está acima do ótimo privado, ou abaixo. Conseqüentemente, as externalidades podem ser consideradas como causadoras de ineficiência econômica. A diferença entre o ótimo privado e o social subsidia conceito de externalidade.

15.3. Definição econômica do nível ótimo de externalidade e os conceitos de externalidades positivas e negativas

Varian (1992) destaca que atividades que geram externalidades não se encontram em estado de Pareto ótimo, uma vez que existem agentes sendo prejudicados por sua melhoria. Logo, para alcançar esse ponto, torna-se necessário que a atividade incorpore a externalidade por ela causada. A diferença entre o custo marginal privado e o social representa o custo externo imposto aos agentes econômicos que sofrem da externalidade, sendo este denominado de custo marginal externo.

Uma forma interessante para a análise das externalidades é fornecida pela Economia dos Recursos Naturais e do Meio Ambiente. Pearce e Turner (1990) destacaram que o nível ótimo de poluição não-zero, e sim o correspondente à interseção entre o benefício marginal privado líquido (BMaPL)[4] e o custo marginal externo (CMaE). Parece estranho, contudo, para haver produção, algum nível de poluição é necessário. Analisando a Figura 15.1, é possível derivar a quantidade ótima de externalidade gerada pelo processo produtivo; a partir disso, é possível entender com maior profundidade os conceitos de externalidades positivas e negativas.

---

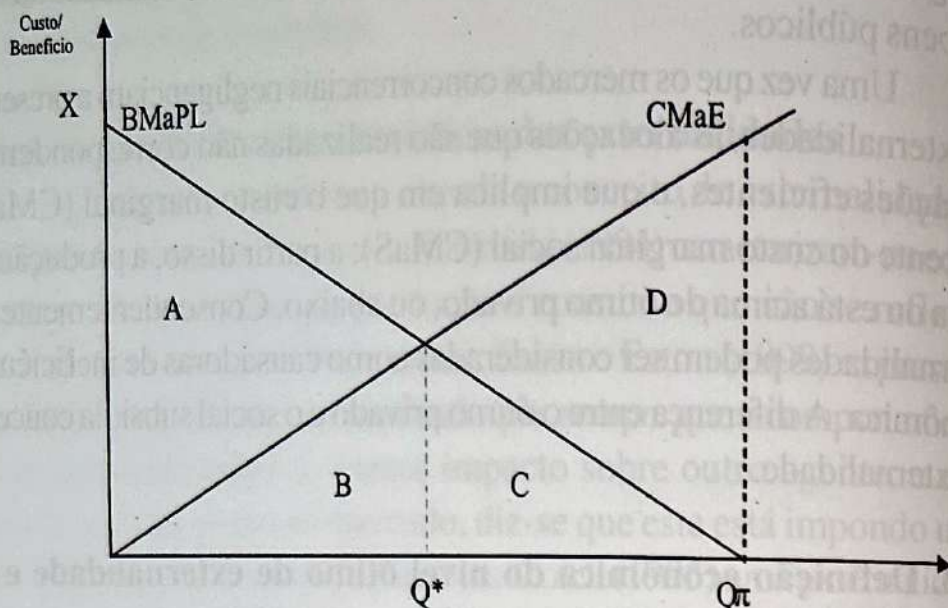
[4] O *BMaPL* corresponde ao lucro oriundo de uma atividade produtiva.

Fonte: Pearce e Turner (1990).

Figura 15.1 - Definição econômica do nível ótimo de poluição

Na Figura 15.1, o eixo vertical representa os custos (da poluição) ou benefícios (da despoluição) medidos em unidades monetárias; o eixo horizontal mostra a quantidade de poluição gerada pela atividade econômica, em que $Q*$ representa o nível ótimo de externalidade e $Q\pi$ o nível de externalidade associado com a maximização do lucro em concorrência perfeita.

A curva *BMaPL* possui inclinação negativa, pois, à medida que os custos de poluição diminuem, a produção de externalidade aumenta; se o custo de poluição for nulo, a quantidade de poluição (externalidade) será a que maximiza o lucro ($Q\pi$). Por outro lado, à medida que os benefícios da despoluição aumentam, a quantidade de poluição diminuirá[5]; conseqüentemente, a inclinação positiva do *CMaE* ocorre em função de o valor adicional do custo de poluição mais que compensar o aumento da quantidade da atividade poluidora.

A partir dessas definições, é possível uma análise mais profunda

[5] Apesar de a ilustração ser relativa à poluição do meio ambiente, esta análise pode ser elaborada para qualquer tipo de externalidade.

da Figura 15.1. A área abaixo da curva *BMaPL* (A, B e C) corresponde ao total do benefício privado líquido da poluição; já a área abaixo da curva de *CMaE* (B, C e D) corresponde ao custo externo total; a área compreendida por A corresponde ao nível ótimo do benefício social líquido; o nível ótimo de externalidade é dado pela área B; por sua vez, a soma das áreas A e B corresponde ao nível ótimo do benefício privado líquido da externalidade; a soma das áreas C e D corresponde a níveis não-ótimos de externalidade, que precisam ser removidos através de regulação; a área C representa o nível de benefício privado líquido que socialmente não é desejado; por fim, o benefício social líquido corresponde a (A + B + C – B – C – D = A – D), que é claramente menor que A.

Conforme Pearce e Turner (1990), é fácil verificar que, na presença de externalidade, existe uma divergência entre o custo marginal privado e o social. Caso a divergência não seja corrigida, a externalidade continuará sendo produzida ao nível de maximização do lucro em competição perfeita.

A partir dessas definições e utilizando-se de matemática simples, pode-se chegar a conclusões interessantíssimas. A igualdade entre *BMaPL* e *CMaE*, representada pela expressão (15.1), fornece a quantidade ótima de externalidade a ser produzida, conforme mostra a Figura 15.1.

$$BMaPL = CMaE \qquad (15.1)$$

A expressão (15.1) pode ser visualizada de outra forma, sendo que nessa o CMaE é dividido em dois componentes, conforme a expressa (15.2).

$$BMaPL = P - CMa \qquad (15.2)$$

em que CMa corresponde ao custo marginal da poluição, sendo:

$$P - CMa = CMaE \qquad (15.3)$$

ou por outro lado,

$$\begin{aligned} P &= CMa + CMaE, \\ P &= CMaS. \end{aligned} \qquad (15.4)$$

Em concorrência perfeita, P é igual ao CMa, porém, na presença do $CMaE$, o preço é igual ao $CMaS$. Nesse contexto, chega-se à seguinte conclusão, quando:

$$BMaPL = CMaE \tag{15.5}$$

tem-se:

$$P = CMa \tag{15.6}$$

A partir da condição de equilíbrio representada pela expressão (15.6), duas situações podem ocorrer, sendo a primeira representada por:

$$P > CMa \tag{15.7}$$

Para haver igualdade entre preço e custo marginal, torna-se necessária a inclusão do $CMaE$, ao lado direito de (15.7), transformando-a na expressão dada em (15.4):

$$P = CMa + CMaE$$

$$P = CMaS$$

A diferença entre as expressões (15.4) e (15.6) reside na internalização da externalidade ($CMaE$) ao preço. Todavia, a incorporação da externalidade ao preço modifica a estrutura de oferta de externalidades e produção, pois a quantidade de equilíbrio dado em (15.6) é superior à da expressão (15.4). Daí chega-se à conclusão de que a não-gravação do custo marginal externo ao preço faz com que a firma produza mais que o eficiente socialmente, pois:

$$P = CMa > P = CMaS. \tag{15.8}$$

A expressão (15.8) representa uma situação em que ocorre uma externalidade negativa. A Figura 15.2 ilustra esse tipo de situação. O custo marginal social ($CMaS$) é obtido pela soma do custo marginal ao custo marginal externo, que relacionado a produção de externalidade com a produção da firma. Em um mercado de concorrência perfeita, a firma produzirá no ponto onde o preço do produto é igual ao custo marginal. Nesse caso, percebe-se claramente que, quando a produção de

externalidade é baseada no *CMa*, isto é, incorporando a externalidade negativa, a produção se efetiva em Q^*, sendo menor do que quando baseada no *CMa*, em que a firma produz Q^0. Em última instância, isso significa que, na presença de externalidade negativa, a firma produz mais que ótimo social.

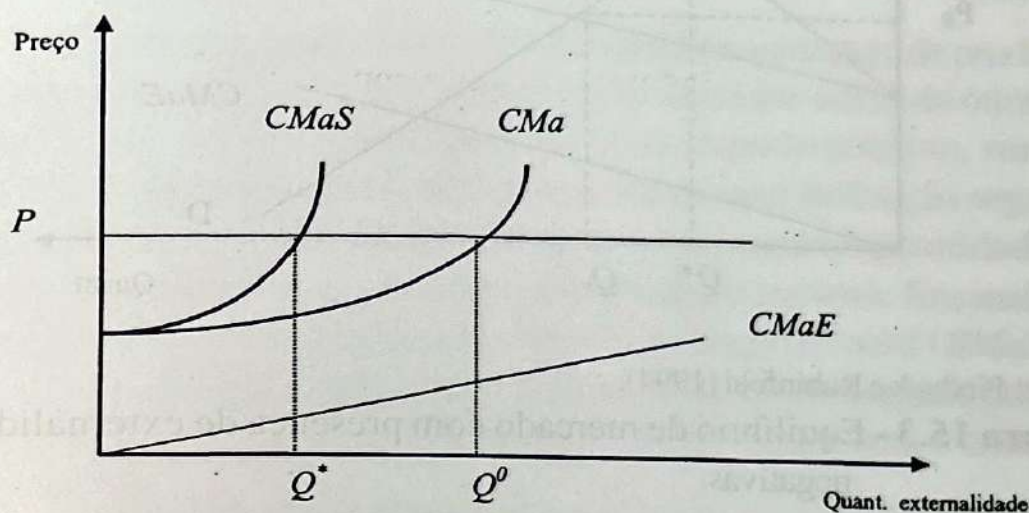



Figura 15.2 - Curvas de custos marginais sociais, privados e externos
Fonte: Pindyck e Rubinfeld (1994).

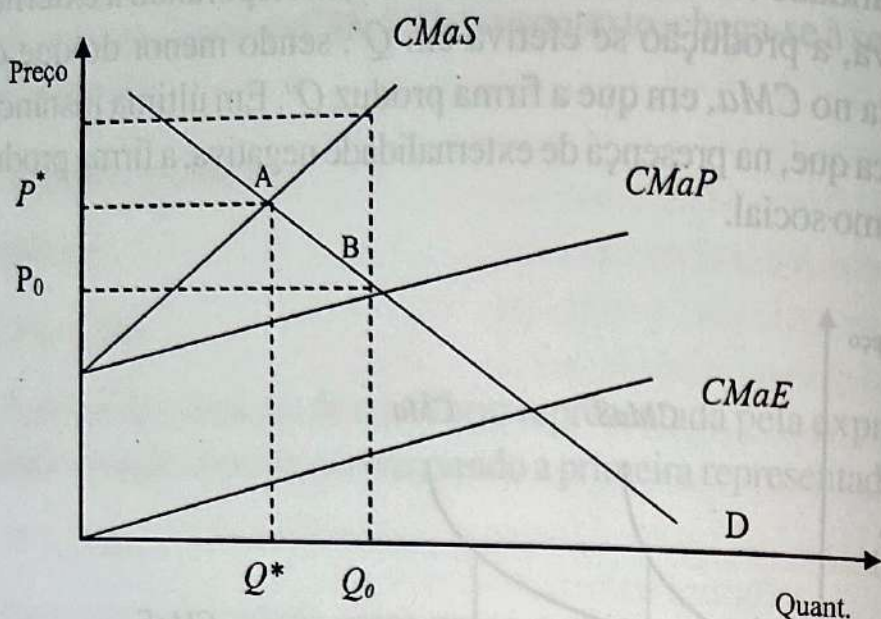
O excesso de produção demonstrado pela diferença de Q^* e Q_0 corresponde a uma ineficiência econômica. Para a firma produzir a quantidade ótima, é necessário a internalização da externalidade. No entanto, é preciso ressaltar que, se a produção ótima Q^* for inferior à produção de mercados concorrenciais, o preço deverá se ajustar a novas quantidades; isso ocorre em função de P^0 refletir apenas o custo marginal privado. A Figura 15.3 ilustra essa situação.

Fonte: Pindyck e Rubinfeld (1994).

Figura 15.3 - Equilíbrio de mercado com presença de externalidades negativas

O montante do custo social (*CS*) com que a sociedade arca em função dessa ineficiência é obtido por meio da diferença entre o custo marginal social e o benefício marginal (curva de demanda), que na Figura 15.3 é dado pela área do triângulo ABC.

Observe que $Q_0 > Q^*$, porém o preço correspondente a Q^* é P^*, em que $P^* > P_0$. O equilíbrio no ponto A representa o equilíbrio com uma política de internalização da externalidade, ou seja, o equilíbrio socialmente ótimo, pois a demanda é igual ao *CMaS*; já o ponto B representa o ótimo de Pareto sem a presença de externalidade, isto é, o equilíbrio em mercados competitivos

A expressão (15.6) corresponde à situação de equilíbrio em concorrência perfeita. A primeira situação que fere essa condição é dada pela expressão (15.7); por sua vez, a segunda condição ocorre quando o preço é menor que o custo marginal privado, conforme demonstrado pela expressão (15.9):

$$P < CMa \tag{1.9}$$

Para a expressão (15.9), é necessário uma igualdade que incorpore o benefício marginal externo; a partir disso, tem-se:

$$P = CMa + BMaE \qquad (15.10)$$

A expressão anterior pode ser representada alternativamente por:

$$P = BMaS = CMa \qquad (15.11)$$

A diferença entre (15.6) e (15.11) modifica a estrutura de produção e de externalidade, pois nessa situação a firma produz acima do ótimo de Pareto. Uma vez que a externalidade causa impacto positivo, surge o benefício marginal externo (*BMaE*), que uma possui inclinação negativa em função de o *BMaE* ser grande para uma pequena quantidade de despoluição, diminuindo à medida que a produção aumenta. Em analogia ao *CMaS*, nessa, situação tem-se o benefício marginal social (*BMaS*). A curva de *BMaS* é calculada a partir da soma do benefício marginal privado (*BMaP*) com o *BMaE*. A Figura 15.4 ajuda a visualizar o conceito apresentado.

Conforme mostra a Figura 15.4, na presença de externalidade positiva, os benefícios marginais sociais são superiores aos benefícios marginais (*D*); conseqüentemente, a diferença entre eles corresponde ao *BMgE*.

Observe que $Q^* > Q_{0,}$ porém o preço correspondente a Q^* é P^*, em que $P_0 > P^*$. O equilíbrio no ponto A seria o ótimo de Pareto, caso não existisse externalidade; o ponto B representa um desequilíbrio, pois a P^* o agente econômico não proverar o nível socialmente ótimo de externalidade. Para haver a provisão do nível socialmente ótimo, é necessário um subsídio correspondente à diferença entre P_0 e P^*. Por fim, o ponto C representa o equilíbrio com a internalização da externalidade; para o agente ser estimulado a investir no nível socialmente desejável, ele deverá receber uma compensação (subsídios), que elevará o preço de P^* para P_0. Lembre-se de que, nesse caso, o nível ótimo de externalidade será dado por:

$$P = CMa = BMaS$$

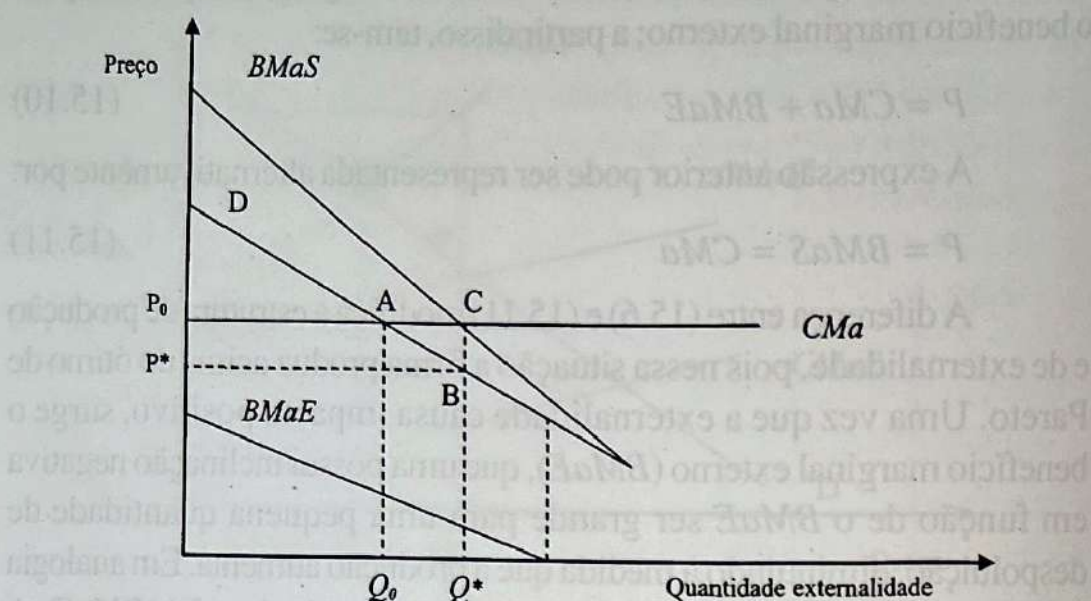



Figura 15.4 - Equilíbrio de mercado com presença de externalidades positiva

15.4. Mecanismos de correção de externalidades

Até o momento, preocupou-se com a conceituação de externalidade, bem como com o impacto que esta produz sobre um mercado competitivo. Desse momento em diante, esta análise será pautada na apresentação de algumas formas que podem contornar o problema da externalidade.

A literatura econômica apresenta uma série de propostas para contornar as externalidades geradas por um processo produtivo; as que possuem a maior relevância são:

- internalização pela redistribuição dos direitos de propriedade;
- determinação de um padrão de emissão ótimo de poluentes; e
- criação de um mercado de externalidade.

15.4.1. Internalização pela redistribuição dos direitos de propriedade

Por direito de propriedade entende-se um conjunto de leis que descreve o que as pessoas e as empresas podem fazer com suas respectivas propriedades. A definição desse direito possui implicações sobre a oferta de bens e serviços na economia, bem como sobre a geração de externalidade (PINDYCK; RUBINFELD, 1994).

Para análise do impacto do direito de propriedade sobre a produção de bens e externalidades, duas formas devem ser consideradas: nenhum agente possui o direito de propriedade sobre determinado recurso, por exemplo, o ar; e a firma W possui o direito de propriedade sobre o recurso considerado (será visto em seções posteriores).

Em nosso exemplo, a firma W é uma indústria siderúrgica que possui uma grande produção de dióxido de enxofre e a firma K é um centro de recreação para idosos. A primeira análise consiste na não-determinação do direito de propriedade, ou seja, o ar limpo naquela região não possui um "proprietário".

O primeiro passo para determinação das quantidades que maximizam a produção de produto e externalidade das firmas W e K separadamente, é dada por um problema clássico de maximização de lucro, dado para W e K respectivamente por:

$$Max \quad P_w B - C_w(B,X) \tag{15.12}$$

$$Max \quad P_K I - C_k(I,X) \tag{15.13}$$

em que P_w, P_k, $C_w(B,X)$, $C_k(I,X)$, B, I e X são, respectivamente: o preço da tonelada de aço, o preço da prestação dos serviços de recreação, o custo de produção da tonelada de aço e de recreação, a quantidade de aço produzido, a quantidade de pessoas atendidas no centro de recreação e a quantidade de emissão de poluente.

As expressões (15.12) e (15.13) podem ser representadas, alternativamente, pelos seguintes Lagrangeanos:

$$\pi = P_w B - C_w(B, X) \tag{15.14}$$

$$\pi = P_k I - C_k(I, X) \tag{15.15}$$

Derivando (15.14) e (15.15) parcialmente com relação a I, B e X, têm-se as condições de otimalidade expressas por:

$$\frac{\partial \pi}{\partial B} = P_w - \frac{\Delta_w(B, X)}{\Delta B} \Rightarrow P_w = \frac{\Delta_w(B, X)}{\Delta B}, \tag{15.16}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial I} = P_k - \frac{\Delta_k(I, X)}{\Delta I} \Rightarrow P_k = \frac{\Delta_k(I, X)}{\Delta I}, \tag{15.17}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = P_w - \frac{\Delta_w(B, X)}{\Delta X} \Rightarrow 0 = \frac{\Delta_w(B, X)}{\Delta X}. \tag{15.18}$$

As condições expressas pelas equações (15.16), (15.17) e (15.18) representam as condições de maximização de lucro da indústria e do centro de recreação. Nas expressões (15.16) e (15.17) iguala-se o custo marginal ao preço do produto, o que representa a condição de oferta em concorrência perfeita; por sua vez, iguala-se (15.18) a zero, em função de não existir preço para poluição.

A política que será adotada pela indústria é, por decorrência, produzir até o ponto em que o custo marginal é igual ao preço do produto, sem se preocupar com as externalidades geradas pelo processo produtivo. Já para a empresa de recreação, a poluição do ar gerada pela indústria é exógena. Isso significa que o aumento do custo da empresa de recreação em função da externalidade negativa gerada pela indústria é uma parcela do custo social da produção da indústria.

Nesse contexto, surge o seguinte questionamento: como resolver o problema da externalidade negativa gerada pela indústria?

A junção das firmas W e K contribuiria para resolução desse problema. Antes da junção das firmas, cada uma isoladamente maximizava seus lucros sem se preocupar com a produção de externalidade, em um um jogo em que os jogadores montam sua estratégia sem considerar o bem-estar do outro jogador.

A redistribuição do direito de propriedade, após a junção das firmas, torna o problema de maximização do lucro conjunto diferente do representado pelas expressões (15.13) e (15.14), sendo o novo Lagrangeano expresso por:

$$\pi = P_k I + P_w B - C_k(I,X) - C_w(B,X) \tag{15.19}$$

Derivando parcialmente (15.19) com relação a I, B e X, chega-se às condições de otimalidade expressas por (15.17) e (15.18) e por:

$$0 = \Delta_k(I,X) + \Delta_w(B,X) \tag{15.20}$$

A condição de otimização expressa por (15.20) considera o efeito da externalidade negativa nos custos marginais tanto na indústria quanto na firma de recreação. Isso significa que, quando W estipula seu nível de poluição, ela considera o impacto sobre o lucro de K; essa situação é bem visível a partir de uma representação alternativa a (15.20), representada por:

$$\begin{gathered} \frac{-\Delta k(I,X)}{\Delta X} = \frac{\Delta w(B,X)}{\Delta X} > 0 \\ -CMa(I,X) = CMa(B,X) \end{gathered} \tag{15.21}$$

O primeiro lado da expressão (15.21) é negativo, pois, à medida que a poluição aumenta, o *CMa(I,X)* de produção diminui; por sua vez, o lado direito é positivo, pois, à medida que a produção de externalidade aumenta, o *CMa(B,X)* também aumenta.

Parafraseando Varian (1992), quando a firma W minimiza seus custos privados, a firma produz onde o custo marginal de poluição extra se iguala a zero; contudo, o nível ótimo exige a minimização dos custos sociais da poluição e a soma dos custos marginais das firmas em questão deve ser igual a zero. A Figura 15.5 ilustra a situação expressa pela equação (15.21).

15.4.2. *Determinação de um padrão de emissão ótimo de poluentes*

Conforme Pindyck e Rubinfeld (1994), um padrão de emissão de poluente é um limite legal que uma firma poluidora está autorizada a emitir; conseqüentemente, o padrão assegura que a empresa está produzindo eficientemente. A Figura 15.5 auxilia a análise dessa questão.

O ponto A representa a situação de equilíbrio; nessa situação, por acaso, o equilíbrio coincide com o padrão Q^* imposto por regulamentação. A partir de Q^*, três situações podem ocorrer. A primeira consiste na igualdade $CMa(B,X) = - CMa(I,X) = Q^*$, indicada pelo ponto A. A segunda consiste na divergência entre a igualdade dos custos marginais e o padrão de emissão de poluentes, ou seja:

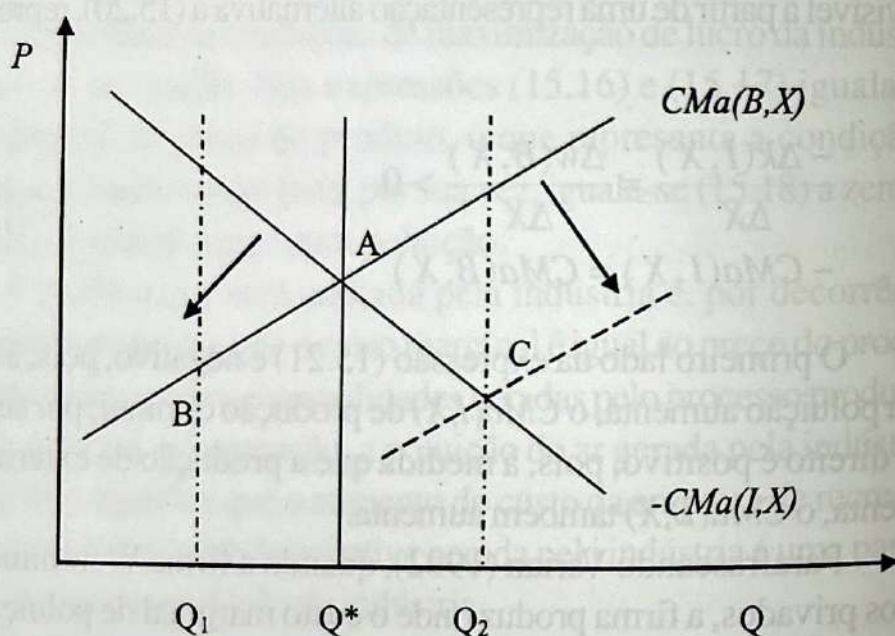
$$CMa(B,X) = -CMa(I,X) > Q_1 \tag{15.22}$$

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Pindyck e Rubinfeld (1994).

Figura 15.5 - Padrão de emissão de poluentes e imperfeições

A situação expressa em (15.22) representa um desequilíbrio entre o nível da cota de poluição estipulada Q_1 e o nível de produção de

externalidade que a firma produz. Para a condição de equilíbrio permanecer, é necessário um deslocamento do *CMa(I,X)* para a esquerda sob a curva do *CMa(B,X)* até o ponto B; isso mostra que, para que o novo equilíbrio seja atingido, torna-se necessário que o custo marginal de poluição da firma diminua.

A segunda condição é dada por:

$$CMa(B,X) = -CMa(I,X) < Q_1 \qquad (15.23)$$

Nesse caso, observa-se que a cota é inferior ao padrão legal. Duas situações podem existir: ou a firma permanece no ponto A ou não. Embora exista a opção da firma permanecer no ponto A, como este não é um ótimo pleno (a quantidade ótima de externalidade fabricada pela firma deve ser igual à cota), para que esta condição seja atendida, o *CMa(I,X)* deverá destacar-se sobre o *CMa(B,X)*, indicando uma redução do custo marginal da poluição.

15.4.3. Especificação de um mercado de poluição

A especificação de um mercado de poluição é análoga à criação de um imposto sobre emissão de poluentes – o conhecido imposto Pigou. O grande problema para a implementação do imposto Pigou reside na necessidade da determinação do nível ótimo de poluição. Contudo, se fosse conhecido o nível ótimo de poluição, poderia se estipular uma cota.

O princípio subjacente à especificação de um mercado de poluição é o do Poluidor-Pagador, ou seja, se a firma polui, ela deve pagar o preço socialmente justo para continuar produzindo poluição. Para que o mercado de poluição seja eficiente, é necessário que duas condições sejam válidas:

1. Algum agente econômico possui o direito de propriedade sobre o bem ou amenidade ambiental em questão; e

2. O imposto – *t* (taxa, contribuição) pago pelo agente poluidor é totalmente repassado em forma de subsídio para o agente prejudicado ou é pago sem se saber o seu destino – simplesmente some do modelo.

A partir dessas condições é possível formular o problema de maximização do lucro das firmas W e K, considerando que a última detém o direito de propriedade sobre o ar limpo. Os Lagrangeanos que

representam a maximização do lucro pelas respectivas firmas são fornecidos por:

$$\pi_w = P_w I - C_w(I,X) - tX \tag{15.24}$$

$$\pi_k = P_k B - C_k(B,X) + tX \tag{15.25}$$

Observe que a última parcela do lado direito das expressões (15.24) e (15.25) possuem uma sensível diferença, pois em (15.24) o termo *tX* possui sinal negativo, representando que o montante de imposto pago sobre a emissão de poluentes diminui o lucro de W. Contudo, para a firma K, o imposto pago por W representa um subsídio e, conseqüentemente, aumenta seus lucros.

A partir da determinação das condições de otimalidade deduzidas a partir da derivação parcial do lucro com relação a I e B, e substituindo-as em (15.24) e (15.25), chega-se às seguintes funções de lucro:

$$\pi_w = I\left(\frac{\Delta w(I,X)}{\Delta I}\right) - t \tag{15.26}$$

$$\pi_k = B\left(\frac{\Delta k(B,X)}{\Delta B}\right) + t \tag{15.27}$$

As expressões (15.26) e (15.27), primeiramente, mostram a forma com que os impostos e subsídios agem para corrigir o problema da externalidade e seus impactos sobre as funções de lucros das firmas; elas também mostram o impacto que a definição do direito de propriedade exerce sobre o lucro. Por fim, é interessante que o leitor refaça os cálculos desta seção, introduzindo a hipótese de que a firma *W* detém o direito de propriedade sobre o ar, para verificar como se comportam as funções de lucro de *W* e *K*.

15.5. Exercícios resolvidos

1) (Economia Pública – ISCTE) Em um gabinete de escritório trabalham dois indivíduos: A, um asmático, e F, um fumante. O fumante avalia os benefícios que retira do consumo de cigarros de acordo com a seguinte curva de demanda:

$P^F = 40 - 2q$

em que q indica o número de cigarros fumados por dia.

Todavia, é preciso considerar que o fumo de F afeta também A, que é asmático, e causa a este prejuízos totais de saúde, que podem ser expressos por:

$X^A = 2 + q^2$

Sabendo que o custo de cada cigarro é de 20 u.m. no mercado e que a legislação em vigor garante a A o direito de impedir que se fume no local de trabalho, determine o que seria a compensação máxima possível que F estaria disposto a pagar a A para poder fumar e qual seria a compensação mínima requerida por A para aceitar esta proposta.

Resolução

Inicialmente, os direitos de propriedade do ar disponível estão com o asmático e, portanto, a menos que se faça algum tipo de negociação, o fumante não poderá fumar nenhum cigarro no local de trabalho. Assim, deverá ser estabelecido algum tipo de negociação para que, de fato, se encontre uma solução eficiente.

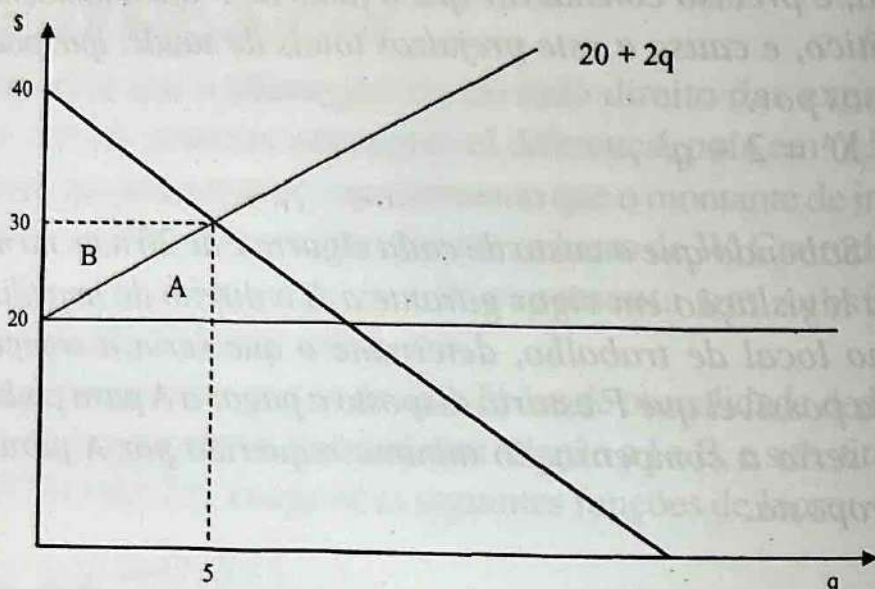
Cálculo do ótimo: Para encontrar o máximo do benefício líquido total, é preciso igualar o benefício marginal (Bmg) ao custo marginal social (Cmg^s). A curva de demanda apresentada mostra os benefícios marginais para o fumante, portanto:

$Cmg^{privado} + Cmg^{externo} = Bmg \Rightarrow 20 + 2q = 40 - 2q$

Logo, $q^* = 5$.

Quanto às compensações requeridas para passar de $q = 0$ (ausência de fumo) para $q^*=5$, observe-se que o indivíduo A exige receber, no mínimo, os custos que vai ter. Assim:

$2 + 5^2 = 27$ (área A da figura a seguir) e o fumante estará disposto a pagar, no máximo, a diferença entre o seu benefício (área abaixo da curva de procura) e o que lhe custa cada cigarro. Logo:

Compensação máxima possível = 10 x 5 + [(10x5)/2] = 75 (área A + B na figura a seguir).

2) *(Economia Pública – ISCTE) Suponha que a indústria petrolífera do país K é perfeitamente concorrencial e que todas as empresas extraem petróleo de uma única jazida. Cada produtor suporta, apenas, um custo fixo anual de 1.000 u.m. com o aluguel de equipamentos de extração, não havendo custos variáveis. O total de petróleo produzido – Q barris – é uma função do número de poços (produtores) existentes na região, N:*

$Q = 500N - N^2$

O preço do barril no mercado internacional é igual a 10 u.m.

Com base nessas informações, responda às seguintes questões:

a) *Determine o número de poços em equilíbrio concorrencial e a quantidade produzida por cada um deles.*

b) *Suponha que o Estado nacionalize as empresas petrolíferas e as funda em um único monopólio estatal. Nessa situação, quantos poços ficariam operando? Calcule a quantidade produzida por cada poço e a quantidade total. Compare os resultados obtidos*

com os da letra (a). Qual das duas situações corresponde ao ótimo social?

c) Se, em vez de nacionalizar os poços de petróleo, o Estado vendesse licença de exploração por poço/ano, qual o valor que esta deveria ter para atingir o número ótimo de poços petrolíferos?

Resolução

a) Em equilíbrio concorrencial, o lucro é nulo para cada produtor ($\pi = 0$), logo:

P x (Q/N) – CF = 0 (designa-se apenas CF porque os custos variáveis são inexistentes).

10 (500 – N) – 1.000 = 0

$N^{eq} = 400$

$Q^{eq} = 40.000$, ou seja, cada poço produz $Q^{eq}/N^{eq} = 100$.

b) Uma única empresa que produz (mas assumindo que o preço continua sendo dado pelo mercado, já que a cotação é internacional) implica:

$\max_N \; 10\,(500\,N - N^2) - 1.000\,N$

$\Rightarrow 10\,(500 - 2N) - 1.000 = 0$

$\Rightarrow N^* = 200$

Agora $Q^* = 60.000$ e $\pi^* = 400.000$, e cada poço produz $Q^*/N^* = 300$.

c) Para que o equilíbrio concorrencial resultasse em $N^* = 200$, era necessário que as licenças custassem um preço P_L, tal que:

$P_x\,(Q/N) - CF - P_L = 0$

$10_x\,300 - 1.000 - P_L = 0$, o que implica $P_L = 2.000$.

3) Suponha que duas indústrias apresentem as seguintes funções de custo de produção:

Firma 1: $C_1 = A_1X_1^2 + B_1X_1 - D_1X_2^2 \quad D_1 > 0$

Firma 2: $C_2 = A_2X_2^2 + B_2X_2 + D_2X_1^2 \quad D_2 > 0$

em que C_1 *e* C_2 *são os custos totais das firmas 1 e 2;* X_1, *o nível de produção da firma 1;* X_2, *o nível de produção da firma 2; e A, B e D são os parâmetros.*

a) Determine a relação de externalidade nas firmas 1 e 2.
b) Mostre a maximização de lucros das firmas em separado e em conjunto, bem como os efeitos da externalidade.

Resolução

$$\text{Firma 1: } C_1 = A_1X_1^2 + B_1X_1 - D_1X_2^2 \qquad D_1 > 0$$

$$\text{Firma 2: } C_2 = A_2X_2^2 + B_2X_2 + D_2X_1^2 \qquad D_2 > 0$$

C_1 e C_2 $\Longrightarrow$ custos totais das firmas 1 e 2

X_1 $\Longrightarrow$ Nível de produção da firma 1

X_2 $\Longrightarrow$ Nível de produção da firma 2

A, B e D são os parâmetros.

a) Da firma 1 para a firma 2 a externalidade é negativa, pois, aumentando a produção da firma 1, aumentam-se os custos da firma 2. Da firma 2 para a firma 1 a externalidade é positiva, pois a produção da firma 2 reduz o custo da firma 1.

b) Maximizando π separadamente:

Firma 1 $\pi_1 = P_1X_1 - A_1X_1^2 - B_1X_1 + D_1X_2^2$

$$\text{Max } \pi_1 = d\,\pi_1/d\,X_1 = P_1 - 2A_1X_1 - B_1 = 0$$
$$P_1 - B_1 = 2A_1X_1$$
$$X_1 = (P_1 - B_1)/\,2A_1$$

Firma 2 $\pi_2 = P_2X_2 - A_2X_2^2 - B_2X_2 - D_2X_1^2$

$$\text{Max } \pi_2 = d\,\pi_2/d\,X_2 = P_2 - 2A_2X_2 - B_2 = 0$$
$$P_2 - B_2 = 2A_2X_2$$
$$X_2 = (P_2 - B_2)/\,2A_2$$

Maximizando π conjuntamente:

$$\pi_{1,2} = P_1X_1 + P_2X_2 - A_1X_1^2 - B_1X_1 + D_1X_2^2 - A_2X_2^2 - B_2X_2 - D_2X_1^2$$
$$\text{Max } \eth_1 = d\,\eth_{1,2}/dx_1 = P_1 - 2A_1X_1 - B_1 - 2D_2X_1 = 0$$
$$P_1 - B_1 = 2D_2X_1 + 2A_1X_1$$
$$P_1 - B_1 = X_1\,(2D_2 + 2A_1)$$
$$X_1 = (P_1 - B_1)\,/\,(2D_2 + 2A_1)$$

$$\text{Max } \pi_2 = d\,\pi_{1,2}/dx_2 = P_2 - 2A_2X_2 - B_2 + 2D_1X_2 = 0$$
$$P_2 - B_2 = 2A_2X_2 - 2D_1X_2$$
$$P_2 - B_2 = X_2(2A_2 - 2D_1)$$
$$X_2 = (P_2 - B_2) / (2A_2 - 2D_1)$$

4) Suponha que um pomar de maçãs está localizado próximo a um apiário. Este possui a seguinte função de custo de produção: $CT = 24X + X^2$, em que X é o número de colméias. Cada colméia rende R$ 40,00 ao apicultor com a venda do mel. O dono do pomar é beneficiado porque três colméias polinizam um hectare de maçãs e o proprietário do pomar não paga nada ao dono do apiário. Entretanto, existem colméias suficiente para polinizar toda a plantação de maçãs, portanto, é necessário completar a polinização artificialmente, ao custo de R$ 24,00 por hectare. Pergunta-se:

a) Quantas colméias o apicultor deve manter?

b) Quantas colméias seriam economicamente eficientes?

c) O que deveria ser feito para se obter maior eficiência na operação de polinização?

Resolução

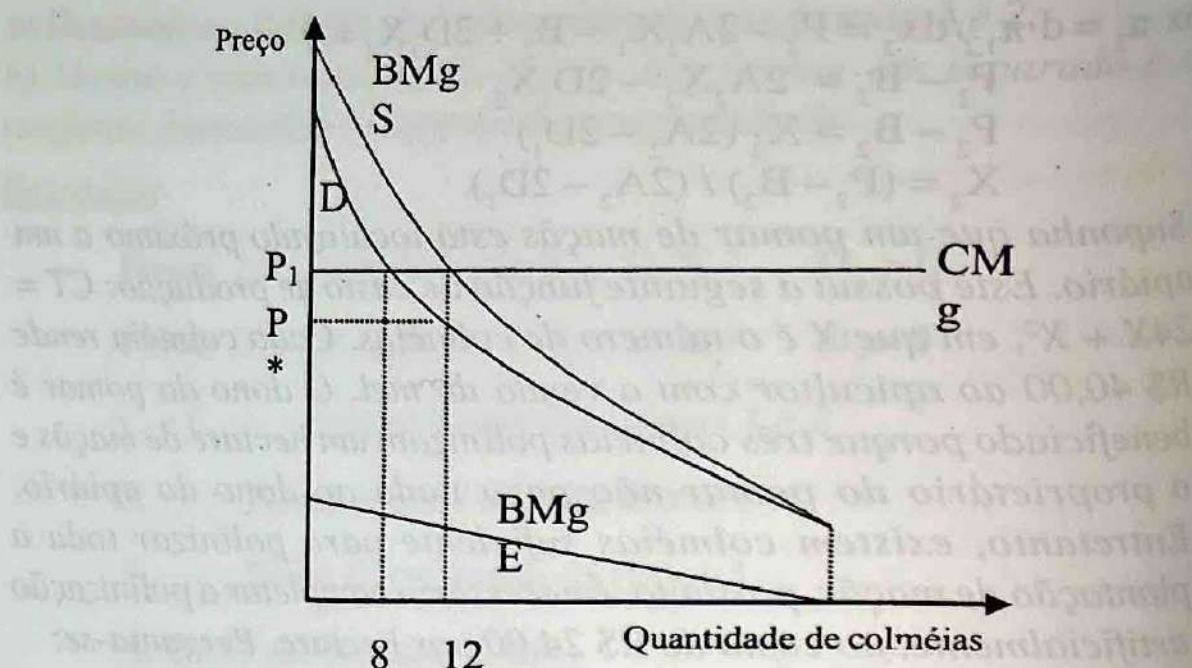
a) CMa = P → 24 + 2X = 40 → X = 8 colméias

b) O produtor de maçãs está disposto a pagar R$ 8,00 ao apicultor por colméia, ou seja, pelo serviço prestado por uma colméia.

BMa P = 40,00/colméia BMaS = 48/colméia

BmaS = CMg → 48 = 24 +2X → 48 – 24 = 2X

24 = 2X

X = 12 colméias

c) Ocorre a fusão do negócio da produção de maçãs com a produção de mel. Isso internalizaria a externalidade positiva da polinização das abelhas. Não sendo possível tal fusão, o produtor de maçãs deveria negociar um contrato referente aos serviços de polinização, que possivelmente teriam custos inferiores aos da polinização manual.

5. Explique detalhadamente as três formas de correção de ineficiência alocativa provocada pela existência de externalidade.

É sabido que na presença de externalidades os mercados competitivos não são capazes de gerar alocações eficientes de Pareto; portanto, diz-se que ocorrem ineficiências alocativas, sendo necessário se utilizar de alguns artifícios econômicos para que as alocações se tornem eficientes. Supondo uma empresa que produza externalidades negativas e que, portanto, a alocação ineficiente dos recursos esteja gerando um nível de produção acima do socialmente ótimo, existem três medidas aplicáveis para encorajar as empresas a reduzirem seus níveis de emissão.

a) Padrão de emissão de poluentes – é o limite legal que uma empresa poluidora está autorizada a emitir. Caso ultrapasse o índice estabelecido, ela poderá sofrer multas e até condenações por infringir o limite legal. O padrão irá assegurar que a empresa esteja produzindo eficientemente.

Após estabelecido o padrão, uma firma que queira ingressar no mercado terá de avaliar se ela será eficiente tanto em relação aos custos de produção tradicionais quanto em função do custo de reduzir a emissão de poluentes.

b) Imposto sobre emissão de poluentes – é arrecadado sobre cada unidade de poluente emitido por uma empresa. Com uma taxação, têm-se custos elevados, e, com isso, torna-se necessário reduzir o nível de produção para novamente trabalhar no ótimo econômico.

c) Permissões transferíveis para emissões – é um sistema que permite transferir as quotas de emissão de poluentes, de tal forma que aquelas que dispõem de menos meios para reduzir suas emissões tornam-se compradoras de autorizações. As empresas com curvas relativamente baixas de custo marginal de redução procurarão reduzir ao máximo suas respectivas emissões, enquanto aquelas com curvas relativamente altas de custo marginal de redução irão adquirir mais permissões, reduzindo menos suas emissões de poluentes.

6) *Suponha uma economia com duas firmas. As firmas A e B produzem, respectivamente, os bens a e b, empregando tecnologias que eliminam resíduos químicos. O custo de produção de ambas as firmas depende de x e y, em que x é a quantidade de resíduos que A decide produzir e y é a quantidade de resíduos que B decide produzir. As firmas são competitivas e determinam a quantidade produzida do bem e do resíduo de forma a maximizar seus lucros. A função custo de A e B é dada, respectivamente, por:*

$$C_A(a, x, y) = a^2 + (x-1)^2 + y$$
$$C_B(b, x, y) = b^2 + (y-1)^2 - x$$

Com base nessas informações, responda às questões a seguir:

a) Os resíduos produzidos por A e B são externalidades positivas ou negativas? Explique.

b) Determine as escolhas ótimas de cada firma quando tomam suas decisões separadamente. Calcule o lucro de cada firma.

c) Determine as escolhas ótimas no caso de uma fusão entre as firmas. Calcule o lucro resultante dessa fusão. Compare e explique as diferenças encontradas com o item anterior.

d) Mostre como um esquema de impostos (subsídios) de Pigou pode ser utilizado para que as quantidades obtidas com a fusão possam ser alcançadas por firmas que tomam suas decisões separadamente. Calcule o valor dos impostos e explique em detalhes como funciona o esquema.

Resolução

a) Se o resíduo (x) produzido por A contribui para reduzir o custo de B, este é uma externalidade positiva, de A para B. O resíduo (y), produzido por B, eleva o custo de A, portanto, é uma externalidade negativa, de B para A.

b) Firmas operando separadamente

Firma A $\Pi max_{a,x} = P_aA - A^2 - (x-1)^2 - y$

$d\Pi/dA = P_a - 2A = 0 \rightarrow P_a = 2A \rightarrow A = P_a/2$

$d\Pi/dx = -2(x-1) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$

Firma B $\Pi max_{b,y} = P_bB - B^2 - (y-1)^2 + x$

$d\Pi/dB = P_b - 2B = 0 \rightarrow P_b = 2B \rightarrow B = P_b/2$

$d\Pi/dy = -2(y-1) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow y = 1$

Supondo $P_a = 2$ e $P_b = 2$

$\Pi_a = 2 . 2/2 - 1^2 - (1-1)^2 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$

$\Pi_b = 2 . 2/2 - 1^2 - (1-1)^2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$

c) Fusão das firmas

$\Pi max_{a,x} = P_aA + P_bB - A^2 - (x-1)^2 - y - B^2 - (y-1)^2 + x$

$d\Pi/dA = P_a - 2A = 0 \rightarrow P_a = 2A \rightarrow A = P_a/2$

$d\Pi/dB = P_b - 2B = 0 \rightarrow P_b = 2B \rightarrow B = P_b/2$

$d\Pi/dx = -2(x-1) + 1 = 0 \rightarrow -2x + 2 + 1 = 0 \rightarrow x = 1,5$

$d\Pi/dy = -2(y-1) - 1 = 0 \rightarrow -2y + 2 - 1 = 0 \rightarrow y = 0,5$

$$\Pi = 2 \, . \, 2 / 2 + 2 \, . \, 2 / 2 - 1^2 + (0{,}5 - 1)^2 - 0{,}5 - 1 + (1{,}5 - 1)^2 + 1{,}5 = 3{,}5$$

Comparando a situação em que as firmas se fundiram com aquela em que elas operavam isoladamente no mercado, tem-se que o nível de produção será o mesmo, porém ocorre redução da produção de y, que é uma externalidade negativa, e aumento da produção de x, que é uma externalidade positiva. Isso implica que as firmas unidas obtêm maior lucro (3,5) em relação à soma dos lucros quando operavam isoladamente (2,0).

d) O Imposto Pigouviano é aquele aplicado às estruturas produtivas com o intuito de alocar os recursos eficientemente. É sabido que firmas que geram externalidades positivas normalmente produzem aquém do nível socialmente ótimo, sendo necessária uma concessão de subsídios a esta empresa para reduzir seu custo de produção, e, com isso, ela ofertará mais produtos. Ao contrário, uma empresa que gera externalidade negativa produz além do nível socialmente eficiente, de tal modo que é necessário impor um imposto a esta empresa para aumentar seu custo de produção e obrigá-la a reduzir seu nível de produção.

É interessante observar, que este imposto aplicado a uma firma competitiva fará com que ela reduza seus lucros, ao passo que o imposto aplicado a um segmento de produção certamente terá um custo para a sociedade, visto o poder que um setor tem de influenciar os preços dos produtos.

Para que as firmas, atuando isoladamente no mercado, possam produzir níveis de externalidades idênticos àqueles produzidos quando as firmas estavam juntas, será necessário aplicar um imposto sobre a produção da firma B, que gera externalidade negativa, e um subsídio sobre a produção da firma A, que gera externalidade positiva.

O fato é que um imposto sobre a produção de y aumenta o custo de produção, fazendo com que a firma B reduza a produção de y, para continuar no seu ponto de máximo econômico. Já o subsídio na produção de x fará com que a firma B aumente sua produção, visto que o subsídio pode ser encarado como uma redução dos custos; assim, a firma percebe

que deverá produzir mais para continuar no ótimo econômico privado, mas, com isso, acaba atingindo o ótimo social. Resta agora calcular os valores dos respectivos impostos e subsídios:

$d\Pi/dx = -2(x-1) = 0$

em que x, para as firmas unidas, é igual a 1,5, então:

$-2(1{,}5-1) = -3+2 = 1$

Conclui-se que o valor do subsídio é igual a R$ 1,00 / unidade de x.

$d\Pi/dy = -2(y-1) = 0$

sendo y, para as firmas unidas, igual a 0,5, então:

$-2(0{,}5-1) = -1+2 = 1$

Conclui-se que o valor do imposto é igual a R$ 1,00 / unidade de y.

15.6. Exercícios propostos

1) (Economia Pública – ISCTE) Uma conhecida danceteria começa a funcionar às 22h, diariamente. A sua receita por noite depende apenas das horas de funcionamento contínuo, representado por H. Assuma que essa receita está relacionada com as horas, da seguinte forma:

$R(H) = 64H$,

Os seus custos de operação, por noite, estão também relacionados com as horas de funcionamento:

$C(H) = 4H^2$.

Suponha que um grupo de moradores, incomodados com o barulho diário, estima em 16 u.m. por hora de funcionamento o custo associado ao ruído suportado pelos seus membros. Com base nessas informações, responda às questões a seguir:

a) A que horas desejariam os proprietários da discoteca encerrar suas atividades?
b) A que horas seria socialmente ótimo encerrar as atividades da discoteca?
c) Se a discoteca não se encontrasse abrangida por algum tipo de legislação que desse aos moradores locais o direito de não sofrer como ruídos dessa natureza, que tipo de acordo se espera que se verifique entre os

proprietários do estabelecimento e a associação de moradores? Quais pagamentos estão envolvidos?

d) Como se altera a sua resposta (c) se os moradores tiverem o direito de não serem perturbados pelos ruídos da discoteca, a partir da 22 horas?

2) (Economia Pública – ISCTE) Um exemplo de externalidade negativa pode ser visualizado através do seguinte exercício: um médico, que trabalha em um consultório localizado junto a uma pastelaria, se vê prejudicado, diariamente, pelos ruídos emitidos pela máquina utilizada pelo pasteleiro. Suponha que o benefício para o industrial da pastelaria, advindos do uso da máquina, seja igual a 40 u.m., enquanto o custo para o médico é de 60 u.m. Suponha que o industrial não possui qualquer alternativa ao uso da máquina e que, portanto, será requerido algum tipo de negociação entre as partes.

a) O que acontecerá se o proprietário da pastelaria for responsabilizado pelos danos causados ao médico?
b) O que aconteceria em caso contrário?
c) Como se altera a sua resposta às duas questões anteriores, se o dono da pastelaria pudesse utilizar um isolamento sonoro cujo custo fosse de 20 u.m.?
d) E se, cumulativamente, o médico pudesse mudar a disposição do consultório, eliminando o problema com um custo de 18 u.m.?
e) O que ocorreria se os custos de negociação de um acordo privado fossem de 25 u.m.? Comente.

15.7. Referências

BAUMOL, W.J.; OATES, W.E. **The theory of environmental policy**. New York: Printice-Hall, 1975.

CONTADOR, C.R. **Avaliação social de projetos**. São Paulo: Atlas, 2000.

EATON, B.C.; EATON, D.F. **Microeconomia**. 3.ed. São Paulo: Saraiva, 1999.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic theory**. Oxford: Oxford University Press, 1995. 981 p.

PEARCE, D.W.; TURNER, R.K. **Economics of natural resources and environment**. Londres: Harvester Wheatshealf, 1990. 178 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

RIBEIRO, F.L. **Valoração de danos ambientais**: uma análise do método de avaliação contingente. 2002. 108 p. Tese (Doutorado em Economia Aplicada) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

SADOULET, E.; DEJANVRY, A. **Quantitative development policy analysis**. Baltimore: The Johns Hopkins University, 1995. 397 p.

SILVA, R.G.; TEIXEIRA, E.C. **Impactos da Alca na poluição do ar no Brasil**: uma análise de equilíbrio geral computável. Viçosa: UFV, 2004. (Mimeogr.).

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. Rio de Janeiro: Campus, 1999. 740 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomic analysis.** New York: W.W. Norton & Company, 1992. 506 p.

Capítulo 16

Bens públicos

Alexandre Bragança Coelho[1]
Viviani Silva Lírio[2]

16.1. Introdução

Um resultado importante da teoria microeconômica é a eficiência dos mercados competitivos. É possível provar que, não havendo falhas de mercado, a utilização do mecanismo de mercado assegura resultados eficientes de Pareto, de forma que não é possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro. Esse é um resultado poderoso, pois significa que, se cada consumidor buscar maximizar sua utilidade e se cada firma procurar maximizar seu lucro, enfrentando uma estrutura competitiva de preços de bens e insumos, o resultado eficiente pode ser garantido. Isso representa uma economia de informação que cada agente precisa possuir e revela uma enorme vantagem sobre as soluções centralizadas. A "mão invisível" do mercado, parafraseando Adam Smith, representa uma solução elegante e eficiente, permitindo que a procura egoísta do bem-estar individual leve ao bem-estar coletivo.

Esse resultado, entretanto, está condicionado a uma hipótese importante: a inexistência de falhas de mercado. Suponha, por exemplo, a presença de externalidades. Externalidades são efeitos das atividades de consumo e produção que não se refletem diretamente no mercado. Quando os efeitos de uma externalidade encontram-se presentes, o preço de um bem não reflete necessariamente seu valor social e, conseqüentemente, as

[1] Professor do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: acoelho@ufv.br.
[2] Professora do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: vslirio@ufv.br.

firmas poderão vir a produzir quantidades excessivas ou insuficientes, gerando uma ineficiência alocativa (PINDYCK; RUBINFELD, 1998).

Os bens públicos são um caso especial de externalidade no consumo. Como todo indivíduo tem que consumir a mesma quantidade do bem público, suas utilidades estão inevitavelmente ligadas. Assim, a otimização de cada agente com respeito a seu consumo não é suficiente para alcançar o ótimo social. Nesse caso, a provisão de mercado dos bens públicos resulta quase sempre numa provisão ineficiente de Pareto (VARIAN, 1997).

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão sobre a questão dos bens públicos, com ênfase na análise das causas da ineficiência das soluções de mercado e na apresentação dos mecanismos que garantem a provisão eficiente desses bens.

16.2. Bens públicos: definição e características

De acordo com Mas-Collel et al. (1995), um bem público é uma mercadoria cujo uso de uma unidade por um agente não impede seu uso por outros agentes. Para Varian (1997), bem público é um bem que tem que ser fornecido na mesma quantidade para todos os consumidores afetados. De modo geral, as duas principais características de um bem público são: não-rivalidade e não-excludência. Um bem é não-rival se o consumo de uma pessoa não diminui a quantidade disponível para os outros consumidores. Analisando de forma diferente, Pindyck e Rubinfeld (1998) afirmam que um bem é não-rival quando, para qualquer nível específico de produção, o custo marginal de produção é zero para um consumidor adicional. Um exemplo é a utilização de um farol por navios: dado que o farol é construído e colocado em funcionamento, o uso por um navio adicional não representa qualquer aumento de custo. Um bem é não-excludente se uma pessoa não pode ser excluída de seu consumo, visto que ele é fornecido. Exemplos clássicos de bens públicos são: defesa nacional, iluminação pública, polícia, etc. Tome-se o exemplo da defesa nacional. Ela é não-rival, pois o consumo de defesa nacional por um indivíduo claramente não diminui a quantidade disponível para os demais. Além disso, ela é não-excludente, pois, uma vez oferecida uma quantidade

de defesa nacional, não é possível excluir nenhum indivíduo de seu consumo.

Os bens privados, por outro lado, são rivais e excludentes. Entretanto, há casos mistos em relação a essas características. Alguns bens são não-rivais, mas são excludentes. Um exemplo é o sistema de TV a cabo. Ela é não-rival, pois o consumo de TV a cabo de um indivíduo não diminui a quantidade disponível para os demais. Entretanto, ela é excludente, pois somente aquelas pessoas que têm acesso ao decodificador de sinal podem assistir à programação. Bens com essas características são chamados de *club goods* (VARIAN, 1992).

Outros bens são não-excludentes, porém são rivais. Um estacionamento gratuito é não excludente, pois nenhuma pessoa pode ser excluída de seu consumo. Entretanto, ele é rival, pois o consumo de uma vaga por uma pessoa diminui a quantidade de vagas disponíveis para os demais. Outro exemplo citado por Varian (1992) é uma rua abarrotada de pessoas (*crowded street*): todos podem usar a rua, mas o uso de uma pessoa reduz a quantidade de espaço disponível para os demais. A Tabela 16.1 auxilia na visualização das características de cada bem.

Tabela 16.1 - Características dos bens públicos e privados

Características dos bens	Excludente	Não-excludente
Rival	Bens privados	Ex.: Estacionamento gratuito
Não-rival	Ex.: TV a cabo	Bens públicos

Alguns bens possuem características de bens privados, mas são tratados como se fossem públicos. Um exemplo é a educação. Ela é excludente, pois claramente as pessoas podem ser excluídas de seu consumo; ela é também de alguma maneira um bem rival, pois o consumo de educação por uma pessoa acaba diminuindo a quantidade disponível para as demais. Entretanto, a maioria dos países tomou a decisão de prover

a mesma quantidade de educação[3] para todas as pessoas, seja por uma questão de eqüidade, seja pela presença de externalidades positivas para a sociedade. Dessa forma, na maior parte dos países, a educação pública tornou-se um direito fundamental do cidadão, o que faz com que não seja mais possível excluir as pessoas de seu consumo e a rivalidade adquire um aspecto apenas de espaço físico (há um número máximo de alunos por classe e escola).

Outro exemplo de um bem privado tratado como público é o atendimento à saúde. No Brasil, o Sistema Único de Saúde (SUS), criado pela Constituição de 1988, tem todas as características de um bem público, mesmo que o atendimento à saúde não seja um bem público *per se*. Pelo fato de existirem exemplos como os citados anteriormente, alguns autores começaram a denominar de bens públicos puros os bens que efetivamente apresentam as características de não-excludência e não-rivalidade, cujo exemplo clássico é a Defesa Nacional.

16.3. Provisão eficiente de um bem público

Uma questão importante em relação aos bens públicos diz respeito às condições necessárias para que a oferta de bens públicos seja eficiente no sentido de Pareto. Como já observado anteriormente, o consumo de bens públicos por um indivíduo gera externalidades positivas para os demais, pois todos têm de consumir a mesma quantidade do bem. Isso faz com que as funções de utilidade dos agentes sejam interdependentes e que as soluções de mercado não funcionem bem na alocação desse tipo de bens. A questão relevante é que os indivíduos não podem comprar quantidades diferentes do bem público e, assim, têm que decidir por uma quantidade comum. Dessa forma, as perguntas fundamentais a serem respondidas são as seguintes:

a) Quando um bem público deveria ser provido?

b) Como determinar a quantidade eficiente de um bem público?

[3] Na realidade, educação básica. Poucos países tratam a educação superior como um bem público, entre eles o Brasil.

16.3.1. Bens públicos discretos

Para responder a questão (a), Varian (1992) apresenta um exemplo simples, porém esclarecedor. Suponha que existam dois agentes (1 e 2) e dois bens (x e G). G é um bem público discreto e x é um bem privado ou o montante gasto com o consumo privado. Cada agente i possui uma dotação inicial, representada por w_i, e decide contribuir com uma quantidade g_i para adquirir o bem público. A utilidade de cada agente é dada por u_i (G, x_i), em que G não tem subscrito, pois a quantidade consumida é a mesma para todos os agentes.

Supondo que se pode decidir apenas se o bem público é provido ou não e que c é o custo de provisão de uma unidade do bem público, tem-se:

$$1 \text{ se } g_1 + g_2 \geq c$$
$$G = 0 \text{ se } g_1 + g_2 < c \qquad (16.1)$$

Isso significa que o bem público só é provido se a soma das contribuições dos indivíduos for pelo menos igual ao custo de provê-lo[4]. Essa condição, entretanto, não diz nada sobre a questão da eficiência da provisão de um bem público. Prover esse bem público só será eficiente de Pareto se:

$$u_1(1, w_1\text{-}g_1) \geq u_1(0, w_1) \qquad (16.2)$$

$u_2(1, w_2\text{-}g_2) \geq u_2(0, w_2)$, com uma dessas desigualdades se mantendo de forma estrita.

O que (16.2) indica é que só haverá melhoria de Pareto com a provisão do bem público se pelo menos um dos consumidores melhorar e o outro não piorar com a provisão. Definindo r_i como o preço de reserva do consumidor i pelo bem público, ou seja, se r_i é o preço em relação ao qual o consumidor i é indiferente entre adquirir ou não o bem público, tem-se por definição:

[4] Esta é uma condição suficiente para provisão. A condição necessária seria dada por $g_1 + g_2 = c$.

$$u_1(1, w_1 - r_1) = u_1(0, w_1) \quad (16.3)$$

$$u_2(1, w_2 - r_2) = u_2(0, w_2)$$

Juntando (16.2) e (16.3), obtém-se:

$$u_1(1, w_1 - g_1) \geq u_1(0, w_1) = u_1(1, w_1 - r_1) \quad (16.4)$$

$u_2(1, w_2 - g_2) \geq u_2(0, w_2) = u_2(1, w_2 - r_2)$, com pelo menos uma dessas desigualdades se mantendo de forma estrita.

Como a utilidade é estritamente crescente no consumo do bem privado, tem-se:

$w_1 - g_1 \geq w_1 - r_1$

$w_2 - r_2 \geq w_2 - r_2$, com pelo menos uma dessas desigualdades se mantendo de forma estrita.

Dessa forma:

$r_1 \geq g_1$

$r_2 \geq g_2$, com pelo menos uma dessas desigualdades se mantendo de forma estrita.

Somando ambos os lados e eliminando os termos, chega-se à condição de eficiência:

$$r_1 + r_2 > g_1 + g_2 = c \quad (16.5)$$

Assim, sempre que a soma das disposições a pagar pelo bem público for maior que o custo de provê-lo, será Pareto eficiente prover este bem. Essa é uma condição suficiente para provisão eficiente de um bem público discreto. É bom destacar, entretanto, que geralmente essa condição de eficiência será diretamente dependente da distribuição de riqueza inicial (w_1, w_2): Como r_1 e r_2 dependem de w_1 e w_2, é perfeitamente possível que para certa distribuição de renda $r_1 + r_2 > c$ e, para outra, $r_1 + r_2 < c$, mesmo supondo que as formas das funções utilidades de cada indivíduo não se modifiquem.[5]

[5] A exceção ocorre quando as funções utilidade são quase-lineares, pois assim os preços de reserva e o fornecimento ótimo do bem público serão independentes da riqueza (ao menos sobre alguma faixa de riqueza).

16.3.2. Provisão privada de um bem público discreto

A seção anterior indicou a condição para a provisão eficiente de um bem público discreto. A pergunta que se faz, então, é a seguinte: a provisão privada garante que essa condição será atendida? Varian (1997), continuando com o exemplo de dois consumidores, afirma que, se cada consumidor revela verdadeiramente sua disposição a pagar, então a provisão privada é eficiente. Contudo, o problema fundamental com a provisão privada é justamente a falta de incentivos para os consumidores revelarem sua verdadeira avaliação do bem público.

Suponha, por exemplo, que cada pessoa avaliasse o bem público igualmente, mas que o preço de reserva de cada um fosse maior que o custo de provisão, isto é, $r_1 > c$ e $r_2 > c$. Então, seria ótimo do ponto de vista individual mentir sobre o verdadeiro valor de r_i (no limite, $r_i=0$), pois a outra pessoa irá adquirir o bem público de qualquer modo. Entretanto, se ambos os consumidores agissem dessa forma, o bem público poderia não ser provido, mesmo que fosse ótimo fazê-lo.

Nesse tipo de situação, os agentes são conhecidos como "caronas" ou *free-riders*, pois tentam pegar carona nas outras pessoas, esperando que elas comprem o bem público sem a sua participação. O problema do "carona" acontece porque, mesmo que seja ótimo do ponto de vista coletivo dizer a verdade, não é ótimo do ponto de vista individual. Uma forma de distinguir essa diferença entre ótimo social e individual é usar o ferramental da Teoria dos Jogos (VARIAN, 1997). Suponha que cada indivíduo (1 e 2) possua uma riqueza inicial de \$ 500 e que cada um avalie um bem público (no exemplo, uma TV para dois colegas de quarto) em \$ 300. O custo da TV é de \$ 400. Como a soma das disposições a pagar excede o custo da TV, é Pareto eficiente comprar a TV. O mecanismo de decisão para a compra da TV será da seguinte forma: cada indivíduo deverá escrever num pedaço de papel se a TV deve ou não ser comprada. Se ambos dizem sim, então eles compram a TV e repartem o custo igualmente. Se ambos dizem não, então a TV não é comprada. E se um diz sim e o outro não, então aquele que disse sim deverá comprar a TV sozinho.

Nesse sistema, a matriz de "payoffs" do jogo é dada por:

Tabela 16.2 - Matriz de *payoffs*

		2	
		Compra	Não compra
1	Compra	\$600, \$600	\$400,\$800
	Não compra	\$800,\$400	\$500,\$500

É fácil notar que a estratégia dominante de ambos os jogadores é dizer não. Entretanto, se ambos dissessem sim, haveria uma melhoria para ambos os indivíduos. Esse exemplo é uma variante do conhecido Dilema do Prisioneiro e demonstra que o problema do "carona" está na incompatibilidade entre a otimização do ponto de vista individual e do ponto de vista da sociedade como um todo. De modo geral, a provisão privada do bem público não garante uma alocação eficiente de Pareto; pelo contrário, ela geralmente resulta em menos do bem público sendo oferecido que o nível eficiente.

16.3.3. Bens públicos contínuos

Para responder a questão b supracitada, deve-se supor a provisão de um bem público de forma contínua. Suponha novamente dois agentes (1 e 2) e dois bens, sendo G o bem público e x_i o bem privado. A obtenção da condição de eficiência de Pareto pode ser feita de duas formas:

1) De acordo com Varian (1997), fixando a utilidade do consumidor 2 em $\overline{u}_2$, o problema da maximização de 1 se resume a:

$$\max_{x_1, x_2, G} \mu_1(G, x_1) \text{ s.a } \mu_2(G, x_2)\ \mu_z = \text{ e } x_1 + x_2 + c(G) = w_1 + w_2 \qquad (16.6)$$

Assim, pode-se definir o Lagrangeano:

$$L = \mu_1(G, x_1) - \lambda[\mu_2(G, x_2) - \mu_z] - \mu[x_1 + x_2 + c(G) - w_1 + w_2] \ (16.7)$$

As condições de primeira ordem (CPO) são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G} - \lambda \frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G} - \mu \frac{\partial C(G)}{\partial G} = 0 \quad (16.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1} - \mu = 0 \quad (16.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda \frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial x_2} - \mu = 0 \quad (16.10)$$

De (16.9) e (16.10), obtém-se:

$$\mu = \frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1} \quad (16.11)$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial x_2} \quad (16.12)$$

De (16.8), tem-se:

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G} = \frac{\partial C(G)}{\partial G} \quad (16.13)$$

Substituindo (16.11) e (16.12) em (16.13):

$$\frac{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G}}{\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{\partial C(G)}{\partial G} \quad (16.14)$$

Como $\dfrac{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1}}$ = Taxa marginal de substituição entre o bem

público e o privado do agente 1 (TMS_1).

$$\frac{\dfrac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial x_2}}$$ = Taxa marginal de substituição entre o bem público e o privado do agente 2 (TMS_2).

$$\frac{\partial C(G)}{\partial G}$$ = Custo marginal de prover uma unidade extra do bem público (Cmg(G)).

Pode-se concluir que a condição de eficiência para provisão do bem público contínuo é dada por:

$$TMS_1 + TMS_2 = Cmg\ (G) \qquad (16.15)$$

2) Outra forma de derivar a condição anterior pode ser encontrada em Varian (1992). Ele supõe que, como G é agora contínuo, sua quantidade é dada através de uma função das contribuições de cada agente, ou seja, $G = f(g_1+g_2)$, e a utilidade de cada agente i é dada por $U_i(f(g_1+g_2), w_i-g_i)$. Pode-se incorporar a função de produção na função de utilidade e definir $u_i(g_1+g_2, w_i-g_i)$, com $u_i(G,x_i)$ sendo definida como $U_i(f(G),x_i)$. Isso não traz nenhuma perda, pois, em última instância, a utilidade depende das contribuições totais para o bem público. Assim, a partir dessas hipóteses, Varian decide alcançar a condição de eficiência através da maximização da soma ponderada das utilidades dos agentes:

$$\max_{g_1,\, g_2} a_1u_1(g_1 + g_2, w_1 - g_1) + a_2u_2(g_1 + g_2, w_2 - g_2) \qquad (16.16)$$

As condições de primeira ordem (CPO) são dadas por:

$$a_1\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G} + a_2\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G} = a_1\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1} \qquad (16.17)$$

$$a_1 \frac{\partial u_1(G, x_1)}{\partial G} + a_2 \frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial G} = a_2 \frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial x_2} \quad (16.18)$$

Assim, de (16.17) e (16.18), conclui-se:

$$a_1 \frac{\partial u_1(G, x_1)}{\partial x_1} = a_2 \frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial x_2} \quad (16.19)$$

Dividindo o lado esquerdo de (16.17) e (16.18) pelo respectivo lado direito e levando em conta a igualdade supracitada, tem-se:

$$\frac{\frac{\partial u_1(G, x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(G, x_1)}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial G}}{\frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial x_2}} = 1 \quad (16.20)$$

Isso significa que, nesse caso, a condição de eficiência para provisão do bem público contínuo é fornecida por:

$$TMS_1 + TMS_2 = 1 \quad (16.21)$$

A aparente discrepância entre (16.21) e (16.15) é facilmente explicável. Como no método 2 o bem público é apenas a soma das contribuições g_1 e g_2, o custo marginal de G é igual a 1. Assim, (16.21) pode ser reescrito como:

$$TMS_1 + TMS_2 = Cmg\ (G) \quad (16.22)$$

É válido ressaltar as diferenças nas condições de eficiência entre bens públicos e privados. Para um bem privado, a TMS deve se igualar ao custo marginal para cada indivíduo. Para um bem público, entretanto, é a soma das TMS dos agentes que deve se igualar ao custo marginal. A compreensão dessa condição não é difícil: interpretando a taxa marginal de substituição como a disposição marginal a pagar (em termos de bens

privados) por uma unidade adicional do bem público, o que a condição de eficiência diz é que a soma das disposições marginais a pagar tem que ser igual ao custo marginal de prover uma unidade extra do bem público. Note que esta condição é um pouco diferente da condição de eficiência para os bens públicos discretos, em que a soma das disposições marginais a pagar deveria ser maior que o custo de prover o bem público. Isso acontece porque, com bens discretos, só há um nível de bem público e, assim, a escolha se resume em prover ou não o bem. Dessa forma, sempre que a soma das disposições a pagar for maior que o custo do bem público, é Pareto eficiente prover o bem. No caso dos bens contínuos, por outro lado, em que o bem público pode ser oferecido em vários níveis, sempre que a soma das disposições marginais a pagar exceder o custo marginal, é apropriado prover mais do bem público, pois isso representa claramente uma melhoria de Pareto; apenas quando há a igualdade é que se chega à condição de eficiência.

16.3.4. Oferta privada de um bem público contínuo

Para examinar se a provisão privada de um bem público contínuo garante uma alocação eficiente, suponha, num modelo de dois agentes (1 e 2), que cada agente decida de forma independente quanto ele contribui para a compra do bem público. Se o agente 1 acha que o agente 2 irá contribuir com g_2, então o problema da maximização de 1 é dado por:

$$\max_{g_1} u_1(g_1 + g_2, w_1 - g_1) \text{ com } g_1 \geq 0 \qquad (16.23)$$

A condição $g_1 \geq 0$ determina que a contribuição deve ser positiva ou nula; 1 pode apenas aumentar a quantidade do bem público, mas não diminuir. Usando as condições de primeira ordem de Kunh-Tucker, tem-se que:

$$\frac{\partial u_1(g_1 + g_2)}{\partial G} - \frac{\partial u_1(g_1 + g_2)}{\partial x_1} \leq 0 \text{, com igualdade se } g_1 > 0 \qquad (16.24)$$

Isso significa que:

$$\frac{\dfrac{\partial u_1(g_1+g_2)}{\partial G}}{\dfrac{\partial u_1(g_1+g_2)}{\partial x_1}} \leq 1 \quad \text{, com igualdade se } g_1 > 0 \qquad (16.25)$$

Assim, se o agente i contribui com um valor positivo (gi>0), então sua TMS entre o bem público e o privado deve se igualar ao custo marginal do bem público, que no caso acima é igual a 1. Se a sua TMS é menor que este custo, ele não irá querer contribuir. Isso é mais fácil de visualizar através do exame da Figura 16.1. Analisando o caso do ponto de vista do agente 1, pode-se definir sua dotação inicial como o ponto (w_1, g_2), pois a quantidade de consumo privado que ele recebe se não contribuir com nada é w_1 e a quantidade do bem público é g_2. A restrição orçamentária é a reta com declividade –1 que passa por este ponto, e os pontos factíveis nesta reta são aqueles em que $g_1 = w_1 - x_1 \geq 0$, ou seja, a parte em negrito desta reta. Na figura citada estão descritos os dois casos possíveis: em A, a $TMS_1=1$, e, assim, é ótimo do ponto de vista de 1 contribuir com uma quantidade positiva para provisão do bem público (g1>0). Em B, como $TMS_1<1$, é ótimo do ponto de vista individual pegar carona na contribuição de 2 e simplesmente consumir sua dotação, representada por (w_1, g_2), pois este ponto representa agora sua curva de indiferença mais elevada que é possível atingir com a restrição orçamentária.

Como (16.25) deve ser satisfeita simultaneamente para ambos os agentes, pode-se definir um equilíbrio de Nash, que aponta as contribuições (g_1^*, g_2^*) de forma que cada agente esteja contribuindo com uma quantidade ótima, dada a contribuição do outro agente. Assim, as condições que definem esse equilíbrio são:

$$\frac{\dfrac{\partial u_1(G^*, x_1^*)}{\partial G^*}}{\dfrac{\partial u_1(G^*, x_1^*)}{\partial x_1}} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{\dfrac{\partial u_2(G^*, x_2^*)}{\partial G^*}}{\dfrac{\partial u_2(G^*, x_2^*)}{\partial x_2}} \leq 1 \qquad (16.26)$$

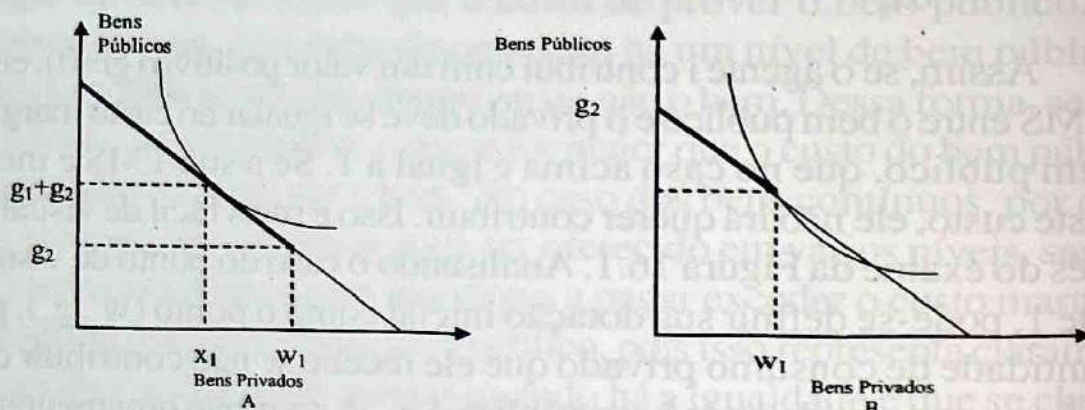



Figura 16.1 - O problema do carona
Fonte: Varian (1992).

Se uma quantidade positiva de G é provida, então pelo menos uma dessas desigualdades deve se manter com igualdade. Dessa forma, há novamente o problema do carona: do ponto de vista individual, é ótimo não contribuir com nada e deixar a provisão do bem público apenas para o agente que possui a TMS=1.

16.4. Mecanismos alternativos para provisão de bens públicos

A ineficiência dos mercados privados na provisão de bens públicos estimulou a busca de mecanismos alternativos que garantissem uma alocação mais adequada aos objetivos de maximização dos benefícios sociais. Entre esses mecanismos, Varian (1997) destaca dois grupos principais: os mecanismos de comando, em que uma pessoa ou um pequeno grupo determina a quantidade dos vários bens públicos que serão fornecidos à população; e os mecanismos de votação, em que os indivíduos decidem pela provisão do bem público através do voto. A pergunta fundamental é: são eles capazes de garantir uma alocação eficiente de Pareto?

16.4.1. Mecanismos de votação

a) Bens discretos

Suponha que a provisão de um bem público discreto seja decidida através de uma votação majoritária, havendo três consumidores que devem decidir se um bem público que custa $99 deve ser provido ou não. Se a maioria votar pela provisão, então o custo é dividido igualmente para cada consumidor ($33). Os preços de reserva para os três consumidores são r_1=90, r_2=30 e r_3=30. Já foi provado anteriormente que a condição de eficiência para a provisão de um bem público discreto é de que a soma dos preços de reserva deve exceder o custo de provisão: no caso citado, claramente é eficiente prover o bem público.

Entretanto, nesse caso, apenas o consumidor 1 irá votar pela provisão, pois somente ele conseguirá um benefício líquido se o bem for provido. O problema com a votação majoritária é que ela mede apenas as preferências ordinais para o bem público, enquanto a condição de eficiência requer a comparação das disposições a pagar de cada consumidor. Assim, é bem provável que o consumidor 1 estivesse disposto a compensar os demais consumidores de modo que eles votassem pela provisão, mas essa possibilidade pode não estar disponível.

Outra forma de votação consiste nos indivíduos declarando suas disposições a pagar pelo bem público, com a regra de que ele será provido se a sua soma exceder o custo do bem público. Se o custo para cada consumidor é fixo, ou seja, se independe do valor declarado, então não há equilíbrio para esse jogo. Considere, por exemplo, o caso dos três consumidores supracitados. Como o consumidor 1 estará claramente em melhor situação com a provisão do bem público e ele não paga nada a mais se exagerar na sua avaliação, certamente ele declarará um valor muito superior ao seu verdadeiro r_1. Da mesma forma, como os agentes 2 e 3 sofrem uma perda líquida com a provisão, eles irão declarar um valor muito inferior a seus verdadeiros preços de reserva.

Uma maneira de tentar reprimir esse tipo de comportamento é determinar que cada consumidor irá arcar com o valor declarado de sua disposição a pagar. Nesse caso, se a provisão do bem público é Pareto

eficiente, então este é um equilíbrio desse jogo. De acordo com Varian (1992), qualquer conjunto de declarações tal que a declaração de cada agente não seja maior que seu preço de reserva e cuja soma seja igual ao custo do bem público é um equilíbrio. Contudo, há também muitos outros equilíbrios ineficientes, pois esse mecanismo não impede o comportamento oportunista dos agentes: por exemplo, os agentes podem tentar "pegar carona" nos demais, declarando seu preço de reserva igual a zero e esperando, assim, não precisar arcar com o custo de provisão. Entretanto, se todos pensarem da mesma forma, pode haver um equilíbrio, com todos declarando o preço de reserva igual a zero, e o bem público pode não ser provido mesmo que seja eficiente fazê-lo.

b) Bens contínuos

Suponha agora que é possível determinar mais de um nível de gasto para a compra do bem público. Esses níveis podem ser denominados de A, B e C. Suponha também que haja três consumidores: 1, 2 e 3. É possível mostrar que um mecanismo de votação majoritária não encontra um equilíbrio, no sentido de que haverá sempre uma maioria que prefere outra alocação. Por exemplo, suponha que A prefere 1 a 2 e 2 a 3; B prefere 2 a 3 e 3 a 1; e C prefere 3 a 1 e 1 a 2. Nesse caso, há uma maioria que prefere 1 a 2, uma maioria que prefere 2 a 3 e uma maioria que prefere 3 a 1. Assim, não importa qual quantidade provida do bem público, haverá sempre uma maioria querendo modificá-la. Esse é um exemplo do chamado Paradoxo da Votação. Nesse caso, diz-se que as preferências sociais geradas por esses consumidores não são transitivas. Dependendo da ordenação em que as alternativas são apresentadas, é possível que a votação determine qualquer uma das alternativas como vitoriosa.

Uma maneira de eliminar esse paradoxo é supor que as preferências dos consumidores tenham um máximo único. Isso significa que a utilidade líquida de diferentes níveis de gasto com o bem público aumenta até um determinado ponto e depois decresce, como na Figura 16.2a. Suponha, por exemplo, que o nível corrente de gasto no bem público é G e há uma votação para decidir se esse gasto deve ser aumentado ou diminuído.

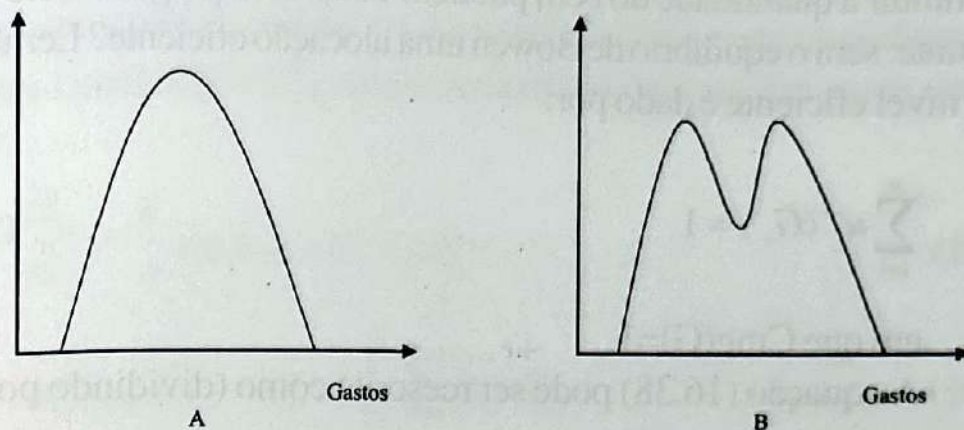



Figura 16.2 - Formas das preferências: com máximo único (painel A, à direita) e com vários máximos (painel B, à esquerda).

Se a maioria decidir pelo aumento, cada agente i irá pagar uma fração s_i do custo adicional. Assumindo que as funções utilidades dos agentes assumem uma forma quase-linear (não há efeito renda), se G unidades do bem público são providas, o agente i tem uma utilidade de $u_i(G)-s_iG$. Dessa forma, ele irá votar pelo aumento na provisão do bem público se $u_i'(G)>s_i$. Se cada agente i tem preferência com máximo único, então $u_i(G)-s_iG$ possui, obviamente, apenas um máximo. Assumindo que essa condição é satisfeita, suponha que G_i seja o ponto onde a utilidade do agente i seja maximizada. Então, é fácil ver que o único equilíbrio dessa votação é dado pela mediana de todos os G's. Para facilitar, suponha que cada agente tenha um valor diferente de G_i e que há um número ímpar de consumidores votantes. Se existem n+1 votantes, então o votante mediano é aquele tal que existem n/2 votantes que preferem mais do bem público e n/2 votantes que preferem menos. Se o agente m é o votante mediano, então o nível do bem público que garante o equilíbrio na votação G_v é dado por:

$$u'_m(G_v)=s_m \tag{16.37}$$

Esse equilíbrio é conhecido como equilíbrio de Bowen. Fica claro que ele é realmente um equilíbrio, pois não há maioria que queira aumentar

ou diminuir a quantidade do bem público. Todavia, a pergunta relevante é a seguinte: será o equilíbrio de Bowen uma alocação eficiente? Lembrando que o nível eficiente é dado por:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'(G_e) = 1 \qquad (16.38)$$

em que Cmg(G)=1.

A equação (16.38) pode ser reescrita como (dividindo por 1/n):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i'(G_e) = \frac{1}{n} \qquad (16.39)$$

O lado esquerdo desta equação representa a média das utilidades marginais líquidas. Dessa forma, o nível eficiente do bem público é determinado pela condição de que a média das disposições a pagar deve igualar o custo médio. Esta condição deve ser comparada com a condição que determina o equilíbrio na votação [Equação (16.37)], em que é a disposição a pagar do consumidor mediano que determina a quantidade de equilíbrio do bem público. Apenas quando o consumidor mediano deseja a mesma quantidade do bem público que o consumidor médio é que a quantidade provida pela votação será eficiente. Caso contrário, ou muito ou pouco do bem público será provido, sendo isso o que geralmente acontece.

Um exemplo esclarecedor pode ser visualizado imaginando-se a forma da função utilidade como $b_i \ln G + x_i$. e que cada consumidor é obrigado a pagar uma parcela igual a 1/n do bem público. O nível eficiente do bem público (G_e) é dado por:

$$\frac{b_1}{G_e} + \frac{b_2}{G_e} + \frac{b_3}{G_e} + ... + \frac{b_n}{G_e} = 1$$

$$G_e = \sum_i b_i \qquad (16.40)$$

A quantidade de equilíbrio com votação é aquela que é ótima para o consumidor mediano, ou seja, definindo b_m como o parâmetro de lnG deste consumidor e G_v como a quantidade de equilíbrio com votação, tem-se:

$$\frac{b_m}{G_v} = \frac{1}{n} \text{ ou seja, } G_v = nb_m \qquad (16.41)$$

$$\text{Assim, } G_e > G_v \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_i b_i > b_m \qquad (16.42)$$

O que (16.42) informa é que, sempre que o consumidor médio valorar o bem público de forma superior à do consumidor mediano, a quantidade provida pelo sistema de votação será inferior à quantidade eficiente. Da mesma forma, sempre que o consumidor mediano valorar o bem público de forma superior à do consumidor médio, a quantidade provida pelo sistema de votação será superior à quantidade eficiente. A quantidade provida pelo sistema de votação só será eficiente se $\frac{1}{n}\sum_i b_i = b_m$, ou seja, se a valoração do bem público pelo consumidor mediano for igual à do consumidor médio.

16.4.2. Imposto de Lindahl

Outra forma alternativa de procurar garantir uma alocação eficiente do bem público é usando uma espécie de mecanismo de preço. Suponha que para cada consumidor seja oferecido tanto quanto ele deseja do bem público ao preço p_i. Dessa forma, o consumidor deve resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max_{x_i, G} u_i(G, x_i) \text{ tal que } x_i + p_i G = w_i \qquad (16.43)$$

A condição de primeira ordem para esse problema é dada por:

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial G}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = p_i \tag{16.44}$$

A pergunta fundamental é se existe (e, no caso afirmativo, qual é) o conjunto de preços que irá levar os consumidores a escolher a quantidade eficiente do bem público. Sabe-se, da análise das condições de eficiência, que a quantidade eficiente deve satisfazer a condição[6]:

$$\frac{\frac{\partial u_1(G^*, x_1^*)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(G^*, x_1^*)}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial u_2(G^*, x_2^*)}{\partial G}}{\frac{\partial u_2(G^*, x_2^*)}{\partial x_2}} = 1 \tag{16.45}$$

Assim, se $p_i^* = \frac{\frac{\partial u_i(G^*, x_i^*)}{\partial G}}{\frac{\partial u_i(G^*, x_i^*)}{\partial x_i}}$, pode-se garantir a provisão eficiente dos bens públicos. Esses preços são conhecidos como preços de Lindahl. Alguns, entretanto, preferem chamá-lo de imposto de Lindahl, pois, imaginando que G unidades do bem público são providas, cada agente deve pagar um montante igual a $p_i G$, ou seja, uma espécie de "imposto" sobre G ponderado pela "alíquota" p_i.

No entanto, apesar das propriedades atrativas do imposto de Lindahl, seu realismo é questionável (MAS-COLLEL et al., 1995). Seus dois principais problemas são:

a) A capacidade em excluir o consumidor do uso do bem público é essencial para o conceito de equilíbrio implícito no sistema.

---

[6] No caso de dois consumidores e Cmg(G)=1.

b) Mesmo que a exclusão fosse possível, esses são mercados com apenas um consumidor do lado da demanda. Dessa forma, um comportamento de tomador de preços como presumido anteriormente é improvável de ocorrer.

16.5. Mecanismos de revelação de demanda

De toda a argumentação anterior, pode-se notar claramente que um dos problemas fundamentais para a provisão eficiente de bens públicos é a falta, nos mecanismos descentralizados de alocação de recursos, de mecanismos que forneçam incentivos para os agentes revelarem corretamente suas preferências sobre o bem público. A provisão privada geralmente resulta em menos que a quantidade eficiente, e os mecanismos de votação podem resultar em muito ou pouco do bem público sendo ofertado. Nesse contexto, será possível formular mecanismos que incentivem os agentes a revelar sua verdadeira demanda e que minimizem o problema do "carona"?

Para examinar essa questão, Varian (1992) supõe novamente um modelo com bem público discreto, em que G pode assumir 0 ou 1. Se r_i é o preço de reserva do agente i, s_i é a parcela do custo paga por i e c é o custo de provisão do bem público, então $s_i c$ é o total que o agente i deve pagar se o bem público é provido. Definindo $v_i = r_i - s_i c$ como o valor líquido do bem público para o agente i, então é eficiente prover o bem público se:

$$\sum_i v_i = \sum_i (r_i - s_i c) > 0 \qquad (16.46)$$

Como já foi visto na análise dos esquemas de votação, o mecanismo de perguntar a cada indivíduo seu valor líquido e prover o bem público quando a soma desses valores é maior que zero não funciona, pois é ótimo do ponto de vista individual exagerar ou minimizar a avaliação, dependendo se v_i é maior ou menor que zero. Da mesma forma, o mecanismo que obriga os consumidores a pagarem o valor declarado não está imune ao problema do "carona', em que os consumidores tentam se aproveitar da provisão do bem público sem participar de seu pagamento,

através de uma declaração falsa de sua verdadeira avaliação. É preciso, assim, elaborar um esquema em que o desvio da verdade para cada agente tenha como contrapartida um custo que o incentive à revelação de sua demanda verdadeira.

Um esquema possível é conhecido como Mecanismo Groves-Clarke (ou Vickrey-Groves-Clarke). Ele se apóia em três "fases" principais:

1. Cada agente declara um valor b_i para o bem público. Este valor pode ou não ser igual ao verdadeiro valor v_i.
2. O bem público é provido se $\sum_i b_i \geq 0$ e não é provido se $\sum_i b_i \leq 0$.
3. Cada agente i recebe um pagamento igual à soma de todas os demais valores, $\sum_{i \neq j} b_j$, se o bem público é provido (se esta soma for positiva, o agente i recebe; se ela for negativa, ele paga esta quantia).

Não é difícil ver que dizer a verdade é a estratégia dominante de qualquer agente, ou seja, é ótimo para o agente i declarar $b_i = v_i$, independentemente do que os outros agentes fazem. Para isso, basta analisar o *payoff* do agente i:

Payoff de i = 1) $v_i + \sum_{i \neq j} b_j$ se $b_i + \sum_{i \neq j} b_j \geq 0$

2) 0 se $b_i + \sum_{i \neq j} b_j < 0$

Suponha inicialmente que $v_i + \sum_{i \neq j} b_j > 0$, ou seja, 1 seja superior a 2, ou a provisão do bem público para o agente i seja preferida à não-provisão. O agente i pode garantir que o bem público será provido se ele disser a verdade, ou seja, se ele declarar $b_i = v_i$. Por outro lado, se $v_i + \sum_{i \neq j} b_j <$ 0, a não-provisão do bem público é superior à sua provisão para o agente i. Para garantir a não-provisão, basta ao agente i dizer a verdade, ou seja, declarar $b_i = v_i$. Assim, em ambos os casos, é ótimo para o agente i dizer a verdade e não há incentivo para mentir sobre as preferências verdadeiras, independentemente da ação dos demais agentes. Isso acontece porque,

com este esquema, cada agente agora enfrenta o problema da decisão social ao invés de um problema de decisão individual e, assim, tem um incentivo para revelar sua verdadeira demanda pelo bem público.

Um problema com esse mecanismo é que o total de pagamentos pode se tornar muito elevado, inviabilizando a implementação desse esquema. Para tentar contornar esse problema, Groves e Clarke formularam um mecanismo em que esses pagamentos são sempre não-positivos, ou seja, os agentes são obrigados a pagar uma "taxa", mas nunca recebem pagamentos. Esse esquema ficou conhecido como Imposto de Clarke ou Imposto de Groves-Clarke. Ele introduz a questão dos agentes-pivô, que são aqueles que modificam a decisão social, ou seja, são aqueles que determinam a provisão ou não do bem público. Assim, são os agentes-pivô que importam: assegurando que eles possuam os incentivos corretos, está se assegurando que as pessoas que "realmente importam" digam a verdade. Contudo, que incentivo deve ser dado aos agentes-pivô? Quando uma decisão social é modificada, haverá algum dano imposto aos outros agentes. Se se impuser esse custo social aos agentes-pivô, estar-se-á garantindo que eles enfrentem o custo social verdadeiro de sua decisão, ou seja, "o mal" que impõem às demais pessoas. Dessa forma, caso o agente pivô i mude a decisão social de provisão para não-provisão, ele deverá enfrentar o custo de $\sum_{j\neq i} b_i$. Caso o agente pivô i mude a decisão social de não-provisão para provisão, ele deverá pagar a quantia $-\sum_{j\neq i} b_i$. Desse modo, o mecanismo do imposto de Clarke pode ser dividido em três etapas:

1. Cada agente declara um valor b_i para o bem público. Este valor pode ou não ser igual ao verdadeiro valor v_i.
2. O bem público é provido se $\sum_i b_i \geq 0$ e não é provido se $\sum_i b_i < 0$.
3. Se a pessoa j muda a decisão social de provisão para não-provisão, o "imposto" que ela enfrenta será igual a $\sum_{i\neq j} b_i$. Se a pessoa j muda a decisão social de não-provisão para provisão, o imposto será de $-\sum_{i\neq j} b_i$

Assim, o *payoff* do agente i é dado por:

payoff de i: 1) v_i se $\sum_i b_i \geq 0$ e $\sum_{j \neq i} b_j \geq 0$

2) $v_i + \sum_{j \neq i} b_j$ se $\sum_i b_i \geq 0$ e $\sum_{j \neq i} b_j < 0$

3) $-\sum_{j \neq i} b_j$ se $\sum_i b_i < 0$ e $\sum_{j \neq i} b_j \geq 0$

4) 0 se $\sum_i b_i < 0$ e $\sum_{j \neq i} b_j < 0$

Observando as linhas 2 e 3 da matriz de *payoffs*, pode-se notar que o agente i deve pagar o imposto de Clarke apenas quando ele modifica a decisão social e o imposto é igual ao dano imposto aos demais agentes. É fácil ver que é vantajoso para o agente i sempre dizer a verdade: o imposto que ele deve pagar não depende do valor declarado se ele é um agente-pivô e, caso ele não seja pivô, uma superestimação ou subestimação do valor declarado não modifica seus ganhos. Em última análise, é vantajoso dizer a verdade porque nenhum agente é taxado em mais do que a decisão vale para ele.

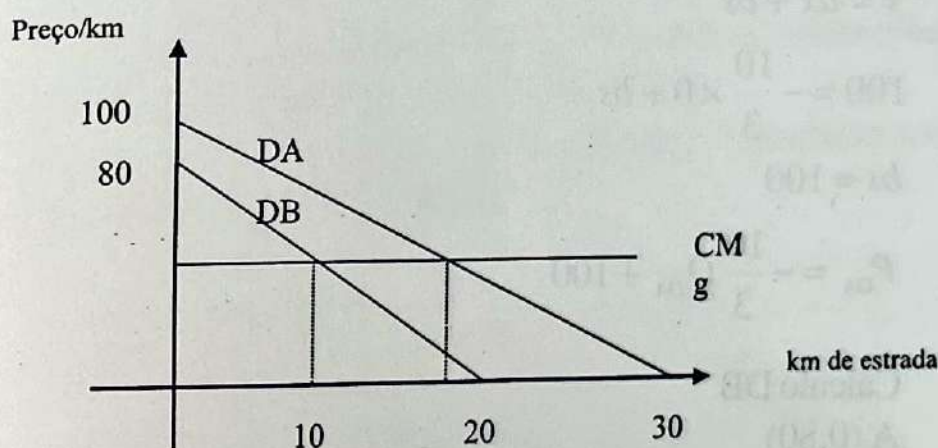
O mecanismo do imposto de Clarke apresenta alguns problemas importantes:

1) As preferências dos agentes devem ser quase-lineares, pois não pode haver efeitos renda quando da utilização do imposto, já que isso representaria uma mudança nos preços de reserva de todos os agentes.

2) Como o imposto deve sair do sistema (ou ser pago ao Governo), o consumo privado será menor do que na utilização do imposto. Assim, a alocação dos bens públicos e privados em conjunto não será Pareto-eficiente. Entretanto, o bem público será provido se e somente se for eficiente fazê-lo.

3) Há um dilema entre eqüidade e eficiência com o imposto de Clarke, pois ele depende de um esquema de pagamento que não necessariamente contempla as diferenças de renda existentes na sociedade.

16.6. Exercícios resolvidos

1. Os produtores rurais da pequena vila "Horizontes" vêm reivindicando ao prefeito municipal a construção de uma estrada ligando a vila ao município, cuja distância é de 30 km. O prefeito alegou que, por falta de recursos financeiros, os produtores deveriam participar dos custos da obra. Os produtores concordaram e, logo em seguida, foi feito um levantamento de dados junto à comunidade, resultando no seguinte gráfico:

em que DA é a demanda de um grupo de produtores de maior renda; DB, a demanda do grupo de produtores de menor renda; e CMg, o custo marginal de construção da estrada.

a) Seria possível estimar as demandas DA e DB? Como você procederia?

b) Se a estrada fosse um bem público, quantos quilômetros seriam construídos? Haveria nesse caso o problema do free rider? Represente a demanda social.

c) Se a estrada fosse um bem privado, quantos quilômetros seriam construídos?

d) As respostas dos itens (b) e (c) diferem? Justifique sua resposta.

e) Uma alocação eficiente de Pareto seria alcançada se os produtores B revelassem sua verdadeira curva de demanda DB e os produtores tentassem ser free rider?

Resolução

a) 30 km

Cálculo DA

A (0,100)

B (30,0)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{10}{3}$$

$$y = ax + bs$$

$$100 = -\frac{10}{3} \times 0 + bs$$

$$bs = 100$$

$$P_{DA} = -\frac{10}{3} Q_{DA} + 100$$

Cálculo DB

A (0,80)

B (20,0)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -4$$

$$y = ax + bs$$

$$80 = -4 \times 0 + b$$

$$b = 80$$

$$P_{DB} = -4Q_{DB} + 80$$

b) Bens públicos

Benefício marginal -> $\sum$ *todos os usuários desta mercadoria*

$\sum$ *todos os usuários desta mercadoria* = CM_a

Curva da demanda informa o benefício marginal que o consumidor recebe a partir do consumo de cada nível de produção.

Cálculo da soma dos benefícios marginais = somar verticalmente cada uma das curvas.

$$P_S = P_{DA} + P_{DB} = (-10/3Q + 100) + (-4Q + 80)$$

$$P_S = -\frac{22}{3}Q + 180 = Demanda\ Social$$

O problema do *Free rider*

Sim. Os produtores de menor renda poderiam não querer contribuir, já que, conhecendo a DA dos produtores de maior renda, eles sabem que ao CMa=40 seriam construídos 18 km.

Quantidade eficiente = aquela em que o benefício social da sociedade é igual a seu custo marginal.

$$P_S = -\tfrac{22}{3}Q + 180$$

$$CMa = P_S$$

$$P_S = 40$$

$$-\frac{22}{3}Q + 180 = 40$$

$$Q = 19{,}09\ km$$

$$P_{DB} = 40$$

$$-4Q + 80 = 40$$

$$Q = 10$$

c) $CMg = P_{DA}$ e $Q = 18$

$CMg = P_{DB}$ e $Q = 10$

Considerando os produtores de maior renda, seriam construídos apenas 18 km. Levando em consideração os produtores de menor renda, seriam construídos 10 km.

d) Sim. O nível eficiente de fornecimento de uma mercadoria provada é determinado fazendo-se uma comparação entre o benefício marginal de uma unidade adicional e o custo marginal da produção da mesma unidade. A eficiência é alcançada quando o benefício marginal e o custo marginal forem iguais entre si. Já com bens públicos, deve-se perguntar qual o valor que cada pessoa atribui a cada unidade adicional. Posteriormente, para poder determinar o nível eficiente de oferta do bem público, deve-se igualar a soma desses benefícios marginais ao custo marginal de sua produção. A quantidade eficiente produzida é aquela para a qual o benefício marginal da sociedade seja igual ao custo marginal.

e) Não. Nesse caso, se os produtores tentassem ser caronas, a estrada não seria construída, visto que a prefeitura alega não ter recursos financeiros para executar a obra. Caso os produtores de menor renda revelassem sua verdadeira curva de demanda DB, de nada adiantaria, pois, se forem carona, a estrada não seria construída.

2) *Considere o seguinte jogo como uma solução para o problema de bens públicos, no caso de bens discretos e com dois agentes. Cada agente "i" revela sua proposta* b_i. *Se* $b_1 + b_2 \geq c$, *o bem é fornecido e cada agente contribui com a quantia igual à sua proposta . Caso o bem não seja fornecido, ninguém paga nada. A provisão eficiente desse bem é um equilíbrio para esse jogo? Há outros equilíbrios? Comente.*

Resolução

$b_1 + b_2 \geq c$ O bem é fornecido e cada um contribui com uma quantia igual à sua proposta b_i.

Não seja fornecido = ninguém paga nada.

$$(b_1, b_2, 1) \cdots b_1 + b_2 \geq c$$

$$(b_1, b_2, 0) \cdots b_1 + b_2 < c$$

a) Sim. Nesse caso, $b_1 + b_2 \geq g_1 + g_2 = c$. Assim, é uma provisão eficiente para esse jogo.

b) Sim. Existem inúmeros pares (b_1, b_2) tais que o bem não será provido. Estes são, também, equilíbrio para o caso.

3) Suponha que haja dois agentes com diferentes níveis de riqueza, mas com idênticas funções de utilidade, $U_i(G, x_i) = G^\alpha x_i^{1-\alpha}$, em que G é o consumo de um bem público e x_i o consumo de bens privados pelo agente "i". Qual deveria ser a diferença de riqueza entre os dois agentes para que o agente 2 tenha contribuição nula no equilíbrio?

Resolução

$$TMS_1 \leq 1$$

$$g_1 \geq 1$$

$$TSM_2 < 1$$

$$g_2 = 0$$

$$TMS_2 < 1$$

$$Ui(G, X_i) = G^\alpha X_i^{1-\alpha}$$

$$TMS_1 = 1$$

$$\frac{\frac{\partial Ui}{\partial G}}{\frac{\partial Ui}{\partial Xi}} = 1$$

$$\frac{\alpha G^{\alpha-1} x_1 x_1^{-\alpha}}{(1-\alpha) G^{\alpha} x_1^{-\alpha}} = 1$$

$$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{x_1}{G} = 1$$

$$G = \frac{\alpha x_1}{1-\alpha} = \frac{\alpha(w_1 - g_1)}{1-\alpha}$$

$$g_1 + g_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha} w_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} g_1$$

$$g_1 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) g_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} w_1$$

$$g_1 = \alpha w_1$$

Equilíbrio de Nash:

$$g_1^* = \max \left\{ f_1(w_1 + g_2^*) - g_2^*, 0 \right\}$$
$$g_2^* = \max \left\{ f_2(w_2 + g_1^*) - g_1^*, 0 \right\}$$
$$f_2(w_2 + g_1) - g_1 = 0$$
$$f_2(w_2 + g_1) = g_1$$
$$f_2(w_2 + g_1) = \alpha w_1$$

Como g_2^* é igual a zero:

$$0 = \alpha w_2 + \alpha g_1 - g_1$$
$$\alpha w_2 + \alpha g_1 - g_1 = 0$$
$$\alpha w_2 + \alpha g_1 - \alpha w_1 = 0$$
$$\alpha (w_2 - w_1) = -\alpha g_1$$
$$w_1 - w_2 = g_1$$

4) Há três grupos em uma comunidade. Suas respectivas curvas de demanda por televisão estatal em horas de programação por hora, T, correspondem às seguintes equações:

$$W_1 = \$150 - T$$

$$W_2 = \$200 - 2T$$

$$W_3 = \$250 - T$$

Suponha que a televisão estatal seja um bem público puro, que possa ser produzido com um custo marginal constante de $200 por hora.

a) Qual seria o número de horas eficiente de transmissão para a televisão estatal?

b) Qual seria o número de horas transmitidas pela televisão estatal que um mercado competitivo privado produziria?

Resolução

a) BMgS = CMg

w1+w2+w3=200

150 – T + 200 – 2T + 250 – T = 200

600 – 200 = 4T

T = 400 horas

b) 150 – T = 200

T = -50

200 – 2T = 200

T = 0

250 – T = 200, logo, T = 50

16.7. Exercícios propostos

1) (Economia Pública – ISCTE) Considere uma economia constituída por dois grupos de agentes, com diferentes valorizações por um bem público. Cada agente do grupo A tem valorizações dadas por:

P(g) = 10 – 0,4g

Enquanto cada elemento do grupo B tem valorizações iguais a:

$P(g) = 6 - g$

O custo de provisão de g é igual a 92 u.m.

Com base nessas informações:

a) Indique qual a quantidade ótima de g em função do número de elementos de cada grupo.

b) Sabendo que a quantidade ótima determinada em (a) é igual a $g^* = 5$ e que a receita proveniente de aplicar impostos-preço de Lindahl ao grupo A é igual a 400 u.m., indique a dimensão de cada grupo.

2) (Economia Pública – ISCTE) Em uma economia, existem três grupos distintos de indivíduos (A, B e C), com, respectivamente, 55, 25 e 20 pessoas. A quantidade de um bem público g, a ser provido nessa economia, é decidida por voto, através da regra de maioria simples. O custo marginal do bem público é constante e igual a 300 (não há custos fixos) e a tributação existente reparte uniformemente o custo total do bem público por todos os indivíduos.

a) Sabendo que a avaliação de cada indivíduo representativo do respectivo grupo é dada por $P^A = 6 - 0,8\ g$; $P^B = 6\text{-}0,4\ g$; e $P^C = 6 - 0,3\ g$, determine a quantidade de g escolhida coletivamente.

b) Decidida a quantidade indicada em (a), existe ou não margem de negociação entre os grupos (através de pagamento de compensações) no sentido de alterar essa quantidade escolhida? Justifique seu posicionamento.

c) Por motivos relacionados com a eqüidade entre os grupos, foi decidido que os indivíduos representativos dos grupos B e C deveriam obter o mesmo excedente líquido ao consumir esse bem. Admitindo que a quantidade a prover continua a ser decidida por voto, indique uma forma de financiar o custo total do bem público que induza à escolha da quantidade eficiente.

16.8. Referências

MAS-COLLEL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic theory**. New York: Oxford University, 1995. 981 p.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. São Paulo: Makron Books, 1998. 968 p.

VARIAN, H.R. **Microeconomic analysis**. 3.ed. New York: W.W. Norton Company, 1992.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. Rio de Janeiro: Campus, 1997.

Capítulo 17

Assimetria de informação: teoria econômica e abordagens contratuais

Marivane Vestena Rossato[1]
Viviani Silva Lírio[2]

17.1. Introdução

A assimetria de informação é considerada um fenômeno relativamente recente na história econômica. Antes da evolução das tribos primitivas para as supertribos, que originaram as cidades modernas, as pessoas detinham o conhecimento mutuamente e a assimetria de informação era praticamente nula. Atualmente, porém, o homem vive no anonimato, em decorrência da superpopulação: o conhecimento não é recíproco e a assimetria de informação é enorme.

Como conseqüência, nas últimas décadas, esse tema tem tido influência significativa sobre a análise econômica. Sua hipótese central baseia-se na idéia de que o conjunto de informações necessárias numa determinada transação não é disponível de forma homogênea entre os agentes, a não ser mediante algum custo.

Dentro das relações econômicas, conforme observam Pinto Júnior e Pires (2000), a informação é um aspecto fundamental, ainda mais em se considerando um processo concorrencial. No âmbito regulatório, a informação sobre as firmas reguladas é fundamental para as agências reguladoras, no sentido de tomar ações que visem estimular a firma regulada a operar de forma eficiente. Nesse particular, o caso do setor elétrico

[1] Professora do Departamento de Ciências Contábeis da Universidade Federal de Santa Maria. e-mail: marivane@smail.ufsm.br.
[2] Professora do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa. e-mail: vslirio@ufv.br.

brasileiro, tradicionalmente regulado pelo sistema de tarifação e pelo custo de serviço, é citado pelos autores. Todavia, esse esquema nem sempre incentiva a eficiência das firmas.

O esquema de tarifação baseia-se no *price-cap*, que é considerado menos oneroso, uma vez que o regulador não precisa dispor de tantas informações – o reajuste tarifário se daria segundo a evolução dos preços, descontado da expectativa de ganhos de eficiência da empresa, por parte do regulador. Nos contratos está estabelecido que as firmas reguladas devem disponibilizar qualquer tipo de informação que o regulador necessite. Contudo, a assimetria de informação entre regulador e firma regulada não é eliminada, pois, mesmo que o regulador tenha acesso às informações contábeis, estas não refletem, necessariamente, as demais ações da empresa.

Em diversos modelos usados tradicionalmente em economia, considerava-se que as firmas tinham pleno conhecimento sobre seus concorrentes (PINTO JÚNIOR; PIRES, 2000). Contudo, a disponibilidade de informações, como observam os autores, está diretamente ligada à formação de estratégias e a modelos nos quais os agentes se comportam estrategicamente. Portanto, torna-se necessário considerar não apenas o que os agentes sabem, mas o que eles acham que seus concorrentes sabem a seu respeito e com relação às informações que eles detêm. Na tomada de decisões estratégicas das empresas, a informação possui um papel prioritário, pois é a partir da informação que uma firma possua sobre si mesma e sobre suas concorrentes que as estratégias serão tomadas.

Nos sistemas de mercado, a presença de informações assimétricas pode torná-los ineficientes, uma vez que a informação, dentro das relações econômicas e no processo concorrencial, é de caráter fundamental. De acordo com Varian (1999), em um contrato ou em um processo de troca, se uma das partes envolvidas possui mais informações que a outra a respeito do que está sendo negociado, a assimetria de informação ocorre.

Outra abordagem indica que a assimetria de informação se faz presente quando o custo de adquirir informações, sobre a qualidade do que está sendo negociado, for maior para uma das partes envolvidas, ou seja, é mais difícil, para uma das partes, obter essas informações (VARIAN, 1999).

Greenwald e Stiglitz (1998) evidenciam que no modelo walrasiano[3] de equilíbrio geral os preços transmitem, de forma gratuita, para todos os agentes econômicos a totalidade da informação espalhada no mercado e que, no âmbito de um processo centralizado, em que existe uma flexibilidade perfeita e instantânea dos preços, o comportamento racional dos agentes permite alcançar uma situação socialmente eficiente: o ótimo de Pareto. Assim, a informação é assimétrica e se caracteriza como um bem que é fornecido pelo mercado através do sinal dado pelos preços.

A realidade dos mercados revela, porém, que na maior parte dos processos de troca ou de fechamento de contrato um dos agentes possui mais informação que o outro e isso caracteriza a presença de assimetria de informação.

No Primeiro Teorema de Bem-Estar[4] (teoria econômica da troca), a importante hipótese trabalhada é a de que os agentes se comportam competitivamente e, se houvesse apenas dois agentes, como na caixa de Edgeworth[5], é improvável que cada um tomasse os preços como dados. Ao contrário, os agentes provavelmente reconheceriam o seu poder de mercado e tentariam utilizá-lo para melhorar suas próprias proposições (VARIAN, 1999). Como observa Soromenho (1997), o Primeiro Teorema do Bem-Estar, segundo o qual uma alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto[6], não se mantém se estão presentes as imperfeições de informação.

[3] Em 1874, Leon Walras propôs um modelo capaz de determinar simultaneamene todos os preços vigentes dentro de um sistema econômico, que mais tarde ficou conhecido como "Modelo Walrasiano".
[4] Para mais esclarecimentos, consultar Teoria da Troca em Varian (1999).
[5] Ferramenta gráfica que pode ser utilizada para analisar a troca de dois bens entre duas pessoas. Seu desenvolvimento pode ser visto em Varian (1999).
[6] A descrição da alocação eficiente de Pareto é muito bem descrita e exemplificada por Pindyck e Rubinfeld (1999) e Varian (1999).

Herscovici (s.d.), por sua vez, observa que o sistema de preços não tem condições de refletir a totalidade da informação que está disponível no mercado, o que não possibilita uma alocação eficiente dos recursos. As imperfeições do mercado geram incertezas e tornam a informação um bem escasso e, como tal, ela adquire um preço e passa a representar um custo para os agentes econômicos.

Nesse enfoque, a partir dos trabalhos de Herscovici[7], que analisam a maneira como a informação é considerada nas diferentes matrizes teóricas da análise econômica, num primeiro momento busca-se realizar uma análise das escolas no que concerne ao papel da informação na formação e nas modalidades de funcionamento dos mercados. Num segundo momento, são estudadas as implicações da assimetria de informação que levam às distorções e ineficiências de mercado. O texto segue com uma abordagem que trata de questões contratuais na presença da informação assimétrica.

17.2. Informação e análise da teoria econômica

As diferentes concepções existentes em relação à natureza e ao papel da informação permitem definir o corte teórico existente entre as diferentes escolas de pensamento.

A perspectiva do *mainstream*, como observa Herscovici (s.d.), postula a racionalidade dos agentes econômicos e a estabilidade do equilíbrio realizado pelo jogo do mercado: somente imperfeições da informação explicam o afastamento da posição de equilíbrio. Observações preliminares feitas pelo autor revelam que no sistema walrasiano tradicional o preço sinaliza toda a informação que existe no mercado para o conjunto dos agentes econômicos. O comportamento racional dos agentes permite alcançar uma situação socialmente eficiente: o ótimo de Pareto. Como já mencionado, essas pressuposições são pouco realistas, uma vez que as imperfeições do mercado tornam a informação um bem escasso que, como tal, adquire um preço e passa a representar um custo para os agentes econômicos.

[7] Alain Herscovici. Economia da informação: entropia, mercado e natureza da Informação: a "sociedade da informação": uma análise econômica.

A análise clássica da concorrência, como menciona o autor, não é feita em termos de otimização microeconômica, pelo fato de os preços de mercado serem diferentes dos preços de produção e também pelo fato de não haver igualação intra-setorial das taxas de lucro. Esta pode ser explicada a partir da assimetria de informação, que pode ser traduzida em existência de renda.

A análise clássica também busca estudar as modalidades de ajustamento tendencial dos preços de mercado sobre a posição definida pelos preços de produção. Entretanto, para Herscovici (s.d.), esse ajustamento, ou estado de equilíbrio, não será alcançado. Isso se justifica pelo fato de a posição de longo prazo, representada pelos preços de produção, ser dependente das flutuações de curto prazo dos preços de mercado. Em outras palavras, os preços são definidos sobre uma base de informação incompleta e desigualmente distribuída entre os agentes, o que não possibilita assegurar o processo de *market-clearing*.

Torna-se possível, então, um universo econômico com presença de incerteza e sem possibilidades de implementar um processo de otimização microeconômico. De maneira contrária, na teoria das expectativas racionais, o preço não resume a totalidade da informação disponível no mercado e – muito importante – essa informação adquirirá um custo.

Os novos clássicos e a escola das expectativas racionais mencionada estudam situações em que a informação é imperfeita a partir dos instrumentos metodológicos neoclássicos (racionalidade microeconômica, *market-clearing* e estabilidade do equilíbrio).

Representativo do processo de informação imperfeita, o monetarismo de Milton Friedman, bem como a crítica que ele faz à curva de Phillipps, se baseia no fato de os assalariados terem uma informação imperfeita e não perceberem a queda de seus salários reais. Herscovici (s.d.) cita a função de oferta de Lucas, em que os agentes econômicos confundem o aumento geral de preços com o aumento dos preços dos serviços e produtos que eles produzem.

A escola pós-keynesiana analisa que as expectativas de longo prazo formuladas pelos empresários são concebidas num ambiente de incerteza.

A análise concentra-se no sistema de preços, que não permite assegurar a coordenação de decisões individuais descentralizadas (HERSCOVICI, s.d.):

1) Os gastos realizados pelos capitalistas "hoje" dependem de suas expectativas no que diz respeito à demanda "amanhã".
2) Existe incerteza em relação aos preços futuros que permitiriam a igualdade entre oferta e demanda.
3) À medida que os mercados são interdependentes, o desequilíbrio no mercado futuro se traduz por um desequilíbrio nos outros mercados.

Assim, em uma economia monetária, a informação veiculada pelos preços é, por natureza, limitada e o sistema de mercado produz instabilidade.

Tanto a análise clássica quanto a pós-keynesiana constituem alternativas coerentes quando se considera o *mainstream* ou o papel regulador do mercado. Elas fornecem uma explicação para o funcionamento do sistema, que pode ser caracterizado em função da existência de incerteza e da ausência de sinal no que diz respeito aos mercados futuros; ou seja, os mercados funcionam de forma desequilibrada e os agentes econômicos não atuam mais de forma racional. Outra característica resume-se à presença do processo concorrencial, em razão de a informação ser, por natureza, incompleta e distribuída de forma desigual entre os agentes econômicos.

As análises econômicas ligadas ao *mainstream* defendem que, quando as imperfeições das informações existem, os agentes econômicos não obtêm a totalidade da informação existente no mercado via preços, ou seja, em relação ao modelo walrasiano, representa uma situação de imperfeição de mercado. Conforme observa Herscovici (s.d.), essa análise caracteriza-se pelas informações, adquirindo um custo, e pelos agentes econômicos, igualando o custo marginal da informação à receita marginal resultante da aquisição desta informação. Mesmo em situações de informação incompleta, os agentes econômicos têm igual acesso às informações disponíveis, ou seja, não existe assimetria de informação; a informação só representa "informação" a partir de um determinado

contexto, isto é, não existe informação sem metainformação.

Depois do Nobel de Economia para a Teoria dos Jogos em 1994, o interesse da comunidade acadêmica pela Microeconomia tem aumentado cada vez mais, como foi o Nobel de 2001 para a Informação Assimétrica. O prêmio foi dividido entre os economistas norte-americanos George Akerlof, A. Michael Spence e Joseph Stiglitz, pelas suas contribuições à moderna economia da informação. O economista Joseph Stiglitz lidera a chamada "nova economia da informação" (ou arcabouço teórico), que não apresenta, por razões informacionais, mercados de capitais e de seguros perfeitos, como também mercados futuros completos. No caso dos mercados futuros, é a existência de falhas informacionais, relativas à qualidade dos produtos, e sua distribuição que inibem seu desenvolvimento e uso.

Nos mercados de capitais, a presença de assimetria de informação é vista por Stiglitz como uma das responsáveis pelas flutuações tanto nas decisões de investimento das firmas como na oferta de fundos para financiá-los. A assimetria de informação, assim, torna difícil a diversificação e transferência dos riscos na economia, influi na forma e na magnitude de captação de recursos das empresas e implicam que os mercados falhem em ajustar-se ótima e automaticamente às situações de desequilíbrio entre oferta e demanda. Pode-se concluir dessas ocorrências que o mercado e o sistema de preços, em particular, não são, na maioria das vezes, o mais eficiente coordenador das decisões econômicas de alocação de recursos escassos.

O ponto de partida para compreender o modelo heurístico de Stiglitz está em entender que a causa para as falhas nos mercados de capitais é a assimetria de informação e os conseqüentes problemas de *seleção adversa* e risco moral, não só para o mercado de capitais, como também para os mercados de produtos e do trabalho (CANUTO; FERREIRA JÚNIOR, 1999).

Uma situação de seleção adversa aparece quando, *ex-ante*, uma das partes detém mais informações que a outra: existe uma renda informacional que permite se apropriar de uma renda extra e não permite

alcançar um estado ótimo da economia (HERSCOVICI, 1998). O sistema de preços não permite igualar, sistematicamente, oferta e demanda, e a utilidade social da informação é diferente de sua utilidade privada. Já o risco moral aparece quando, *ex-post*, o comportamento do indivíduo contratado não pode ser totalmente observado. Essas análises se aplicam aos mercados financeiros, de serviços e do trabalho e serão estudadas adiante.

Em uma concepção heterodoxa, um mercado não pode ser analisado independentemente das instituições sociais que o sustentam, e não é mais considerado como uma instância universal. Ele não pode assegurar suas condições de reprodução sem a existência de certas instituições com papel regulador. As formas institucionais permitem, no âmbito de um modo de regulação, conter os desequilíbrios, realizar os ajustamentos macroeconômicos e assegurar a compatibilidade dinâmica de um conjunto de decisões descentralizadas.

Herscovici (s.d.) considera, nessa abordagem, o fordismo e o pós-fordismo como dois modos de regulação distintos. O fordismo é caracterizado pela gestão "administrada" da economia pelos oligopólios privados e públicos, bem como pela intervenção do Estado na economia e na gestão da relação salarial. O sistema baseia-se na inclusão da maior parte dos grupos sociais, a partir da distribuição de parte dos ganhos de produtividade para os trabalhadores. Esse modelo culmina na crise do Welfare-State e dá abertura ao aparecimento do "pós-fordismo", que está ainda em gestação. Suas principais características resumem-se na privatização crescente das diferentes atividades, no âmbito de estratégias de globalização, na diminuição e redirecionamento da intervenção do Estado e na segmentação dos diferentes mercados.

As novas tecnologias da informação, que correspondem às novas modalidades históricas de acumulação, permitem intensificar os diferentes processos de globalização e, conseqüentemente, ampliar o mercado (HERSCOVICI, 1998). Elas podem ser consideradas como um meio utilizado para minimizar os custos de transação crescentes: os sistemas informacionais correspondentes podem ser internalizados (as redes intranet)

ou externalizados pelas firmas.

Nessa abordagem heterodoxa, a informação constitui um mecanismo estabilizador que permite diminuir a incerteza, uma vez que o mercado não é mais concebido como uma instância auto-reguladora. Como observa Herscovici (s.d.), uma redução da incerteza implica um custo crescente da informação.

17.3. Problemas decorrentes da informação assimétrica

A introdução da informação assimétrica na teoria econômica tem acarretado introspecções no sentido de como as falhas de mercado podem ser enfrentadas por mecanismos externos ao mercado. A existência de informação assimétrica tem resultado em conseqüências como a presença de comportamentos oportunistas entre os agentes econômicos por parte daqueles que possuem mais informações.

Para Herscovici (s.d.), quanto maior a assimetria de informação entre os agentes, mais será custoso o processo de acesso às informações relevantes e, conseqüentemente, maiores serão as distorções no mercado.

Corroborando as afirmações desse autor, Pindyck e Rubinfeld (1999) salientam que a assimetria de informação é uma característica comum em diversas situações econômicas. Os mercados de seguro, crédito financeiro e até mesmo de emprego também possuem tal característica. Os problemas resultantes dessa assimetria, apesar de aparentemente distintos em diferentes situações econômicas, se dividem em duas categorias: seleção adversa e risco moral, estudadas a seguir.

17.3.1. Seleção adversa

A *seleção adversa* pode ser definida como as situações em que o tipo dos agentes não é observável. Em outras palavras, um lado do mercado trabalha no sentido de descobrir a qualidade do produto, baseado no comportamento do outro lado do mercado. Esse problema, como afirmam Pinto Júnior e Pires (2000), consiste no fato de que a seleção do produto a ser demandado ocorre de forma ineficiente, portanto, adversa, em função da assimetria de informação entre os ofertantes e

demandantes do mesmo.

Varian (1999) define seleção adversa como a situação em que, *ex-ante*, um lado do mercado não pode observar o tipo ou qualidade dos bens ou serviços no outro lado do mercado, ou seja, uma das partes detém mais informações que a outra. Devido a esse motivo, o problema é algumas vezes chamado de *informação oculta*.

Do ponto de vista contratual, a *seleção adversa* pode ser encarada como oriunda de comportamentos oportunistas derivados de assimetria de informação em nível pré-contratual (PINTO JÚNIOR; PIRES, 2000). Uma das partes depende de informações relativas à natureza da outra e que nem sempre são fornecidas, ou seja, são omitidas no momento em que se define o contrato. Esse problema caracteriza um caso de *seleção adversa*.

O termo *seleção adversa* foi utilizado pela primeira vez na indústria de seguros – caso clássico ilustrado na literatura. A indústria de seguros não pode se basear na taxa média de incidência de sinistros para estabelecer seus preços. Conforme Pinto Júnior e Pires (2000), caso isso ocorresse, apenas os consumidores mais propensos a acionar o seguro iriam contratá-lo, e a seguradora realizaria uma seleção adversa dos consumidores e estaria propensa a falir.

Varian (1999) ilustra esse problema com o caso de uma companhia de seguros que quer oferecer seguro contra roubo de bicicleta. É feita uma pesquisa de mercado, em que se descobre que o roubo varia amplamente entre as comunidades. Em determinadas áreas, a probabilidade de que uma bicicleta seja roubada é grande e, em outras, os roubos são muito raros de ocorrer. Supondo que a Companhia de Seguros decida oferecer o seguro a uma taxa média de ocorrência de roubos, o que certamente ocorreria seria a quebra da companhia, pois quem compraria o seguro seriam as pessoas das comunidades com alta incidência de roubos. A Companhia, de Seguros não obteria, assim, uma seleção não-visada dos clientes; pelo contrário, obteria uma seleção adversa.

Nesse mercado, a ineficiência é evidenciada quando se observa

que, na ausência da seleção adversa, a taxa cobrada pelo seguro refletiria o risco médio de toda a comunidade: a comunidade de alto risco estaria melhor por pagar uma taxa menor do que o risco real com que se defronta, e a comunidade de baixo risco poderia participar desse mercado pagando uma taxa menor do que seria na presença da seleção adversa.

Nesse caso, o mecanismo que poderia eliminar a ineficiência seria um *plano de compra compulsório*. Este permitiria que a taxa cobrada pela seguradora refletisse o risco médio de toda a comunidade e obrigaria as comunidades de todas as classes de risco a comprar o seguro.

O plano de compra compulsório, como evidencia Varian (1999), pode tornar-se mais efetivo quando feito por iniciativa privada, pois pode ser feito também por iniciativa governamental. As decisões tomadas por decreto governamental podem não ser tão eficazes em termos de custo quanto às tomadas pelas empresas privadas. O caso dos planos de saúde ofertados aos empregados como parte do pacote de benefícios é considerado um exemplo adequado, e é descrito pelo autor. No caso citado, uma seguradora pode basear suas taxas nas médias do conjunto de empregados e é assegurado que todos eles têm que participar do programa, o que elimina a seleção adversa.

Outro exemplo que pode ser citado é o mercado de motos usadas. Esse exemplo permite verificar a inter-relação entre qualidade do produto, incerteza e assimetria de informação. Observe o exemplo, adaptado de Varian[8] (1999). Trata-se de um modelo de mercado em que os demandantes e os ofertantes detêm informações diferentes sobre as qualidades dos bens que estão sendo vendidos. Participam do mercado 50 pessoas que estão querendo vender suas motos e 50 pessoas que querem comprar uma moto usada. Tanto os ofertantes como os demandantes sabem que metade das motos é de boa qualidade e a outra metade de qualidade ruim. Todavia, especificamente qual moto é de boa qualidade e qual é de qualidade ruim, somente os proprietários das motos sabem. O proprietário de uma moto boa está disposto a vendê-la por R$ 3.000,00 e o proprietário de uma

[8] Variantes desse exemplo podem ser encontradas em Pindyck e Rubinfeld (1999) e Varian (1999).

moto ruim, por R$ 1.500,00. A disposição a pagar dos compradores é de R$ 3.600,00 por uma moto boa e de R$ 1.800,00 por uma ruim.

Como não é fácil observar a qualidade das motocicletas, haverá problemas nesse mercado. O que acontecerá é que as motos boas serão vendidas por um preço entre R$ 3.000,00 e R$ 3.600,00 e as ruins, por um preço entre R$ 1.500,00 e R$ 1.800,00. Os compradores terão que adivinhar quanto a moto vale. Não tendo certeza sobre a qualidade da moto, ele pagará o valor médio pela aquisição de uma moto qualquer. Trabalhando-se com a hipótese de que as probabilidades de aquisição de uma moto boa ou ruim são as mesmas, a disposição a pagar do comprador será:

$$\frac{1}{2}(1800{,}00) + \frac{1}{2}(3600{,}00) = 2700{,}00 \qquad (17.1)$$

A esse preço, os proprietários de motos ruins estariam dispostos a vender suas motos, mas os de motos de boa qualidade não – o preço que os compradores se dispõem a pagar por uma moto "média" é menor que o preço que os vendedores de boas motos estão querendo. Ao preço de R$ 2.700,00, apenas as motos de qualidade ruim seriam postas à venda.

No entanto, se o comprador tivesse certeza de que compraria uma moto ruim, então ele não estaria disposto a pagar R$ 2.700,00 pela moto, e sim algo entre R$ 1.500,00 e R$ 1.800,00. Entre esses limites de preço, apenas os vendedores de motos ruins ofereceriam suas motos, e os compradores esperariam, corretamente, obter uma moto ruim.

Embora o preço que os compradores estão dispostos a pagar pelas motos boas exceda o preço pelo qual os vendedores estão dispostos a vendê-las, não ocorreria nenhum mercado para a moto boa.

De acordo com Varian (1999), existe uma externalidade[9] entre os vendedores de motos boas e motos ruins.

Quando os agentes decidem tentar vender um produto ou serviço

[9] Externalidades são resultados de ações de agentes econômicos, as quais se refletem positiva ou negativamente no bem-estar social. Mais detalhes sobre essa teoria econômica são encontrados em Pindyck e Rubinfeld (1999).

cuja qualidade é ruim, eles afetam as percepções dos demandantes sobre a qualidade média do objeto transacionado no mercado. Isso reduz o preço que os demandantes estão dispostos a pagar pelo produto ou serviço, o que prejudica os agentes que pretendem ofertar com qualidade. Esta é a externalidade que cria a falha de mercado – os produtos e serviços de boa qualidade não serão ofertados ou estarão em quantidade mínima no mercado, enquanto os produtos ou serviços de baixa qualidade serão ofertados em maior quantidade a preços superiores ao nível eficiente.

Assim, no caso do exemplo das motos boas e ruins (VARIAN, 1999), a falta de informação consistente para os compradores sobre a qualidade das motos estimula a saída das motos de qualidade superior do mercado. Para que isso não aconteça, é preciso que os proprietários das motos de boa qualidade criem mecanismos de informação capazes de indicar (sinalizar) aos compradores quais são, de fato, os produtos de qualidade superior. Tais mecanismos, quando bem estruturados, reduzem de forma significativa, a assimetria de informação

A sinalização (*signaling*) diz respeito à emissão de sinais e ao fornecimento de informações por parte do agente que a detém (WILLIAMSON, 1985). A sinalização se constitui num mecanismo que ajuda a fazer com que o mercado funcione melhor, uma vez que o agente que está recebendo a informação deve confiar na sinalização do outro agente.

Ao oferecer o sinal (garantia), reportando-se ao exemplo do mercado de motos usadas, os vendedores de boas motos podem se distinguir dos vendedores de motos ruins. Os consumidores podem, então, tomar a garantia como um correto sinal de qualidade e, assim, estarão dispostos a pagar mais pelas motos boas.

Os certificados de garantia, em geral, sinalizam de forma eficaz a qualidade do produto, visto que os ofertantes de produtos de baixa qualidade não podem oferecer esses sinais. Ao sinalizarem a qualidade dos bens e serviços, os certificados caminham na direção da melhoria dessa qualidade e do fluxo de informações e, conseqüentemente, reduzem a *seleção adversa*. Contudo, esse processo é oneroso.

17.3.2. Risco moral

Diferentemente da seleção adversa, em que o problema se encontra no diferencial de risco entre os diferentes agentes econômicos, o caso do risco moral se baseia nas ações dos agentes, que podem acabar influenciando esse risco. Portanto, o que está em questão nesse caso é a moral dos consumidores, que podem apresentar certos comportamentos de forma a aumentar ou diminuir a probabilidade de ocorrência do aspecto em questão (PINTO JÚNIOR; PIRES, 2000).

Herscovici (s.d.) afirma que o risco moral se refere a situações em que um lado do mercado não pode observar as ações tomadas pela outra parte. É um problema típico em relações contratuais nas quais, conforme Pinto Júnior e Pires (2000), o risco moral é fruto de comportamentos oportunistas posteriores ao fechamento do contrato, podendo decorrer também de um comportamento imprevisto ao longo da execução do contrato. Então, a informação assimétrica não é relativa às características, *ex-ante*, desconhecidas dos agentes, mas a um comportamento oportunista, *ex-post*, escondido e não conhecido pela outra parte do contrato quando da sua elaboração.

Esse problema, decorrente da informação assimétrica, surge também na indústria de seguros – exemplo que pode auxiliar na compreensão do problema. Nesse caso, diferentes consumidores que contratam o seguro irão apresentar comportamentos distintos quanto ao cuidado com o bem assegurado. Esse fato irá influenciar a probabilidade ou a magnitude do evento ou, no caso, sinistro, que é o fato gerador do contrato, o que cria a ineficiência econômica.

Ao se estabelecer a taxa a ser cobrada, a empresa seguradora deve levar em consideração o incentivo dos consumidores em cuidar dos bens que estão sendo segurados.

Como observam Pinto Júnior e Pires (2000), as seguradoras procuram discriminar seus usuários segundo suas ações e a influência que elas têm sobre a possibilidade de danos. Contudo, o conhecimento dessas ações é oneroso: o custo de adquirir tal conhecimento pode superar o benefício dessa aquisição, gerando ineficiência com o desperdício de

recursos. Outro sinal de ineficiência causado pela existência de risco moral é o fato de que haverá contribuição adicional para a ocorrência de seleção adversa, uma vez que a taxa cobrada pelo seguro será maior. Esse se constitui no incentivo para as seguradoras não oferecerem seguro "completo" aos consumidores, que acabarão por ter que assumir parte do risco, não assumido pela seguradora. Por essa razão, a maior parte das apólices de seguro, conforme Varian (1999), inclui uma franquia – uma quantia que a parte segurada tem que pagar de qualquer forma. Sua existência incentiva os consumidores a serem cautelosos com os bens segurados, pois, em caso de ocorrência de sinistro, o consumidor tem que arcar com parte do custo.

Ao fazer com que os consumidores paguem parte do custo, as seguradoras criam um mecanismo de incentivo para assegurar que eles não mudem de comportamento após o fechamento do contrato (VARIAN, 1999).

Os contratos de incentivo podem ser definidos como mecanismos contratuais que buscam incentivar os comportamentos positivos, ou seja, buscam realizar a convergência entre os comportamentos para eliminar o risco moral.

No exemplo descrito, o mecanismo de incentivo diminui o risco moral, por um lado, e resulta num equilíbrio de mercado paradoxal, pelo outro, ou seja, a companhia de seguros estaria disposta a segurar o consumidor completamente e cada consumidor desejaria comprar um seguro completo, se não fosse a necessidade da adoção do mecanismo de incentivo (VARIAN, 1999). Em outras palavras, não haverá igualdade entre oferta e demanda no sentido de que a propensão marginal a pagar se iguale à propensão marginal a vender.

De acordo com Varian (1999), no caso de risco moral, um equilíbrio de mercado possui a propriedade de que cada consumidor desejaria comprar mais seguro, e as companhias estariam mais dispostas a vender mais seguro se os consumidores continuassem a tomar a mesma intensidade de cuidado. Entretanto, esse negócio não ocorrerá porque, se os consumidores fossem capazes de adquirir mais seguro, eles racionalmente escolheriam tomar menos cuidado.

17.4. Abordagens contratuais

A teoria econômica tem se deparado com situações de difícil resposta, e, como conseqüência, novas abordagens teóricas vêm ganhando espaço na literatura econômica, principalmente a que trata de questões contratuais (PINTO JÚNIOR; PIRES, 2000). Essas abordagens introduzem questões como a incompletude contratual em função da incerteza e a imprevisibilidade de contingências futuras, comportamento oportunista dos agentes, entre outras.

Uma abordagem importante, segundo Pinto Júnior e Pires (2000), é a do *agente-principal*, que corresponde a uma vertente da teoria dos contratos e, portanto, merece ser destacada. Essa vertente se interessa pelo relacionamento entre dois atores econômicos: o agente e o principal. O agente representa a pessoa que atua e que dispõe de um conjunto de comportamentos e informações. Suas ações afetam o bem-estar entre as partes e dificilmente são observadas pelo principal, que se constitui na parte afetada pela ação do agente.

A relação e o cumprimento dos dispositivos contratuais se enquadram num contexto de informação assimétrica: o principal dispõe de informações que não são perfeitas sobre o agente.

A informação assimétrica dificulta o monitoramento do esforço dos agentes econômicos envolvidos em uma relação. A análise consiste, conforme salienta Varian (1999), em como um ator econômico (principal) estabelece um sistema de compensação (contrato) que motive o outro ator (agente) a agir de acordo com o interesse do primeiro.

Na prática, a assimetria de informação reduz a possibilidade de elaboração de contratos completos. Para as firmas energéticas, por exemplo, esse aspecto é ainda mais grave, uma vez que a incerteza quanto à evolução das condições de base da indústria torna-se um obstáculo ao engajamento de contratos de longo prazo. Essas indústrias atravessam sérias dificuldades por passarem por períodos de reforma estrutural e setorial (PINTO JÚNIOR; PIRES, 2000).

17.5. O mercado de capitais e a assimetria de informação

As empresas, em geral, obtêm recursos via mercado acionário ou via mercado de crédito, visto que o período de maturação e retorno dos empreendimentos produtivos é relativamente longo, o que impossibilita que os investimentos sejam feitos com recursos próprios.

Independentemente da forma como forem realizados os investimentos, existirá, segundo Braga (2000), a possibilidade de ocorrência de problema do tipo agente-principal, ou seja, possíveis ações oportunistas, tomadas por quem conduz os negócios da empresa.

17.5.1. Mercado de ações

No mundo empresarial, os administradores possuem informações que são privilegiadas sobre as condições financeiras da empresa administrada. Devido às possibilidades de mascaramento dos resultados contábeis das empresas, os investidores nem sempre encontrarão sinais que permitam distinguir a empresa de baixo risco da de alto risco. Assim, o mercado de emissão primária de ações pode não estar sinalizando boas oportunidades de investimentos e, portanto, a interpretação para uma nova emissão de ações será negativa, o que provocará queda de seus valores de mercado e estimulará a seleção adversa (GREENWALD et al., 1988).

Segundo Canuto e Ferreira Júnior (1999), o levantamento de capitais nos mercados de ações também envolve problemas de incentivos e monitoramento (*ex-post)*. Os problemas de incentivo ocorrem devido ao fato de os administradores das empresas, por dividirem seus esforços com os acionistas via dividendos, sentirem-se mais estimulados a desviarem-se dos interesses da empresa.

Os administradores poderiam buscar atingir objetivos próprios, como o aumento das vendas em detrimento do aumento dos lucros, à medida que o crescimento das vendas resulta em maior fluxo de caixa e, portanto, mais compensação aos administradores (PINDYCK; RUBINFELD, 1999).

Na visão de Stiglitz (1993), existe também um *trade-off* positivo entre incentivos e riscos: menores riscos implicam menores incentivos para os administradores. Existe, ademais, um problema *free-rider* associado

ao fato de que os acionistas que buscam monitorar os administradores beneficiam todos os outros com o melhor desempenho das empresas.

Os problemas de seleção adversa e risco moral podem explicar por que o mercado acionário tem tido papel limitado no processo de mobilização de capital para investimentos produtivos. Como conseqüência, impõem a opção de crédito para níveis acima das preferências das empresas. Ademais, os problemas mencionados impedem ou diminuem a neutralização dos riscos via diversificação dos portfólios dos indivíduos, como se supõe nas teorias de mercados de capitais.

17.5.2. Mercado de crédito

A possibilidade de se estudar o mercado de crédito a partir de modelos com assimetria de informação tem estimulado uma série de estudos que, apesar de não se constituírem num corpo homogêneo de idéias, definem pelo menos uma linha de pesquisa, cujos resultados têm sido extremamente importantes para o entendimento do processo de alocação de recursos ao longo da economia ou mesmo sobre aspectos ligados à regulação do mercado de crédito.

Nesse mercado, os bancos participam como empresas que exercem o papel de intermediação entre tomadores e fornecedores de recursos financeiros. Como compromissos de restituição de empréstimos podem não ser honrados, os bancos devem selecionar e monitorar seus clientes. Essa tarefa é dificultada em função da assimetria de informação existente entre empresas e bancos (STIGLITZ, 1993). Desse modo, assim como no mercado de ações, há também nos mercados de crédito problemas de seleção adversa e risco moral.

No processo de intermediação, o emprestador (que poupa e posterga seu consumo) troca dinheiro hoje por uma promessa de recebê-lo de volta em data futura. Os bancos, ao emprestarem esse dinheiro, cobram um preço pelo serviço na forma de taxa de juros e passam a considerar a probabilidade de inadimplência do tomador de empréstimo (STIGLITZ, 1988).

Como observam Ross et al. (1998), sob essa perspectiva, assume-se que a taxa de juros nominal cobrada pelo emprestador (Re) nada mais

é que a taxa de juros real (r) mais uma previsão de inflação esperada para o período (i) e um prêmio pelo risco (s) ou *spread*. Esse prêmio depende das características intrínsecas do tomador de crédito, ou seja, trata do aumento da taxa de juros devido à possibilidade de inadimplência.

Para os tomadores de crédito, tem-se, então, a seguinte relação, que mostra o custo total de aquisição de recursos transferidos pelos bancos:

$$\text{Re} = r + i + s \qquad (17.2)$$

Assumindo que os bancos conhecem o verdadeiro risco de crédito, podem calcular o prêmio ao risco sem problemas, pois a taxa de juros assume o papel de equilibrar a oferta e a demanda de recursos, garantindo, sob hipóteses neoclássicas, sua alocação ótima. Contudo, na presença de assimetria de informação, o mercado de crédito não elimina totalmente problemas do tipo agente-principal, não garantindo, dessa maneira, o equilíbrio ótimo de mercado.

Se a taxa de juros que equilibra a oferta à demanda por empréstimos no mercado for maior que a taxa de juros que maximiza o retorno esperado dos bancos, o equilíbrio de mercado é caracterizado por racionamento de crédito. Nesse caso, para Stiglitz (1988), para obter-se racionamento de crédito, é necessário exclusivamente que o retorno esperado recebido pelos emprestadores não aumente monotonicamente com as taxas de juros cobradas.

O racionamento de crédito, como observa Braga (1998), deve ser entendido como uma situação em que parte da demanda por empréstimos não é atendida, mesmo quando, nesse conjunto, existem tomadores capazes e dispostos a arcar com os juros requeridos. Decorre do fato de o retorno esperado não ser uma função monotônica da taxa de juros, conforme pode ser visualizado na Figura 17.1.

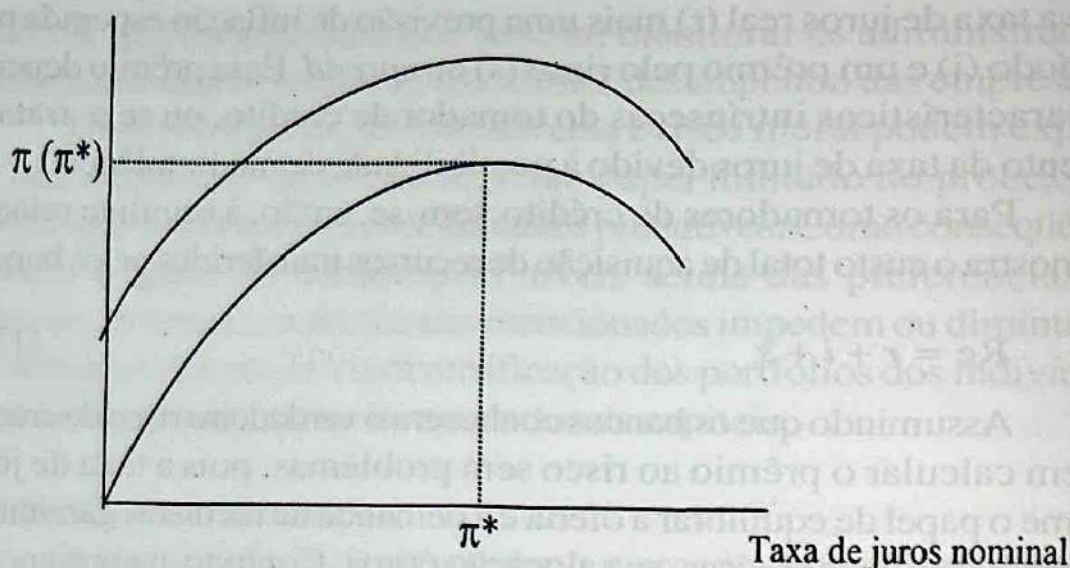



Figura 17.1 - Retorno esperado pelo banco como função da taxa de juros nominal

Fonte: Braga (1998).

Como pode ser observado, quanto maior a taxa de juros, maior será o retorno esperado pelo banco, até que a taxa de juros r^* seja alcançada. Para taxas de juros maiores, o retorno esperado cai (BRAGA, 1998).

Esse autor explica os motivos que levam o lucro esperado pelo banco a se comportar como na Figura 17.1 através de um modelo, formalizado por Takayama (1995), com algumas adaptações. Nessa proposta analítica, são consideradas duas firmas com diferentes probabilidades de sucesso, que desejam o mesmo montante (X) de recursos para financiar determinado projeto de investimento, e nenhuma delas possui garantias reais oferecidas pelo tomador do crédito. A firma 1, quando bem sucedida em seu empreendimento, gera uma receita igual a Y_1, enquanto a firma 2 gera uma receita igual a Y_2 na mesma situação. Quando mal sucedida, as firmas recebem uma receita nula. É considerada q_i a probabilidade de o empreendimento i não ser bem sucedido e suposto que $q_1 < q_2$, significando que a firma 2 é de maior risco em relação à firma 1. Então, pode-se considerar o lucro esperado dos projetos das duas

firmas como:

$$\pi_{f1}(r) = q_1.0 + (1 - q_1).[Y_1 - (1 + r).X]$$
$$\pi_{f2}(r) = q_2.0 + (1 - q_2).[Y_2 - (1 + r).X] \quad (17.3)$$

Considerando que $(1 - q_1).Y_1 < (1 - q_2).Y_2$ (retorno esperado em caso de sucesso é maior para a firma 2), o que significa que $E(Y_2) > E(Y_1)$, mas var $(Y_2) >$ var (Y_1). Esta hipótese está implícita no modelo Stiglitz e Weiss (1981). Pode-se, então, demonstrar que $\pi_{f1}(r) < \pi_{f2}(r)$ para cada r:

$$(1 - q_1).[Y_1 - (1 + r).X] < (1 - q_2).[Y_2 - (1 + r).X]; \text{ ou}$$
$$(1 - q_1). Y_1 - (1 - q_1) . (1 + r) . X < (1 - q_2). Y_2 - (1 - q_2) . (1 + r) . X \quad (17.4)$$

Como $(1 - q_1). Y_1 < (1 - q_2). Y_2$, $q_1 < q_2$ e desde que $Y_i > (1 + r) . X$, $i = 1,2$, tem-se como válida a desigualdade proposta. Considera-se r* e r** tal que:

$$\pi_{f1}(r^*) = 0; \qquad \text{e } \pi_{f2}(r^{**}) = 0$$

Pode-se provar que $r^* < r^{**}$[10]. Se o banco escolhe $r \leq r^*$, os dois projetos concorrerão pelo empréstimo. Entretanto, se $r^* < r < r^{**}$, somente a firma 2 aceitará o empréstimo, exatamente a de maior risco.

Trabalha-se, também, com a pressuposição de que o banco conhece, por experiência, que, do total de firmas existentes no mercado, a proporção de α é de firmas do tipo 1 e a proporção de $1-\alpha$ são de firmas do tipo 2. Considera-se que o banco financia um total de n projetos e que seu lucro esperado será:

$$\pi_b(r) = \alpha.n.\ \pi_{b1}(r) + (1 - \alpha).n.\ \pi_{b2}(r) - n.X \quad (17.5)$$

[10] Considerando r* e r** tal que $\pi_{f1}(r^*) = 0$ e $\pi_{f2}(r^{**}) = 0$, supondo que $\pi_{f1}(r) < \pi_{f2}(r)$ e desde que $d\pi_{fi}(r)/dr < 0$, $i = 1,2$, segue que $r^* < r^{**}$.

em que:

$\pi_{b1}(r) = (1 - q_1) . (1 + r) . X;$

e

$\pi_{b2}(r) = (1 - q_2) . (1 + r) . X$

representam a receita esperada pelo banco no caso de a firma 1 ou 2 ser escolhida, respectivamente, sendo $\pi_{b1}(r) > \pi_{b2}(r)$. Como a taxa de juros se eleva, o banco estará disposto a financiar mais projetos, pois $\pi_b(r)$ aumenta também. Entretanto, se r aumenta além de determinado nível (r*), somente as firmas 2 estarão dispostas a permanecer no mercado de crédito.

Nessa situação, de acordo com Braga (1998), é possível para o banco elevar seu lucro esperado reduzindo a taxa de juros e, conseqüentemente, atraindo firmas de baixo risco. Em outras palavras, existe uma taxa de juros máxima que maximiza o lucro esperado do banco e que pode estar abaixo da taxa de equilíbrio de mercado.

No modelo desenvolvido, caso o tomador de empréstimos torne-se inadimplente, não sofre qualquer tipo de penalidade. É introduzida, então, essa consideração, ou seja, uma perda W, que pode representar, por exemplo, a impossibilidade de acesso a novos empréstimos para financiar empreendimentos futuros. A perda (W) pode ser considerada como o valor descontado do retorno desses empreendimentos, caso levados adiante no futuro. Assim, o lucro esperado dos projetos das duas firmas será:

$$\pi_{f1}(r) = - q_1.W + (1 - q_1).[Y_1 - (1 + r).X]$$
$$\pi_{f2}(r) = - q_2W + (1 - q_2).[Y_2 - (1 + r).X] \quad (17.6)$$

Com a introdução da possibilidade de penalidades no modelo, pode-se provar que o problema de seleção adversa só ocorrerá se estas (valor de W) não forem muito altas[11], ou seja, existe determinado valor

[11] Considerando W = 0, pode-se verificar que $\pi_{f1}(r) < \pi_{f2}(r)$ para cada r.

para W a partir do qual a desigualdade $\pi_{r1}(r) < \pi_{r2}(r)$ para cada r não mais se verifica.

$$(1 - q_2) \cdot Y_2 - (1 - q_1). Y_1 > (1 - q_2). (1 + r). X - (1 - q_1). (1 + r). X.$$

Se agora se considerar $W > 0$, a desigualdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$(1 - q_2) \cdot Y_2 - (1 - q_1). Y1 > (1 - q_2). (1 + r). X - (1 - q_1). (1 + r). X + W. (q_2 - q_1).$$

Assim, torna-se fácil demonstrar que existe determinado valor para W a partir do qual a desigualdade referida não mais se verifica.

Braga (1998) destaca que o modelo considera a existência de informação assimétrica *ex-ante*, quando o tomador de empréstimos tem melhor informação acerca do risco do empreendimento a ser financiado, comparado com as informações disponíveis ao ofertante do crédito. No entanto, a ocorrência de situações nas quais a assimetria de informação se manifesta *ex-post* é bastante plausível, seja em decorrência de ações tomadas pelo devedor e que não são observadas pelo credor, ou como resultado de ações da natureza, que também são somente observadas pelo devedor, o que afeta o retorno esperado.

Voltando à fórmula que retrata um mercado de crédito perfeito, Hoff e Stiglitz (1993) salientam que o mercado pode trabalhar com informação perfeita para as duas partes envolvidas (tomador e emprestador) e, ainda assim, ter que embutir parcela referente ao risco (s). Ao serem adicionados os custos de informação no mercado de crédito, a relação de agente-principal caracteriza-se pela possibilidade de oportunismo do agente (tomador de crédito), que possui informações que o principal (emprestador) não possui.

De acordo com Stiglitz e Weiss (1981), *ex-ante*, os bancos não podem diferenciar com exatidão os projetos de alto risco dos de baixo risco, por meio da estimativa do risco médio esperado, e acabam por aumentar as taxas de juros. Essa medida afeta de maneira adversa o conjunto de candidatos, afastando os projetos de melhor qualidade e menor risco.

A elevação das taxas de juros pelos bancos incentiva as empresas tomadoras de crédito a empreenderem projetos de maiores riscos (risco moral) no intuito de saldarem e, ou, abaterem suas dívidas, que se tornaram maiores (STIGLITZ; WEISS, 1981). De acordo com os autores, o risco moral é agravado dada a não-especificidade do dinheiro, pois, uma vez consumado o empréstimo, o tomador pode utilizar os recursos de acordo com suas preferências.

Com o aumento na probabilidade de os compromissos não serem honrados, o emprestador tem de gastar recursos para levantar informações sobre o perfil do potencial tomador de crédito, bem como sobre as ações desse tomador que colocam em risco sua capacidade de saldar a dívida.

Na visão de Hoff e Stiglitz (1993), esses mecanismos apresentam suas limitações, uma vez que, se por um lado reduzem a assimetria de informação existente, por outro, não garantem informações plenamente simétricas. Ainda, não diminuem a taxa de juros cobrada, pois os custos de informação são repassados aos de capital na forma de juros mais altos.

Um aumento nas taxas de juros, em geral, aumenta a probabilidade de falência dos tomadores de empréstimos, e a taxa de juros que equilibra o mercado pode não ser a taxa efetiva de juros de equilíbrio, uma vez que essa taxa pode ser maior que a taxa de juros que maximiza o retorno dos bancos. Nesse sentido, o equilíbrio de mercado é caracterizado pelo racionamento de crédito.

A existência de assimetria de informação entre os envolvidos nas transações de crédito, em conjunto com a dificuldade de se incorporarem mecanismos adequados de incentivos, punições e controle, resulta em consideráveis *fricções* no mercado de capitais (STIGLITZ; WEISS, 1981).

A equação (17.2), que retrata um mercado de crédito perfeito, agora recebe, em adição, os custos associados às imperfeições nesse mercado para se chegar ao custo do dinheiro ao tomador. O banco cobrará do tomador de crédito a taxa de juros que recebeu do mercado mais os custos gerais de informação (I), quais sejam: os custos associados ao processo de *screening* do tomador de crédito; os custos pré-contratuais de incentivos, salvaguardas contratuais e comissões; e os custos pós-

contratuais de controle, monitoramento e má adaptação (STIGLITZ; WEISS, 1981). O custo do dinheiro para o tomador de crédito, portanto, conforme esses autores, será:

$$Rt = Re + I \tag{17.7}$$

em que Rt é a taxa de juros nominal cobrada do tomador; Re é a taxa de juros nominal recebida pelo emprestador [ver equação (17.2)]; e I corresponde aos custos gerais da obtenção de informações do tomador de crédito.

A equação demonstra que, num mercado de imperfeições, a taxa de juros ofertada ao tomador converge à taxa de juros recebida pelo emprestador. Desse modo, a redução dessas imperfeições teria o efeito de reduzir as taxas de juros do mercado.

17.6. O mercado de trabalho e a assimetria de informação

Na terminologia da teoria da informação, a situação que pode ser presenciada no mercado de trabalho é que o agente (o trabalhador) possui informações privadas a seu respeito que o principal (o empregador) não possui. Essas informações exercem papel fundamental para determinar a produtividade de seu trabalho e são ditas assimétricas. O trabalhador tem interesse em manter essas informações privadas e em não compartilhá-las com o empregador, de tal forma a poder manipulá-las a seu favor e lucrar com essa atitude. Nessas condições, o resultado é um mercado ineficiente, uma vez que a empresa somente terá essas informações após a efetiva contratação.

De acordo com Pindyck e Rubinfeld (1999), as empresas não podem simplesmente contratar trabalhadores, observar os seus respectivos desempenhos e, então, demitir aqueles que apresentarem baixa produtividade, porque esse processo seria muito dispendioso. Em primeiro lugar, as empresas estão sujeitas a demonstrar justa causa ou então têm de pagar as despesas relativas ao desligamento do funcionário. Em segundo lugar, em muitos empregos os trabalhadores precisam de um período de treinamento interno para atingirem suas produtividades potenciais.

Na análise realizada por Loureiro (1999), quando uma firma resolve

empregar os trabalhadores de maior produtividade incorre em perda sob informação privada (características dos agentes) em relação aos trabalhadores de menor produtividade. Em outras palavras, melhores contratos são conseguidos pelos trabalhadores de menor produtividade relativamente aos de maior produtividade. Contudo, como evidencia Greenwald (1986), a firma deveria saber distinguir entre as habilidades dos trabalhadores mais capazes dos menos capazes, para evitar que os melhores trabalhadores deixassem o emprego.

Em seus estudos sobre seleção adversa e discriminação no mercado de trabalho, Loureiro (1999) aplicou a modelagem de seleção adversa, adaptada dos modelos iniciais sobre discriminação no mercado de trabalho, desenvolvidos por Becker (1957). Em um de seus estudos, Loureiro (1999) buscou identificar a existência de discriminação salarial gerada pela informação assimétrica (produtividades não observadas). A proposição considerada foi o fato de a firma não conseguir distinguir entre trabalhadores com diferentes características e tratá-los como se formassem um único grupo. A este grupo é oferecido um salário único, e, dado o problema de assimetria de informação, a distribuição de probabilidade de produtividades é uma única.

O modelo proposto pelo autor, para satisfazer a proposição descrita, é apresentado a seguir.

Modelo

Trabalhadores com diferentes produtividades fazem parte de um mercado de trabalho competitivo, bem como firmas idênticas que podem contratar esses trabalhadores. As firmas produzem o mesmo produto com tecnologia de retornos constantes de escala – em que o único insumo é o trabalho e o produto tem preço normalizado igual a 1.

Inicialmente, a oferta de trabalho é definida como uma função do salário w. No primeiro período, o trabalhador aufere um salário reserva igual $\phi(\varphi)$, que representa a sua utilidade.

O custo de oportunidade de o trabalhador aceitar o emprego é definido por:

$$\phi(\varphi) \leq w$$

e significa que o trabalhador do tipo φ possui um salário reserva (17.8) $\phi(\varphi)$, abaixo do qual ele não está disposto a trabalhar, o que implica que o conjunto de trabalhadores que aceita trabalhar é dado por:

$$\Phi(\omega) = [\varphi : \phi(\varphi) \leq w] \qquad (17.9)$$

em que $\varphi \varepsilon [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] \subset R$ e $0 < \varphi < \varphi < \infty$.

A produtividade de cada trabalhador é:

$$\mu = \int_{\varphi \varepsilon \Phi} \varphi f(\varphi) d\varphi \qquad (17.10)$$

em que $\varphi \ \varepsilon \ \Phi(w)$.

A demanda de trabalho é definida como uma função do salário $D(w)$. A firma acredita que a produtividade média do trabalhador que aceita emprego é μ, daí tem-se:

$$D(w) = \begin{cases} (i) & 0, \text{ se } \quad \mu < w \\ (ii) & [0, \infty], \text{ se } \quad \mu = w \\ (iii) & \infty, \text{ se } \quad \mu > w \end{cases}$$

isto é, se os trabalhadores se enquadrarem na condição (i), a demanda por trabalho da firma será zero; por outro lado, na condição (ii), a firma paga um salário w igual à produtividade média dos que aceitam trabalhar, e a demanda por trabalho da firma oscilará como $0 < \varphi < \varphi < \infty$ para o primeiro período; a condição (iii) informa que a demanda por trabalho da firma será infinita, se o trabalhador aceitar receber um salário menor que sua produtividade média.

Em um equilíbrio com um nível positivo de emprego, a oferta de trabalho $\Phi(w)$ e a demanda por trabalho $D(w)$ podem-se igualar se, e

somente se:

$$w = E[\varphi / \varphi \varepsilon \Phi *] \quad (17.11)$$

em que $\Phi * = [\varphi : \phi(k) \leq w*]$.

Loureiro (1999), então, faz a seguinte definição: *em um modelo de mercado de trabalho competitivo, com níveis de produtividade não observáveis por trabalhador, um equilíbrio competitivo é um salário w* e um conjunto $\Phi *$ do tipo de trabalhador cujo emprego aceito é tal que $\Phi* = [\varphi : \phi(\varphi) \leq w*]$ e $w* = E[\varphi / \varphi \varepsilon \Phi *]$.

Após a definição, trabalha-se com a suposição de que a metade dos trabalhadores do grupo do tipo φ que aceita empregos recebe salário w igual à produtividade média do grupo μ. A produtividade média do trabalhador que aceita o emprego é dada por $\mu = E[\varphi : \varphi \varepsilon \Phi *]$, em que $\Phi *$ é o conjunto de tipos que aceitam empregos em equilíbrio. Para tal situação, assume-se que o lucro esperado das firmas seja dado por $E[(\varphi - w) / \varphi \varepsilon \psi(w)]$, e, enquanto os trabalhadores querem, maximizam o salário de acordo com a expressão $E[(\varphi - w) / \varphi \varepsilon \Phi(w)] = E[\varphi / \varphi \varepsilon \Phi(w)] - w$. Então, facilmente, pode-se chegar à equação $\mu - w = 0$. Esta informa que a firma paga um salário w igual à produtividade média dos que aceitam trabalhar.

A proposição lançada, então, consiste no fato de a informação assimétrica gerar discriminação salarial. Embora os trabalhadores esperem receber salários de acordo com suas produtividades marginais esperadas, o mercado de trabalho é discriminatório, no sentido de que um grupo de trabalhadores com produtividade diferente recebe o mesmo salário (LOUREIRO, 1999).

Assim, nessa proposta analítica, na presença de assimetria de informação, considera-se a existência de um grupo heterogêneo de trabalhadores. Como não se consegue distinguir suas diversas características, considera-se um conjunto universo de n trabalhadores, atribuindo ao grupo uma única distribuição de probabilidade de

produtividade.

A presença de informação assimétrica é a causa de um grupo de trabalhadores com diferentes produtividades receber um mesmo salário w, o que se caracteriza em discriminação salarial. Isso acontece quando se tem assimetria de informação no mercado de trabalho.

17.7. Considerações finais

Neste capítulo apresentou-se a informação como um dos fatores mais importantes para o alcance da eficiência de mercado, uma vez que através dela os agentes podem ajustar os níveis de preços e de produção que levam ao máximo de bem-estar. Quando a informação não é completa, ocorre uma falha, que resulta em benefício de uma parte em detrimento de outra - é o caso da informação assimétrica.

Inicialmente, definiu-se o corte teórico que existe entre as diferentes escolas do pensamento. Em razão de sua pluridimensionalidade, a informação não pode ser concebida como um objeto dado de que os agentes econômicos podem se apropriar de forma racional; ela é o objeto de vários processos de reapropriação e de aprendizagem. Conseqüentemente, ela é, por definição, assimétrica.

A informação assimétrica possui conseqüências nefastas para os vendedores: a seleção adversa e o risco moral, que criam um desvio de eficiência no mercado traduzido em uma indiscriminação de preços. Por meio de exemplos, foram verificadas as ineficiências originadas pela presença desses problemas, bem como os mecanismos que poderiam eliminá-las.

Os mercados de capitais e de trabalho foram analisados de acordo com a terminologia da teoria da informação e, como desenvolvido, as informações exercem papel fundamental para determinar o processo de mobilização de capital para investimentos produtivos; o processo de determinação da taxa de juros que equilibra oferta à demanda; e a produtividade dos trabalhadores.

17.8. Exercícios resolvidos

1) (Universidade Católica Portuguesa) Um indivíduo tem a seguinte função de utilidade $U = ln(Y) - c/M$, sendo Y a despesa com consumo, M a despesa com seguro médico e c uma variável binária, de forma que c=1, se o indivíduo estiver doente, e c=0, se não estiver. Segundo esta função, quanto maior for o seguro, melhor será o tratamento médico e menos desagradável será a doença. Se a probabilidade de adoecer for de 0,5 e se este indivíduo tiver um rendimento de (Y+M) de 10 u.m., qual o montante do seguro que ele deverá fazer.

Resposta

O montante do seguro deverá ser igual a dois.

2. (Faculdade de Ciências Econômicas e Empresariais) Considere que o país A importa todas as bananas que consome do exterior, na seguinte proporção: (1) a República das Bananas é responsável pela produção anual de 2 toneladas de bananas de boa qualidade e dispõe de uma aplicação alternativa para suas exportações ao preço de 160 u.m./kg; e (2) a República das Imitações produz 4 toneladas de bananas de má qualidade que, independentemente do preço, são exportadas na sua totalidade para o país A. O valor que os compradores atribuem a cada um dos tipos de banana é dado pelas seguintes curvas de procura inversas:

$$p_1 = 200 - 0{,}01q_1$$

$$p_2 = 170 - 0{,}02q_2$$

em que p_i representa o preço e q_i representa a quantidade, em kg.

a) Suponha que os compradores conseguem avaliar a qualidade de cada banana. Quais serão, nesse caso, os preços de equilíbrio?

b) Considere agora que a República das Imitações, pretendendo aproveitar-se do preço de mercado superior alcançado pelas bananas da República das Bananas, falsifica a etiqueta desta última.

Os consumidores deixam, assim, de conhecer, a priori, a qualidade de cada banana, mas, graças às estatísticas do comércio externo, sabem a quantidade importada de cada um dos países. Conseguirá a República das Imitações alcançar seus objetivos?

Resposta

a) Se os consumidores conseguem diferenciar as bananas por origem, basta montar a estrutura de equilíbrio e encontrar-se-á $P_1 = 180$ e $P_2 = 90$. Essa diferença evidencia, justamente, a diferença de qualidade percebida pelos consumidores.

b) Quando os consumidores não conseguem perceber a diferença entre os produtos, há um aumento de dificuldade. Todavia, como existem estatísticas de comércio que estão disponíveis (e considerando que os consumidores as conhecem), as imitações não atingirão seu intento.

17.9. Exercício proposto

1) (Universidade Católica Portuguesa) Em uma ilha sem contato com o exterior, surgiu um surto de uma nova doença nas vacas. Segundo o Ministério da agricultura desta ilha, a doença atacou 1.000 das 100.000 vacas do local – valores em que os consumidores acreditam. Os consumidores (que são neutros ao risco) valorizam o quilo da carne de uma vaca saudável em 500 u.m., valores em que eram comercializados os bifes. Mas agora, em virtude do ocorrido, apenas estão dispostos a pagar 300 u.m., pois não sabem distinguir a carne de uma vaca contaminada da carne de uma vaca sã.

a) Com esse dados, quanto se teria de pagar a um consumidor da ilha para comer um bife de vaca potencialmente contaminada?

Alguns agricultores da ilha sempre criaram suas vacas (20.000 ao total) com pasto, não utilizando rações (que foram causadoras da doença), e por isso têm certeza de que suas vacas não foram infectadas. Todavia, os consumidores não distinguem a carne de uma vaca ou outra, o que faz com que esses agricultores tenham que comercializar a carne no mesmo

valor (300 u.m.).

b) Para esses agricultores, o custo de criação de uma vaca para abate está estimado em 450 u.m./kg. Partindo dessa situação e considerando o preço de comercialização, quanto cada um dos agricultores está disposto a pagar por um selo que diferenciasse seu produto?

c) Quais os preços de equilíbrio da carne de vaca certificada e não-certificada, considerando que todos os agricultores com vacas criadas "a pasto" adotassem a certificação?

17.10. Referências

BECKER, G.S. **The economics of discrimination**. Chicago: University of Chicago Press, 1957.

BRAGA, M.B. Considerações teóricas acerca da existência de informação nos mercados de crédito. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 27, 1998. **Anais** ANPEC, 1998.

BRAGA, M.B. **Algumas considerações teóricas e implicações decorrentes da relação contratual entre credor e devedor sob a hipótese de existência de assimetria de informação**. São Paulo: USP, 2000. (Texto para discussão – Série Econômica, 5).

CANUTO, O.; FERREIRA JÚNIOR, R.R. **Assimetrias de informação e ciclos econômicos**: Stiglitz é Keynesiano? Campinas: IE/UNICAMP, 1999. (Texto para discussão, 73).

GREENWALD, B.C. Adverse selection in the labour market. **The Review of Economic Studies**, v. 53, n. 3(174), 1986.

GREENWALD, B.C.; STIGLITZ, J.E.; WEISS, A. Imperfect information, finance constraints, and business fluctuations. In: KOHN, M.; TSIANG, S.C. (org.). **Finance constraints, expectations and macroeconomics**. Oxford: Clarendon Press, 1988. cap. 7.

HERSCOVICI, A. **A sociedade da informação**: uma análise econômica. [s.n.t.].

HERSCOVICI, A. **Economia da informação**: entropia, mercado e natureza da informação. [1998].

HOFF, K.; STIGLITZ, J.E. Imperfect information and rural credit market: pussles and politcy perspectives. In: HOFF, K.; BRAVERMAN, A.; STIGLITZ, J.E. (ed.). **The economics of rural organization**. Oxford: Oxford University Press, 1993.

JAFFEE, D.M.; RUSSELL, T. Imperfect information, uncertainty, and credit rationing. **Quarterly Journal of Economics**, n. 90, p. 651-666, Nov. 1976.

LOUREIRO, P.R.A. **Seleção adversa, competição e discriminação no mercado de trabalho**. 1999. (GRIPE, 7).

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia**. São Paulo: Macron Books, 1999.

PINTO JÚNIOR, H.Q.; PIRES, M.C.P. **Assimetria de informações e problemas regulatórios**. ANP, 2000. (Nota Técnica, 6).

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JORDAN, B.D. **Fundamentals of corporate finance**. 4.ed. New York: Irwin McGraw-Hill, 1998.

SOROMENHO, J.C. **Microfundamentos e sociabilidade**. São Paulo: FEA/IPE, 1997. (Seminário, 23).

STIGLITZ, J.E.; WEISS, A. Credit rationing in markets with imperfect information. **American Economic Review**, n. 71, p. 393-410, 1981.

STIGLITZ, J.E. Money, credit and business fluctuations. **Economic Record**, v. 64, n. 187, p. 307-322, Dec. 1988.

STIGLITZ, J.E. **Principles of macroeconomics**. Stanford: Stanford University/W.W. Norton, 1993.

TAKAYAMA, A. **Analytical methods in economics**. Michigan: The University of Michigan, 1995.

VARIAN, H.R. **Microeconomia**: princípios básicos. Rio de Janeiro: Campus, 1999.

WILLIAMSON, O.E. **The economic institutions of capitalism**. New York: Free Press, 1985.

CAPÍTULO 18

Jogos estáticos e dinâmicos com informação completa

Geraldo Edmundo Silva Júnior[1]

A teoria dos jogos pode ser definida como um instrumental analítico de teoria da decisão em que é interagido o comportamento estratégico entre os participantes de um jogo. O próprio processo de otimização com restrições pode ser considerado como um jogo entre um agente e a natureza, sendo que, primeiro a natureza define o seu estado e, em seguida, o agente otimiza sua escolha, dado o estado da natureza.

Nos anos 40, a teoria dos jogos iniciou a sua difusão nas diversas áreas de conhecimento científico com a publicação do livro " Theory of Games and Economic Behavior", de autoria de John von Neumann e Oskar Morgenstern, considerados os pais da teoria dos jogos, em 1944. A partir de então, a teoria se desenvolveu, parecendo não haver limites para o seu desenvolvimento teórico e empírico.

O presente capítulo objetiva introduzir aspectos teóricos e aplicações da teoria dos jogos, limitados à linha de teoria dos jogos não-cooperativos com informação completa. Para isso, supõe-se que o leitor tenha algum conhecimento prévio dos tópicos abordados.

Inicialmente, é feita uma breve exposição do instrumental, com vistas ao seu desenvolvimento inicial. Em seguida, na seção 18.2, são apresentados os elementos essenciais de um jogo, caracterizando-se a sua importância na determinação de uma estrutura taxonômica. Na seção 18.3 são apresentados os jogos estáticos com informação completa, nas

[1] Professor da Universidade Federal de São Carlos - Camp: Sorocaba: E-mail: gedmundos@yahoo.com.br

suas subseções exemplos, exercícios resolvidos e propostos. Na seção 18.4, são introduzidos os jogos dinâmicos com informação completa. Em suas subseções são, também, apresentados exemplos e exercícios resolvidos e propostos. Finalmente, são apresentadas considerações conclusivas, identificando-se as soluções dos exercícios propostos.

18.1. Introdução

Historicamente, segundo Walker (1995), a modelagem da teoria dos jogos remonta à solução de estratégias mistas, proposta por Waldegrave em 1713. Posteriormente, Augustine Cournot, um professor de engenharia mecânica francês, conseguiu influenciar o seu meio acadêmico com a análise do problema do duopólio entre duas firmas, estabelecendo o ponto de partida para estudos de Organização Industrial, no ano de 1838.

Joseph Bertrand, em 1883, resgatou as idéias originais de Cournot ao estabelecer a idéia de ubiqüidade de equilíbrio, trabalhando com a hipótese de rigidez de preços. No ano de 1934, Heinrich *von* Stackelberg, apresentou uma versão do duopólio de Cournot que extrapolou as condições de concorrência perfeita, ao sugerir que as firmas agiriam seqüencialmente.

Com a publicação do livro "Game Theory and Economic Behavior", *von* Neumann e Morgenstern (1944) introduziram a noção de jogos cooperativos e uma estrutura axiomática para a teoria da utilidade.

O ambiente acadêmico em torno da publicação desse livro era o de produção de conhecimento vinculado à cooperação entre os agentes de uma economia. Embora surgida no campo da Matemática, a difusão do instrumental matemático na economia alargava os seus passos já nas décadas de 1920 e 1930, com a formação do Círculo de Viena, por Karl Menger, e do já conhecido Círculo de Cambridge, com importantes contribuições verbalizadas na estrutura lógica matemática – como exemplo, cita-se Ramsey em 1928, von Neumann em 1928, Karl Menger em 1934, *von* Stackelberg em 1934, Abraham Wald em 1935, Frederik Zeuthen em 1936, entre outras.

O objetivo inicial da teoria era a compreensão de como os agentes interagiam para a alocação de recursos em uma economia, posto a sua contemporaneidade com o estudo do problema do equilíbrio em economia, apresentado inicialmente por Walras e estudado por inúmeros autores, inclusive von Neumann (1928). Entre os principais resultados propostos naquele ambiente acadêmico encontra-se: a Prova do Teorema do Minimax, a Prova do Algoritmo de Zermelo e a Prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Na metade do século ocorreu a grande cisão na teoria, com a introdução da estrutura de jogos não-cooperativos. Os trabalhos de Nash (1950, 1953) axiomatizaram a teoria da barganha e apresentaram o divisor de águas entre jogos cooperativos e não-cooperativos. As contribuições seminais de John Nash propuseram uma estrutura alternativa àquela proposta pela teoria dos jogos cooperativos, ao considerar que todos os jogadores conhecem o que os demais conhecem, e cada um deles é motivado pelo seu interesse particular. Logo, conceitos como equilíbrio de Nash, barganha axiomática e estratégias dominantes tornaram-se jargões em teoria dos jogos.

As deficiências das proposições de John Nash foram parcialmente supridas por Reinhard Selten em 1953, ao apresentar uma estrutura extensiva dinâmica para o problema da barganha.

Em seguida, uma proposta mais realística, isto é, a consciência de que o conhecimento completo não representa o mundo real, foi sugerida por John Harsanyi nos anos 60.

Seguiu-se, a partir de então, o desenvolvimento dos jogos bayesianos, estudos sobre barganha, equilíbrios seqüenciais, racionalidade limitada, aprendizagem, entre outros importantes tópicos e aplicações relevantes da teoria.

Reitera-se, também, que um desenvolvimento paralelo da teoria dos jogos cooperativos tem ocorrido, tendo como principal expoente o Professor Robert J. Aumann, da Universidade Hebraica de Jerusalém.

O instrumental de teoria dos jogos tem sido utilizado em várias áreas do conhecimento científico, a saber: Sociologia, Política, Direito,

Administração de Empresas, Biologia, Economia, Forças Armadas, Matemática, e muitas outras áreas do conhecimento.

No ano de 1994, a comunidade científica reconheceu a importância desse campo da ciência, com o Prêmio Nobel de Economia conferido aos Professores John Harsanyi, John F. Nash e Reinhard Selten.

Recomendam-se como leitura básica os livros de Kreps (1990), Gibbons (1992), Rasmusen (1993), Binmore (1994), Fudenberg e Tirole (1995), Mas-Colell *et al.* (1995), bem como os artigos clássicos de autores como Robert Aumann, Douglas Bernhein, Drew Fudenberg, John Harsanyi, David Kreps, Vijay Krishna, John Nash, Hervé Moulin, Roger Myerson, Reinhart Selten, Lloyd Shapley, Martin Shubik, Jean Tirole, entre outros.

18.2. Elementos do jogo

A presente seção estabelece as definições básicas dos elementos de teoria dos jogos. A partir do conhecimento de tais definições, é possível construir uma estrutura taxonômica dos diversos tipos de jogos.

Definição 1: (jogadores)

Os jogadores são agentes que interagem e tomam decisões. Seja J o conjunto de jogadores que fazem parte do jogo Γ, então, para um jogo com n jogadores, tem-se: $J = (1, ..., n)$.

No rol de jogadores pode-se incluir a natureza, sendo a sua função dupla: a primeira versa sobre o seu papel nos procedimentos de otimização condicionada, pois, ao otimizar, o agente toma o estado da natureza como dado; a segunda determina os tipos dos jogadores em jogos com informação incompleta.

Definição 2: (ações)

Nas ações a_i^j, *i representa a i-ésima ação que pertence ao espaço de ações* A_j *e j representa o j-ésimo jogador. A ação é a escolha que o jogador pode fazer independentemente das ações dos demais jogadores.*

Como exemplos de ações pode-se considerar um conjunto a_i, $i = 1, 2, ..., n$ para um jogador e a_h, $h = 1, 2, ..., m$ para o seu oponente, com m >, < ou = a n.

Definição 3: (espaço de ações)

O espaço de ações é composto pelo conjunto de ações disponibilizadas para o j-ésimo jogador durante o jogo.

No espaço de ações tem-se o conjunto das ações disponíveis, sabendo-se que este é compacto, pois, como exemplo: no jogo par/ímpar o j-ésimo jogador tem as seguintes ações disponibilizadas em seu espaço $A_j = (a_1 = \text{par}, a_2 = \text{ímpar})$.

Definição 4: (estratégia ou espaço de estratégias)

As estratégias s_{ij} representam as ações alternativas que um jogador pode executar, levando-se em conta as ações dos demais jogadores.

No exemplo par/ímpar ambos os jogadores têm o mesmo espaço de estratégias S_j. Logo, as estratégias disponibilizadas para o j-ésimo jogador são: {(par|ímpar), (ímpar|par), (ímpar|ímpar) e (par|par)}.

Definição 5: (funções de pagamento ou pay-off's)

As funções de pagamento representam os pagamentos que os jogadores poderão obter a partir de suas decisões interagidas com as decisões dos demais jogadores. Algebricamente, define-se: $\Pi_j : S_j \times S_{-j} \rightarrow \Re, \Pi_j$ representa o valor real que o j-ésimo jogador recebe ao interagir o seu espaço estratégico com o espaço estratégico dos demais jogadores. Exemplo: no jogo par/ímpar têm-se os espaços de ações A_j = (par, ímpar) = A_{-j}. Então, os espaços de ações também são coincidentes, pois: $s_i^j \in S_j$, com $i = 1, 2, 3$ e 4; $j = 1,2$. *Portanto: s_1 = par/ímpar = -\$1,00; s_2 = par/par = +\$1,00; s_3 = ímpar/par = -\$1,00; e s_4 = ímpar/ímpar = +\$1,00.*

Definição 6: (estratégias puras ou mistas)

As estratégias puras são um caso particular das estratégias mistas. Considere o jogo Γ(par/ímpar): as estratégias puras fazem com que a estratégia escolhida assuma os seguintes valores de

probabilidade $p = (p = 0 \text{ ou } p = 1)$. *Já no âmbito das estratégias mistas, tais valores pertencem ao intervalo [0,1].*

Seja p_j o vetor de probabilidade associado ao j-ésimo jogador e q_{-j} o vetor associado ao outro jogador, em um jogo com dois jogadores. Ainda, seja B os pagaments que o j-ésimo jogador recebe, portanto:

$$\Pi_j(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_{-j}) = \mathbf{p}_j^T \mathbf{B}_j \mathbf{q}_{-j} \text{ e } \Pi_{-j}(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_{-j}) = \mathbf{q}_{-j}^T \mathbf{B}_{-j} \mathbf{p}_{-j}.$$

Definição 7: (informação)

A informação é um dos elementos que ajudam na determinação da estrutura taxonômica dos jogos. Em jogos, a informação pode ser completa ou incompleta e perfeita ou imperfeita.

A informação incompleta estabelece que algum ou todos os jogadores não possuem informação total sobre as regras do jogo. Já a informação imperfeita refere-se ao conhecimento sobre os oponentes e os seus próprios movimentos.

Definição 8: (resultados)

A cargo do modelador do jogo, o resultado do jogo representa o conjunto dos elementos que o modelador estabelece a partir do vetor de ações, das funções de pagamento e de outras variáveis após o encerramento do jogo. Pode ser considerado um esboço da solução do jogo em função de fatos estilizados ou de proposições teóricas estabelecidas na formulação do jogo.

Definição 9: (regras do jogo)

As regras do jogo são representadas pelos jogadores, pelas ações e pelos resultados que o jogo assume ao ser encerrado. Elas estabelecem a ordem ou não das jogadas e, a partir delas, obtém-se o equilíbrio.

Definição 10: (equilíbrio)

O equilíbrio é o resultado da solução estratégica ótima entre

os jogadores, isto é, uma combinação da estratégia ótima de um jogador com a estratégia ótima do seu oponente.

Definição 10.1: (equilíbrio de Nash)

O equilíbrio de Nash consiste na melhor escolha estratégica de um jogador dado o que o outro jogador tenha escolhido. Na verdade, consiste de uma escolha condicional, visto que primeiro o jogador observa as melhores alternativas estratégicas do seu oponente e, com base nas opções do seu oponente, escolhe a sua. Se algum resultado coincide com o resultado propiciado pela ação do seu oponente, este resultado será um equilíbrio de Nash. Algebricamente, tem-se: $\Pi_j(s_j^*, s_{-j}^*) > \Pi_j(s_j', s_{-j}^*), \forall s_j \in A_j \; e \; \forall s_{-j} \in A_{-j}$.

A combinação estratégica s_i^* e s_{-i}^* *é o melhor resultado para o j-ésimo jogador, isto é, não existe nenhuma outra possibilidade que resulte numa função de pagamento maior dado que a estratégia ótima para o seu oponente é* s_{-j}^*.

Outra maneira de expressar o equilíbrio de Nash é $\max_{s_j \in A_j} \Pi_j(s_j, s_{-j}^*)$.

Definição 10.2: (equilíbrio de estratégia dominante)

Todo o equilíbrio de estratégia dominante é um equilíbrio de Nash, mas o contrário não é verdadeiro. O equilíbrio consiste na eliminação das estratégias que apresentam um valor inferior para o j-ésimo jogador, independentemente da estratégia do outro jogador.

Algebricamente: $\Pi_j(s_i^*, s_{-i}) > \Pi_j(s_i', s_{-i}), \forall s_{-i}, \forall s_i'$.

Devem, portanto, ser eliminadas aquelas estratégias que produzem um resultado inferior ao das demais, independentemente da escolha estratégica do oponente.

Definição 10.3: (equilíbrio de Nash em subjogo perfeito)

Em jogos dinâmicos com informação completa é possível considerar que cada nodo representa um subjogo. O equilíbrio de Nash em subjogo perfeito é a trajetória de solução ótima resolvida por indução-para-trás, isto é, resolvendo-se o jogo a partir do final, quando for possível estabelecer uma trajetória até o início, esta trajetória será o equilíbrio de Nash em subjogo perfeito.

Definição 10.4: (equilíbrio Minimax)

O equilíbrio minimax consiste em encontrar o menor resultado na melhor das hipóteses. Já o equilíbrio maximin permite encontrar o maior resultado na pior das hipóteses. Em termos algébricos, pode-se definir:

$$\min_{s_{-j}\in S_{-j}} \max_{s_j\in S_j} \Pi(s_j, s_{-j}) = \max_{s_j\in S_j} \Pi(s_j, \sigma) \text{ e } \max_{s_j\in S_j} \min_{s_{-j}\in S_{-j}} \Pi(s_j, s_{-j}) = \min_{s_{-j}\in S_{-j}} \Pi(\delta, s_{-j})$$

Definição 11: (árvore de decisão)

A árvore de decisão é um conjunto de nodos que representam a raiz, os estágios e o final do jogo. Em termos gráficos, uma árvore pode ser ilustrada conforme a Figura 18.1.

Na Figura 18.1 têm-se dois exemplos: no exemplo (a) o jogador I tem duas possibilidades e, na seqüência, o jogador II também tem duas possibilidades, sendo o mesmo incerto acerca do que ocorreu no nodo anterior. Por isso, a escolha do jogador II é marcada por uma estrutura pontilhada, caracterizando o jogo como um jogo de informação imperfeita.

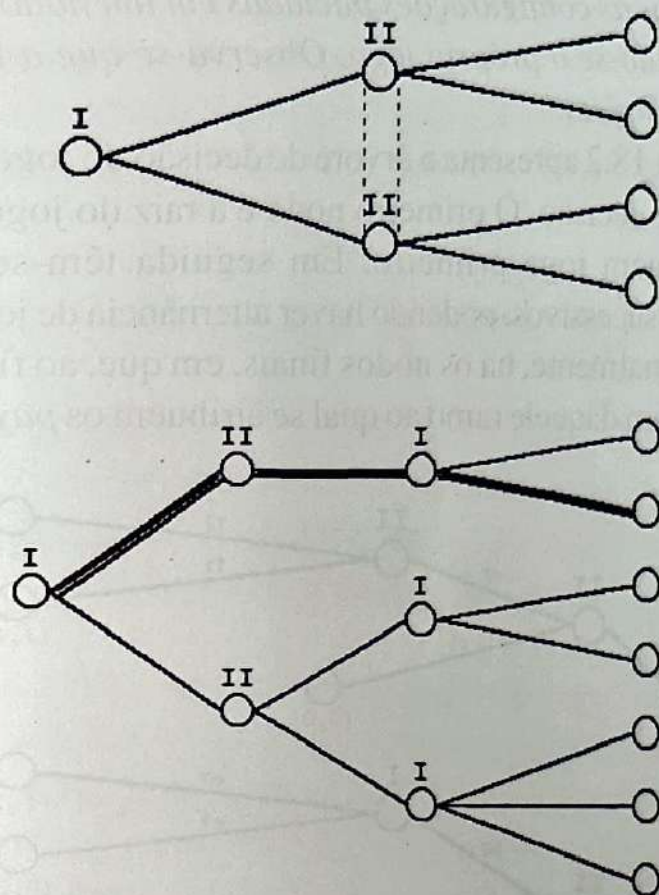



Figura 18.1 - Árvore de decisão

No exemplo (b), o jogador I tem duas opções, que são finalizadas com a jogada do jogador II. Na primeira opção do jogador II, a seqüência da esquerda é finalizada com dois nodos disponibilizados para o jogador I. No primeiro nodo, o jogador I tem três opções; no segundo, duas opções. Na opção da direita, o jogador II tem apenas uma opção, que finaliza com o nodo de decisão do jogador I. O jogador I, finalmente, tem duas opções.

No exemplo (b), ainda, tem-se que a seqüência marcada pela duplicação das retas é a representação do "Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos".

Definição 11: (subjogo)

São todas as configurações iniciadas em um nodo de decisão do jogo, incluindo-se o próprio jogo. Observa-se que a informação tem quer ser completa.

A Figura 18.2 apresenta a árvore de decisão do jogo, em que se têm os nodos de decisão. O primeiro nodo é a raiz do jogo, em que é determinado quem joga primeiro. Em seguida têm-se os nodos intermediários e sucessivos, podendo haver alternância de jogadas entre os jogadores. Finalmente, há os nodos finais, em que, ao final de cada ramo, tem-se o fim daquele ramo ao qual se atribuem os *payoff's*.

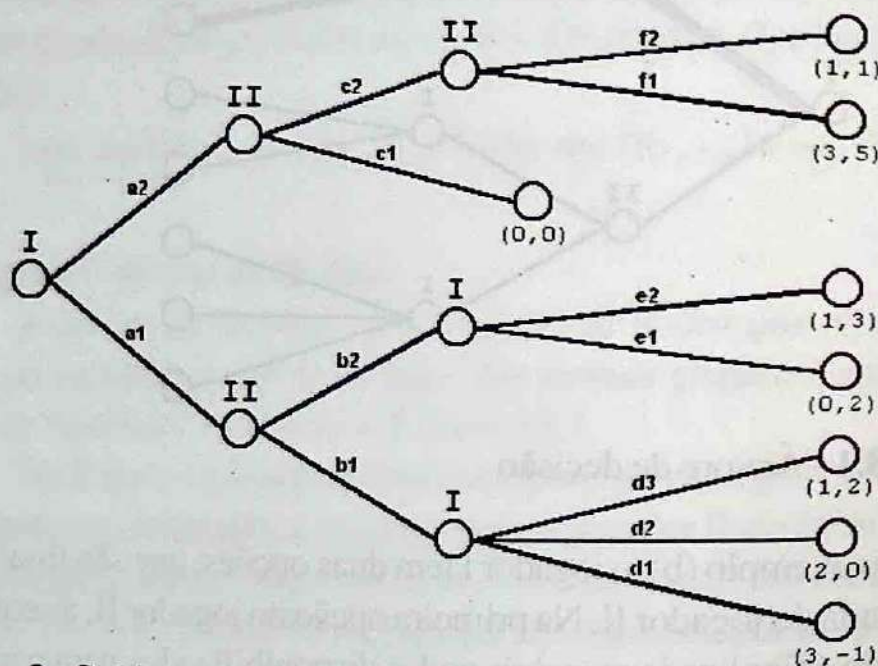



Figura 2 - Subjogos

Observando a Figura 18.2, têm-se os subjogos, que são os seguintes:

1. O primeiro subjogo é o próprio jogo, designado por Γ_E, em que o jogador I joga tendo as ações iniciais a_1 e a_2.
2. O segundo subjogo Γ_E^a é marcado pelo nodo a, em que o jogador I joga, e toda a extensão do ramo a partir daquele nodo. As alternativas iniciais são a_1 e a_2.
3. O terceiro e o quarto subjogos, Γ_E^b e Γ_E^c, respectivamente, devem ser

resolvidos pelo jogador II.

4. O quinto, o sexto e o sétimo subjogos, Γ_E^d, Γ_E^e e Γ_E^f, respectivamente, deverão ser resolvidos pelo jogador I.

O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é representado pelo segmento $a_2c_2f_1$. Portanto, em termos algébricos a representação deve ser a seguinte:

$$\Gamma_E^* = \Gamma\left(\Gamma_E^{r*} = \Gamma\left(\bullet, \Gamma_E^{*} = \Gamma\left(\Gamma_E^{f*}\right)\right)\right) \Rightarrow \Pi_I\left(a_2\left(\Pi_{II}\left(\bullet, c_2\left(\Pi_I\left(f_1, \bullet\right)\right)\right)\right)\right) > \Pi_I\left(a_1, \bullet\right) \quad (18.1)$$

Duas considerações importantes inferidas por Rasmusen (1993) se referem aos elementos mínimos de um jogo e às regras do jogo. Os elementos mínimos são constituídos por: jogadores, estratégias e funções de pagamento. As regras são constituídas pelos jogadores, ações e resultados.

A partir da definição dos elementos básicos de um jogo, é necessário estabelecer a estrutura taxonômica para o caso de informação completa. A estrutura divide os jogos com dois ou mais jogadores, em jogos estáticos com informação completa e jogos dinâmicos com informação completa. A Tabela 18.1 sintetiza as informações básicas para esses dois tipos de jogos.

Tabela 18.1 - Tipo, regra, equilíbrio e aplicação do jogo

Tipo	Regra	Equilíbrio	Aplicação
JOGOS ESTÁTICOS COM INFORMAÇÃO COMPLETA	1) um jogador escolhe uma ação a_j do seu espaço de ações A_j; 2) o seu oponente escolhe uma ação a_{-j} do espaço de ações A_{-j}; e 3) ambos recebem os *pay-off's* em função da interação entre as escolhas realizadas: ${}_j(a_j, a_{-j})$ e ${}_{-j}(a_j, a_j)$.	Equilíbrio de Nash e equilíbrio de estratégias dominantes	O modelo de competição de Cournot, o modelo de competição de Bertrand e o modelo de competição de Hotelling.
JOGOS DINÂMICOS COM INFORMAÇÃO COMPLETA	(i) o jogador escolhe a_i, A_j (i=1,...,n) e (j=1,2) para um jogo com dois jogadores; (ii) o seu oponente observa a sua escolha e, então, escolhe a_i, A_{-j} (i=1,...,m) e (j=1,2); e (iii) ambos recebem os seus pagamentos.	Equilíbrio de Nash em subjogo perfeito	O modelo de Stackelberg, o modelo de colusão, o modelo de oligopólio e o modelo de barreiras à entrada.

Fonte: Informações organizadas pelo autor.

Na estrutura taxonômica clássica dos jogos, apresentada por Gibbons (1992, 1997) e Fudenberg e Tirole (1995), os jogos se dividem de acordo com dois critérios: quanto aos movimentos dos jogos, eles podem ser estáticos ou dinâmicos; e quanto à informação, eles podem ser de informação completa ou incompleta.

18.3. Jogos estáticos com informação completa

Os jogos estáticos com informação completa estabelecem uma regra que compreende os jogadores, as ações escolhidas e os resultados alcançados pela combinação estratégica das ações. Em termos algébricos, pode-se definir o jogo na forma normal ou estratégica como:

$$\Gamma_N = (J, A, S, P, \Pi) \tag{18.2}$$

O jogo é constituído por jogadores, no caso J=1,2, para a situação de um jogo com apenas dois jogadores; ações – o espaço de ações $A = (A_j, A_{-j})$ é dividido em dois subespaços, um para o jogador 1, $A_1 = (a_1, ..., a_m)$, que compreende as ações disponibilizadas para aquele jogador, e outro subespaço para o seu oponente $A_2 = (a_1, ..., a_n)$; o espaço de estratégias $S = (S_j, S_{-j})$; o vetor de probabilidades P=(p 0 [0,1]; q 0 [0,1]); o vetor de pagamentos $J = (J_j(s_j,s_{-j})$; e $J_{-j}(s_j,s_{-j}))$.

A expressão (18.1) pode ser estendida como:

$$\begin{aligned}&\Gamma_N = (J=\{1,2\}, A=\{A_1=(par, ímpar), A_2=(par, ímpar)\}, S=(S_1=(s_1=par/\ par,\\ &s_2=par/ímpar, s_3=ímpar/\ par, s_4=ímpar/ímpar), S_2=(S_1=(s_1=par/\ par,\\ &s_2=par/ímpar, s_3=ímpar/\ par, s_4=ímpar/ímpar)), P=(\mathbf{p}=(p_1, 1-p_1),\\ &\mathbf{q}=(q_1, 1-q_1)), \Pi=(\Pi_1(s_j, s_{-j}), \Pi_2(s_j, s_{-j}))\end{aligned} \tag{18.3}$$

Portanto, na resolução dos jogos na forma normal, são considerados o número de jogadores, as ações, as estratégias, as probabilidades e as funções de pagamento ou *pay-off's*. Em geral, os jogos estáticos são apresentados na forma normal, isto é, como uma caixa de diagrama que representa as alternativas de ações para os participantes do jogo. Como exemplo, ilustra-se, conforme a Figura 18.3, o seguinte jogo entre dois jogadores:

		Jogador 2 = Berenice		
		a^2_1	.....	a^2_m
Jogador 1 = Adão	a^1_1	$(J_1=(a^1_1, a^2_1), J_2(a^1_1, a^2_1))$	.....	$(J_1=(a^1_1, a^2_m), J_2(a^1_1, a^2_m))$
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	a^1_n	$(J_1=(a^1_n, a^2_1), J_2(a^1_n, a^2_1))$	......	$(J_1=(a^1_n, a^2_m), J_2(a^1_n, a^2_m))$

Figura 18.3 - Representação de um jogo na forma estratégica

18.3.1. Exemplo de jogo estático com informação completa

Dois assaltantes, Cara-de-Cavalo e Mineirinho, roubaram uma joalheria no bairro de Ipanema, na cidade do Rio de Janeiro. A partir de uma denúncia anônima, ambos foram capturados e colocados em duas diferentes salas para interrogatório. O acusado Cara-de-Cavalo foi interrogado pelo detetive Faro-Fino; já o Mineirinho foi interrogado pelo detetive Olho-Vivo.

As provas contra os acusados são circunstanciais, e a acusação partiu de uma denúncia anônima. A justiça prevê 10 anos de pena para os acusados que não confessam o crime, desde que este seja denunciado pelos cúmplices. No caso, os cúmplices que confessarem o crime, na hipótese de silêncio dos demais envolvidos, ganham liberdade; no caso de silêncio, mesmo em caso de denúncia comprovada, e não confessada, os envolvidos são condenados a dois anos de reclusão.

<u>Solução</u>: Ambos os acusados estão em salas separadas e sem comunicação. São desconhecidas as informações sobre a condução do interrogatório na outra sala.

1) Jogadores: jogador 1 (Cara-de-Cavalo) e jogador 2 (Mineirinho).
2) Ações: Confessar (C) e Não Confessar (NC).
3) Espaço de ações: A_A = (Confessar = C, Não-Confessar = NC) = A_C.
4) Estratégias: (Confessa/Confessa, Confessa/Não Confessa, Não Confessa/Confessa e Não Confessa/Não Confessa).

5) Funções de pagamento:
a) jogador 1: (Confessa/Confessa = 5 anos, Confessa/Não Confessa = 0 ano, Não Confessa/Confessa = 10 anos e Não Confessa/Não Confessa = 2) para o jogador Cara-de-Cavalo; e
b) jogador 2: (Confessa/Confessa = 5 anos, Confessa/Não Confessa = 0 ano, Não Confessa/Confessa = 10 anos e Não Confessa/Não Confessa = 2) para o jogador Mineirinho.
6) Informação: completa e imperfeita.
7) Regras do jogo: cada um dos jogadores escolhe a sua ação e, após a ação escolhida, é feita uma acareação, em que aos jogadores são informados os resultados dos interrogatórios.

Na forma estratégica, o jogo é representado conforme a Figura 18.4.

		Mineirinho	
	Ações	Confessar	Não Confessar
Cara-de-Cavalo	Confessar	(5 anos, 5 anos)	(0 ano, 10 anos)
	Não Confessar	(10 anos, 0 ano)	(2, 2)

Figura 18.4 - Representação estratégica do jogo dilema do prisioneiro

a) Equilíbrio de Nash: o jogo possui dois equilíbrios de Nash (Confessa/Confessa) e (Não Confessa/Não Confessa). O primeiro equilíbrio resulta da combinação da ação do jogador Cara-de-Cavalo: se ele confessar, a melhor estratégia para Mineirinho é confessar; em caso de não-confissão por parte de Cara-de-Cavalo, a melhor estratégia para Mineirinho será não confessar. Na perspectiva de Cara-de-Cavalo, em sua sala de interrogatório, se Mineirinho confessar o crime, a sua melhor opção será confessar. Em caso de não-confissão por parte de Mineirinho, o melhor para Cara-de-Cavalo será não confessar.
b) Equilíbrio de estratégias dominantes: confessa, dado que o oponente confessa.

c) Equilíbrio de Nash em estratégias mistas: associando-se as seguintes probabilidades do acusado Cara-de-Cavalo: jogar confessar igual a p e jogar não confessar = 1-p; e de Mineirinho: jogar confessar = q e jogar não-confessar igual a 1-q, tem-se uma solução com p* =1 e q*=1, o que implica que ambos deverão confessar com a probabilidade de 1.

18.3.2. Exercícios resolvidos de jogos estáticos com informação completa

Exercício 18.1 – Modelo de Competição de Cournot

A literatura de Organização Industrial (O.I.) tem no modelo de competição de Cournot o seu marco teórico, incluindo-se o fato de que o equilíbrio de Nash em O.I. é citado como equilíbrio Cournot-Nash, em razão da importância do trabalho original de Augustine Cournot.

O problema estudado por Cournot propõe que duas firmas produtoras de água mineral, um produto homogêneo, concorrem entre si por um mercado com a regra de precificação dada pela função de demanda inversa: $P(Q) = a - Q$, isto é, os preços dependem das quantidades ofertadas por ambas as firmas, $Q = q_1 + q_2$, ou seja, a quantidade ofertada no mercado depende das quantidades ofertadas pelas firmas 1, "Água Perrier", e 2, "Água Vichy Célestins".

A estrutura de custos é a mesma para ambas as firmas e é representada pela seguinte expressão: $C_i(q_i) = cq_i$, em que c é o custo marginal.

Os elementos do jogo são os seguintes:

1) Jogadores: jogador 1 ("Perrier") e jogador 2 ("Vichy Célestins).
2) Ações: produzir muito (Q^+), produzir pouco (Q^-) e produzir médio (Q^e) para cada uma das firmas.
3) Espaço de ações: $A_{Perrier}$ = (produzir muito = Q^+, produzir pouco = Q^- e produzir médio = Q^e) = $A_{Vichy\ Célestins}$.
4) Estratégias: (Q^+/Q^+, Q^+/Q^-, Q^+/Q^e, Q^e/Q^+, Q^e/Q^-, Q^e/Q^e, Q^-/Q^+, Q^-/Q^- e Q^e/Q^e) para cada uma das firmas.

5) Funções de pagamento: as funções de pagamento das firmas são dadas pelo lucro das firmas após o período de produção: $Đ_{Perrier} = q_{Perrier} x P(q_{Perrier} + q_{Vichy\ Célestins}) - C_{Perrier}(q_{Perrier})$, para a firma Perrier, e $Đ_{Vichy\ Célestins} = q_{Vichy\ Célestins} x P(q_{Vichy\ Célestins} + q_{Perrier}) - C_{Vichy\ Célestins}(q_{Vichy\ Célestins})$, para a firma Vichy Célestins.

6) Informação: completa e imperfeita.

7) Regras do jogo: cada uma das firmas escolhe uma dentre as três quantidades a serem produzidas e, após a escolha da outra firma, a oferta de mercado e o nível de preços são estabelecidos. Finalmente, as firmas, dados os custos de produção, conseguem determinar o seu lucro.

Em sua forma estratégica, o jogo pode ser configurado conforme a Figura 18.5.

			Firma 2 = Vichy Célestins		
	Ações		Q^+	Q^e	Q^-
			2(a-c)	(a-c)	(a-c)/2
Firma 1 = Perrier	Q^+	2(a-c)	$(-6(a-c)^2, -6(a-c)^2)$	$(-4(a-c)^2, -2(a-c)^2)$	$(-3(a-c)^2, -(3/4)(a-c)^2)$
	Q^e	(a-c)	$(-2(a-c)^2, -4(a-c)^2)$	$(-(a-c)^2, -(a-c)^2)$	$(-(1/2)(a-c)^2, -(1/4)(a-c)^2)$
	Q^-	(a-c)/2	$(-(3/4)(a-c)^2, -3(a-c)^2)$	$(-(1/4)(a-c)^2, -(1/2)(a-c)^2)$	(0, 0)

Figura 18.5 - Representação estratégica para o jogo de Cournot

a) Equilíbrio de Nash: (Q^-, Q^-).

b) Equilíbrio de estratégias dominantes: a estratégia (Q^-, Q^-) domina as demais estratégias.

c) Equilíbrio de Nash em estratégias mistas: p = (0, 0, 1) e q = (0, 0, 1) para valores de probabilidade iniciais de: $p(Q^+) = p_1$, $p(Q^e) = p_2$ e $p(Q^-) = 1 - p_1 - p_2$ para o jogador Perrier e $p(Q^+) = q_1$, $p(Q^e) = q_2$ e $p(Q^-) = 1 - q_1 - q_2$ para o jogador Vichy Célestins.

Exercício 18.2 – Modelo de Competição de Bertrand

O modelo de competição de Bertrand estabelece que as firmas, em vez de estabelecerem quantidades demandadas para a maximização dos lucros, preferem a fixação de preços em virtude de algum grau de oligopólio e poder de mercado. O modelo é compatível com os casos de diferenciação de produtos.

Tomando a aplicação do modelo para duas empresas do ramo de bebidas (Coca-Cola e Pepsi-Cola), tem-se que as funções de demanda de mercado são dadas por: $q_i\ (p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$, em que b reflete a substituição entre os bens. Da mesma maneira que no caso da competição de Cournot, os custos são dados por: $C(q_i) = cq_i$.

Solução

A solução do modelo consiste em determinar as funções de lucro, ou funções de pay-off's, das firmas. Logo, com base nas informações anteriores, os elementos do jogo serão os seguintes:

1) Jogadores: jogador 1 ("Coca-Cola") e jogador 2 ("Pepsi-Cola);
2) Ações: vender ao preço ótimo (p^*) ou vender a um preço menor (p^-) para cada uma das firmas.
3) Espaço de ações: $A_{Coca\text{-}Cola}$ = (preço ótimo = p^* e preço menor = p^-) = $A_{Pepsi\text{-}Cola}$.
4) Estratégias: (p^*/p^*, p^*/p^-, p^-/p^* e p^-/p^-).
5) Funções de pagamento: as funções de pagamento das firmas são dadas pelo lucro delas após o período de produção: $Đ_{Coca\text{-}Cola} = p_{Coca\text{-}Cola}(a - p_{Coca\text{-}Cola} + bp_{Pepsi\text{-}Cola}) - c(a - p_{Coca\text{-}Cola} + bp_{Pepsi\text{-}Cola})$, para a firma Coca-Cola, e $Đ_{Pepsi\text{-}Cola} = p_{Pepsi\text{-}Cola}(a - p_{Pepsi\text{-}Cola} + bp_{Coca\text{-}Cola}) - c(a - p_{Pepsi\text{-}Cola} + bp_{Coca\text{-}Cola})$, para a firma Pepsi-Cola.
6) Informação: completa e perfeita.
7) Regras do jogo: cada uma das firmas escolhe uma entre as duas possibilidades de preços, o preço ótimo ou o preço mínimo, suficiente para cobrir os custos. Finalmente, as firmas, dados os custos de produção e os preços escolhidos, conseguem determinar seus lucros.

A escolha do preço ótimo está em interagir o comportamento de ambas as firmas. Logo, as firmas maximizam os seus lucros em função dos preços a serem escolhidos, tal que:

$$\Pi_{Coca-Cola} = (p_{Coca-Cola} - c)(a - p_{Coca-Cola} + bp_{Pepsi-Cola})$$
$$\Pi_{Pepsi-Cola} = (p_{Pepsi-Cola} - c)(a - p_{Pepsi-Cola} + bp_{Coca-Cola})$$

Derivando as funções de lucros em relação aos seus respectivos preços, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi_{Coca-Cola}}{\partial p_{Coca-Cola}} = a - p_{Coca-Cola} + bp_{Pepsi-Cola} - p_{Coca-Cola} + c = 0 \Rightarrow p^*_{Coca-Cola} = \frac{a + bp_{Pepsi-Cola} + c}{2}$$
$$\frac{\partial \Pi_{Pepsi-Cola}}{\partial p_{Pepsi-Cola}} = a - p_{Pepsi-Cola} + bp_{Coca-Cola} - p_{Pepsi-Cola} + c = 0 \Rightarrow p^*_{Pepsi-Cola} = \frac{a + bp_{Coca-Cola} + c}{2}$$

Resolvendo o sistema para os preços ótimos encontrados, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} p_{Coca-Cola} & -\frac{b}{2} p_{Pepsi-Cola} \\ -\frac{b}{2} p_{Coca-Cola} & p_{Pepsi-Cola} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{Coca-Cola} \\ p_{Pepsi-Cola} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} \end{bmatrix}$$

A solução é a seguinte:

$$p^*_{Coca-Cola} = p^*_{Pepsi-Cola} = \frac{a + c}{2 - b}$$

Os preços mínimos são aqueles suficientes para a cobertura dos custos de produção, ou seja, são os preços compatíveis com o lucro zero, tal que:

$$\Pi_{Coca-Cola} = 0 \Rightarrow p_{Coca-Cola} = c$$
$$\Pi_{Pepsi-Cola} = 0 \Rightarrow p_{Pepsi-Cola} = c$$

Em sua forma estratégica, o jogo pode ser representado como:

	Ações	Firma 2 = Pepsi-Cola	
		$p^* = (a + c)/(2 - b)$	$p = c$
Firma 1 = Coca-Cola	$p^* = (a + c)/(2 - b)$	$([(a-c+bc)/(2-b)]^2,\ [(a-c+bc)/(2-b)]^2)$	$(\{(1-b)[a + c(b - 1)]^2/(b-2)^2\},\ 0)$
	$p = c$	$(0,\ \{(1-b)[a + c(b - 1)]^2/(b-2)^2\})$	$(0,\ 0)$

Figura 18.6 - Representação estratégica do jogo de Bertrand

Exercício 3 – Modelo de Competição de Hotelling

O modelo de competição de Hotelling é uma extensão do modelo de Bertrand, em que o diferencial de preços entre duas firmas depende do custo de transporte. Em outras palavras, o diferencial de preços entre as firmas é dado pelo produto da alíquota de transporte pela distância entre a firma e o consumidor.

Suponha que duas firmas da indústria farmacêutica, "Bayer" e "Ciba Geigy", concorrem por um mercado consumidor situado entre elas.

O custo unitário é análogo àquele dos exercícios anteriores, isto é, um valor c. Para os consumidores, o que importa são os preços finais, que são idênticos aos preços acrescidos de uma alíquota de transporte t multiplicada pela distância entre o consumidor e a firma.

Logo, para consumidores espacialmente distribuídos em uma região qualquer, tem-se a seguinte representação para o i-ésimo consumidor:

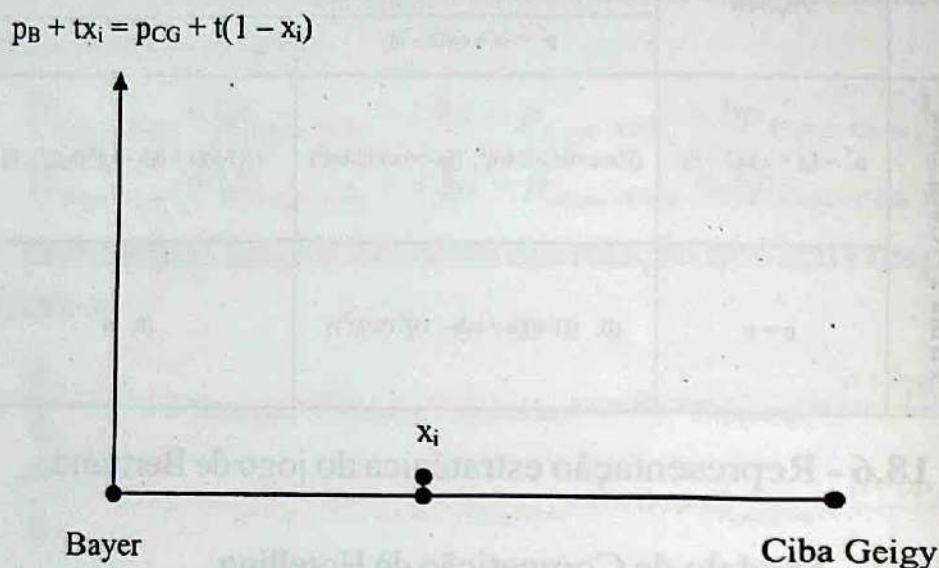



Figura 18.7 - Representação do jogo de Hotelling para duas firmas

Solução

As quantidades demandas são representadas pelas seguintes expressões:

$$q_{Bayer}(p_{Bayer}, p_{CibaGeigy}) = x_i$$

$$q_{CibaGeigy}(p_{Bayer}, p_{CibaGeigy}) = 1 - x_i$$

$$p_{Bayer} + tx_i = p_{CibaGeigy} + t(1 - x_i)$$

Resolvendo a expressão dos preços para o i-ésimo consumidor e substituindo nas equações de demanda para a Bayer e para a Ciba Geigy, tem-se:

$$q^*_{Bayer} = \frac{p_{CG} - p_B + t}{2t}$$

$$q^*_{CibaGeigy} = \frac{p_B - p_{CG} + t}{2t}$$

Os preços ótimos são:

$$p^*_{Bayer} = p^*_{CibaGeigy} = c + t$$

Os lucros máximos da Bayer e da Ciba Geigy serão dados por:

$$\Pi^*_{Bayer} = p_{Bayer} q_{Bayer} - c q_{Bayer} = \frac{1}{2} t$$

$$\Pi^*_{CibaGeigy} = p_{CibaGeigy} q_{CibaGeigy} - c q_{Cibageigy} = \frac{1}{2} t$$

18.3.3. Exercícios propostos de jogos estáticos com informação completa

Exercício 4 – Modelo de Competição de Cournot – Caso n Firmas[2]

O problema propõe que n firmas produtoras de um bem homogêneo concorrem entre si por um mercado com a regra de preços dada pela função de demanda inversa: $P(Q) = a - Q$, isto é, os preços dependem das quantidades ofertadas pelas firmas, $Q = q_1 + q_2 + ... + q_n$.

A estrutura de custos é a mesma para cada uma das firmas, sendo representada pela seguinte relação $C_i(q_i) = cq_i$, em que c é o custo marginal.

Suponha que o mercado seja o mercado de fornecedores de um produto agrícola como a batata, a cebola ou o tomate, vendidos para um grande atacadista, que estabelecerá o preço de compra, dada a oferta do produto.

Exercício 5 – Modelo de Competição de Bertrand – Caso n Firmas

As funções de demanda de mercado são dadas por:

$$q_i(p_1, ... p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, ... p_n) = a - p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_j p_j$$

em que b_j reflete a substituição entre os bens. Da mesma maneira que no caso da competição de Cournot, os custos são dados por: $C(q_i) = cq_i$.

[2] O gabarito dos exercícios encontra-se no Apêndice deste capítulo.

Suponha que o mercado seja uma feira livre de um produto específico.

Exercício 6 – Modelo de Competição de Hotelling – Caso n Firmas

O modelo de competição de Hotelling propõe que o diferencial de preços entre duas firmas depende do custo de transporte. Assim, os preços são dados pela alíquota de transporte multiplicada pela distância entre a firma e o consumidor.

Suponha que um conjunto de n firmas esteja espacialmente distribuído ao longo do perímetro de um círculo e que as firmas concorrem entre si por um mercado consumidor situado entre as duas firmas, conforme a Figura 18.8.

Figura 18.8 - Representação do modelo de Hotelling para o caso de n firmas

O custo unitário é dado por um valor c. Para os consumidores, o que importa são os preços finais, que são idênticos aos preços acrescidos de uma alíquota de transporte t multiplicada pela distância entre o consumidor e a firma.

18.4. Jogos dinâmicos com informação completa

Os jogos dinâmicos diferem dos jogos estáticos por sua seqüencialidade. Enquanto os jogos estáticos são caracterizados pela simultaneidade na escolha das ações pelos jogadores, os jogos dinâmicos propõem uma assimetria entre os jogadores, em virtude de um deles ter a primazia de jogar primeiro.

Um dos aspectos mais importantes deste tipo de jogo está no fato de que o jogo pode ser repetido um número finito ou, até mesmo, infinito de vezes, tornando a modelagem cientificamente sofisticada.

18.4.1. Exemplos de jogos dinâmicos com informação completa

Exemplo 1 – Modelo de Competição de Stackelberg

O modelo proposto por Heinrich *von* Stackelberg em 1934 estruturou o problema do duopólio de Cournot como um problema dinâmico. Na ilustração, uma firma líder, e dominante no mercado, move-se, e uma firma seguidora, observando a ação da líder, se move na seqüência.

Como exemplo, cita-se o caso do refrigerante cola com limão. A Pepsi-Cola lançou a Pepsi Twist, um refrigerante cola com a adição de suco de limão. Após algum tempo a Coca-Cola lançou no mercado a Coca-Cola Lemon, com as mesmas características.

Para a fatia do mercado de refrigerante cola com a adição de suco de limão, tem-se caracterizado um problema de Stackelberg: a firma líder, no caso a Pepsi Co., e a firma seguidora, a Coca-Cola Co.

A função de demanda inversa é dada por: $P(Q) = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$. Para o mesmo problema, o custo marginal é idêntico e igual a c.

Graficamente, a ilustração para o problema de jogo dinâmico é a descrita na Figura 18.9.

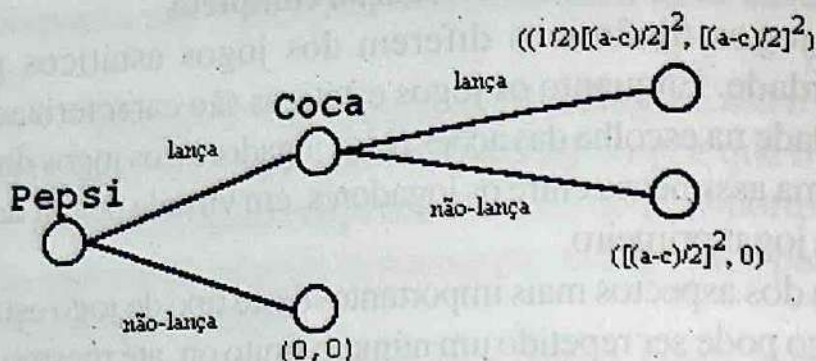



Figura 18.9 Representação do modelo de Competição de Bertrand

Solução

1) Jogadores: jogador 1 = Pepsi Co. e jogador 2 = Coca-Cola Co.
2) Ações: lançar o produto e não lançar o produto.
3) Espaço de ações: (lança/não lança) para ambas as firmas.
4) Estratégias: (lança/lança, lança/não lança, não lança/lança e não lança/não lança).
5) Funções de pagamento:

a) jogador 1: Pepsi Co. (lança/lança = $[(1/2)((a-c)/2)^2]$, lança/não lança = $((a-c)/2)^2$, não-lança/lança = 0 e não lança/não lança = 0); e

b) jogador 2: (lança/lança = $((a-c)/2)^2$, lança/não lança = $[(1/2)((a-c)/2)^2]$, não lança/ lança =0 e não lança/não-lança = 0).

6) Informação: completa e imperfeita.
7) Regras do jogo: a Pepsi Co. escolhe uma ação e, em seguida, a Coca-Cola Co. observa a ação escolhida pela Pepsi Co. e escolhe a sua ação. O jogo apresenta como equilíbrio o conceito de Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogo, sendo este representado pelas linhas duplas da Figura 18.9.

Exemplo 2 – Modelo Geral de Barganha

Suponha que para dois indivíduos, Carlos (C) e Dolores (D), é proposto um jogo de movimentação de um cursor ao longo de uma planilha. Carlos pode se mover entre as linhas e Berenice, entre as colunas. A estrutura normal do jogo é a descrita na Figura 18.10.

		Dolores		
	Ações	Esquerda ←	Centro |	Direita →
Carlos	Acima ↑	(0, 3)	(-1, 1)	(3, 0)
	Meio –	(1, -2)	(0, 0)	(2, -1)
	Abaixo ↓	(-1, 3)	(-2, -1)	(2, 2)

Figura 18.10 - Representação estratégica da barganha em um teclado

O exemplo mostra que o equilíbrio de Nash é dado por (Meio, Centro), e o *pay-off* para cada um dos jogadores será 0.

Graficamente, os pagamentos poderão ser dispostos em uma estrutura cartesiana, com os pontos representando a interação estratégica entre os agentes. A solução do jogo proposto mostra que o equilíbrio de Nash é representado pela origem (0, 0) do plano cartesiano. Logo, é possível que ambos os jogadores alcancem um resultado superior a partir de discussões e acordos, e isso é o que se denomina "barganha".

Definição 13: Conjunto de Barganha

O conjunto de todos os pares de pagamentos racionais e Pareto-eficientes na região de pagamentos cooperativos, ou seja, na Figura 18.11, é representado pelo limite do ortante positivo Ω^+, em que os jogadores, partindo do equilíbrio de Nash (0,0), poderão caminhar a nordeste para um resultado superior para ambos os jogadores.

A partir do resultado do jogo anterior, os jogadores entrarão em um processo de barganha para um outro ponto a nordeste ou no limite do conjunto de barganha para que seja alcançado. Isso caracteriza o problema da barganha como um jogo dinâmico, pois um jogador fará uma proposta e o outro, não a aceitando, proporá uma outra, e assim sucessivamente, até que um resultado seja alcançado.

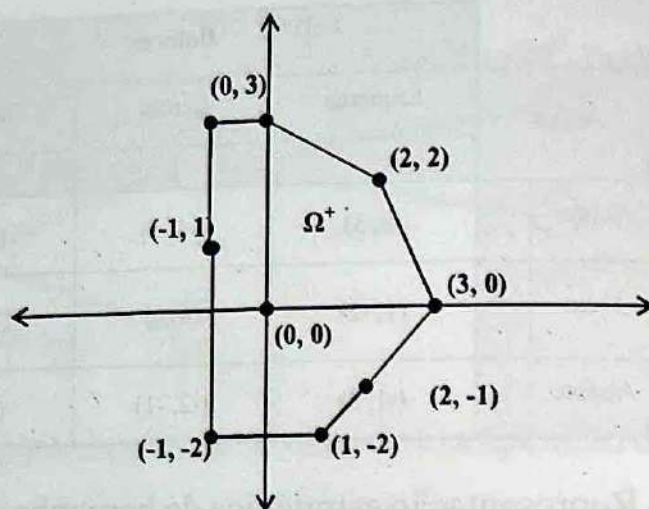



Figura 18.11 - Pagamentos do jogo em um teclado

Algebricamente, o problema da barganha consiste na escolha de qualquer ponto factível a nordeste que beneficie no mínimo um dos jogadores. Assim:

B (X, d)

em que $B = \Omega^+$. A barganha depende do conjunto de barganha *B* e da situação inicial *d = (0,0)*. Individualmente, a barganha consiste na determinação de um *pay-off* tal que: $\Pi_i : B \rightarrow \Re, i =$ Carlos, Dolores.

A solução do problema indica um dos três possíveis resultados: (Acima, Esquerda) = (0, 3), (Acima, Direita) = (3, 0) e (Abaixo, Direita) = (2, 2).

18.4.2. Exercícios resolvidos de jogos dinâmicos com informação completa

Exercício 7 – Barganha com Ultimátum

Dois jogadores, C = Carlos e D = Dolores, decidem dividir um dólar. Inicialmente, a Dolores faz uma proposta: se o Carlos aceitar a proposta inicial da Dolores, o jogo termina e o *pay-off* é determinado na proposta da Dolores. No caso da rejeição da proposta da Dolores, Carlos apresentará uma contraproposta, e o mesmo procedimento deverá ocorrer

até que se encontre uma solução, a qual pode ser a ausência de acordo e o fim do jogo com um *pay-off* (0, 0) para os jogadores.

Solução

A solução do jogo consiste na determinação de um valor que seja aceito por ambos os jogadores, independentemente de quem faça a proposta. Graficamente, o jogo pode ser ilustrado conforme a Figura 18.12, caracterizando-se a fronteira de possibilidades de pagamento ou região de pagamentos do jogo de divisão do dólar.

$$X = \{x : x_1 + x_2 \leq 1\}$$

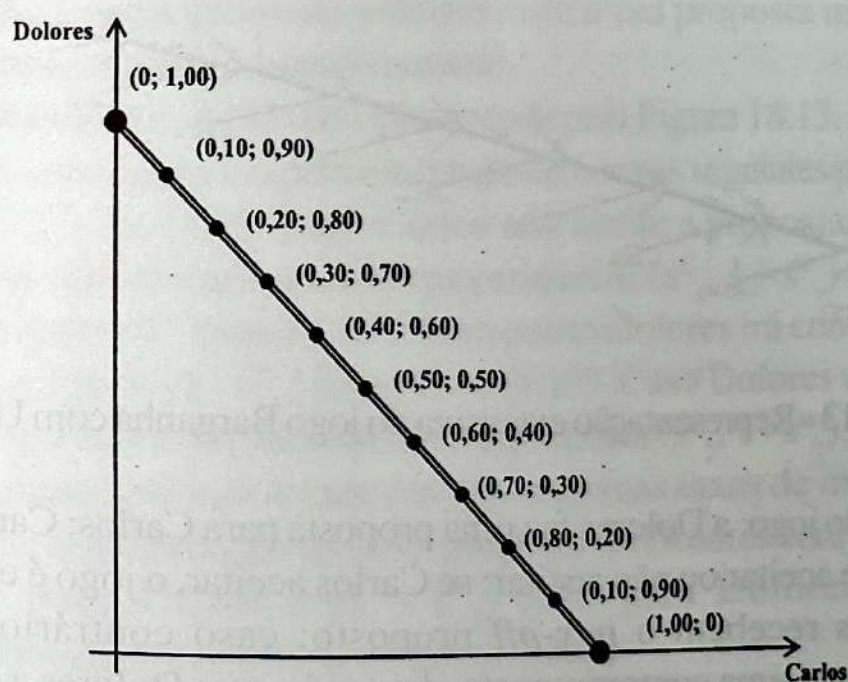



Figura 18.12 - Representação gráfica do jogo Barganha com Ultimátum

Os elementos do jogo são os seguintes:

1) Jogadores: C = Carlos e D = Dolores.
2) Ações: aceitar a proposta do oponente e não aceitar a proposta do oponente.
3) Espaço de ações: (Aceitar, Não Aceitar e Apresentar Contraproposta e Não Aceitar e Encerrar o Jogo).
4) Estratégias: (Aceitar/Propõe, Não Aceitar e Apresentar Contraproposta/Propõe e Não Aceitar e Encerrar o Jogo/Propõe).
5) Funções de pagamento (0,00/1,00; 0,10/0,90; 0,20/0,80; ...; 1,00/0,00; 0,00/0,00).
6) Informação: completa e perfeita.

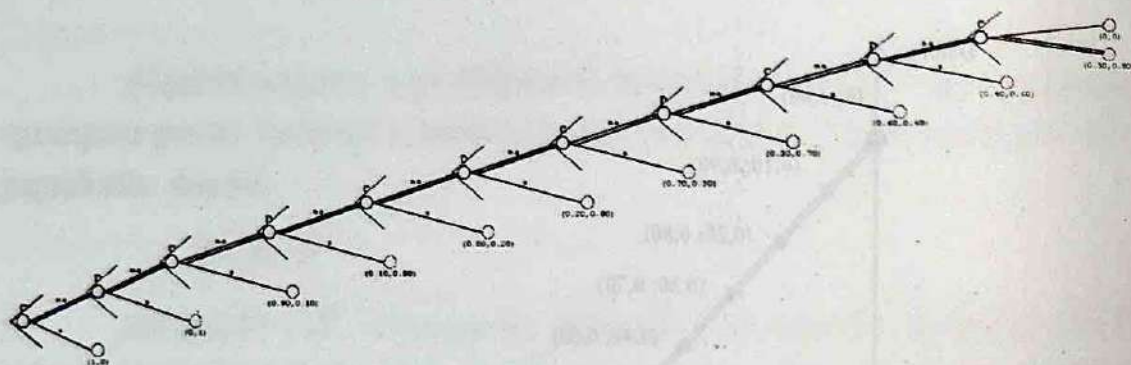



Figura 18.13 - Representação extensiva do jogo Barganha com Ultimátum

1) Regras do jogo: a Dolores faz uma proposta para Carlos; Carlos tem a opção de aceitar ou não aceitar; se Carlos aceitar, o jogo é encerrado e ambos recebem o *pay-off* proposto; caso contrário, Carlos apresentará uma contraproposta, deixando para Dolores a opção de aceitar ou não-aceitar a contraproposta. O procedimento será efetuado até que um resultado seja alcançado ou que o jogo seja encerrado, com a opção de pagamento (0, 0) para os participantes.

Equilíbrio de Nash em Subjogo Perfeito: (0,50; 0,50)

O jogo projeta como solução que os participantes não aceitam as propostas uns dos outros até que se alcance como solução a proposta (0,50; 0,50), que é o equilíbrio de Nash com indução-para-trás.

Exercício 8 – Barganha com Desconto

Tomando o exercício anterior, impõe-se a restrição de que ambos os jogadores possuem uma taxa de desconto ou taxa de impaciência que os força a antecipar uma solução para o jogo. Para Carlos, a taxa de impaciência é dada por: $\delta^C = \dfrac{1}{1+r^C}$; para Dolores, a taxa de impaciência é formulada por: $\delta^D = \dfrac{1}{1+r^D}$.

<u>*Solução*</u>

O que muda em relação ao jogo anterior é o fato de que cada jogador compara a proposta anterior com a sua proposta multiplicada pelo desconto, e assim sucessivamente.

Tomando a seqüência apresentada pela Figura 18.13, tem-se que:
1) Dolores apresenta a sua primeira proposta com os seguintes pagamentos: $(s^D_1, 1 - s^D_1) = (0; 1{,}00)$. Caso Carlos não aceite a proposta e faça uma nova proposta com os seguintes pagamentos: $(s^C_1, 1 - s^C_1) = (1{,}00; 0)$, ele irá comparar s^D_1 com s^C_1 (ä^C), bem como Dolores irá comparar a sua primeira proposta $(1 - s^D_1)$ com $(1 - s^C_1)$ (ä^D). Caso Dolores não aceite a proposta de Carlos, ela fará uma nova proposta $(s^D_2, 1 - s^D_2)$; logo, tanto Carlos quanto Dolores levam em conta as suas taxas de impaciência. Portanto, a configuração da nova proposta de Dolores será a seguinte: s^D_2 (ä^C)^2 para Carlos e $(1 - s^D_2)$ (ä^D)^2 para Dolores, e assim sucessivamente, até a décima primeira rodada.

O equilíbrio do jogo será de Nash perfeito em subjogos, porém o resultado do jogo dependerá das taxas de impaciência.

Com base na solução do exercício anterior o resultado será o mesmo desde que:

$$\left(s_6^D\right)\left(\delta^C\right)^{11} \geq \left(s_i^D\right)\left(\delta^C\right)^n, n \geq 0, i = 1,2,\ldots \quad e \quad \left(1 - s_6^D\right)\left(\delta^D\right)^{11} > \left(1 - s_1^C\right)\left(\delta^D\right)^y \quad ou$$
$$(0{,}50)\left(\delta^C\right)^{11} \geq \left(s_i^D\right)\left(\delta^C\right)^n, n \geq 0, i = 1,2,\ldots e \quad (0{,}50)\left(\delta^D\right)^{11} > \left(1 - s_1^C\right)\left(\delta^D\right)^y$$

18.4.3. Exercícios propostos de jogos dinâmicos com informação completa

Exercício 9 – Conluio

As empresas "Água Perrier" e "Água Vichy Célestins", apresentadas no exercício do Modelo de Competição de Cournot, vislumbram a possibilidade de fazerem um conluio para reduzir o prejuízo. Em que condições esta seria uma estratégia viável para as empresas?

Exercício 10 – Fusão TAM e Varig

O mercado sinaliza a possibilidade de fusão entre duas grandes companhias aéreas: TAM e Varig. Ambas encontram-se operando no vermelho desde que a Gol entrou no mercado e, também, em função dos sucessivos aumentos nos preços dos combustíveis. Se houver fusão, as empresas deverão faturar 15% menos, mas o custo será reduzido em 35%. Supondo que o mercado seja representado pelas três grandes companhias aéreas, qual seria a estratégia ideal para a TAM e a Varig?

Exercício 11 – Liderança tecnológica

Um mercado qualquer tem duas firmas que são as líderes de mercado, Firma 1 = "Siemens" e Firma 2 = "TAG Heuer", e, em função das inovações tecnológicas recentes na área de informática, as firmas planejam uma expansão das atividades naquele mercado. A firma que investir em tecnologia terá um acréscimo em sua estrutura de custos igual a â no curto prazo, porém estudos indicam que isso poderá garantir a liderança tecnológica naquele mercado após 12 meses. A firma que não investir em tecnologia será a seguidora daquele mercado e terá um lucro maior no curto prazo, mas será uma seguidora de mercado após 12 meses. Ambas as firmas apresentam um desconto intertemporal igual a ä.

A estrutura de demanda do mercado é representada pela função de demanda inversa seguinte:

$$P(Q) = 20 - 2Q, Q = q_1 + q_2$$

Da mesma forma que no exercício original de Stackelberg, os custos são dados por:

$$C_i = 2 + 3q_i(1+\beta)$$

18.5. Considerações finais

O presente capítulo teve como objetivo apresentar o instrumental de teoria dos jogos, visando a caracterização dos elementos essenciais para a modelagem de jogos estáticos e dinâmicos com informação completa. Partiu-se de um breve histórico e da apresentação dos elementos básicos dos jogos e, em seguida, das diversas formas de equilíbrio em jogos.

É evidente que se deixou de contemplar aqui importantes exemplos e a inclusão da informação incompleta e de estruturas de jogos cooperativos, muito difundidos na literatura. Essas contribuições poderão ser encontradas em livros-textos de teoria dos jogos.

18.6. Referências

BINMORE, K. **Teoria de juegos**. Madrid: McGraw-Hill, 1994. 624 p.

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game theory**. 4.ed. Cambridge: The MIT Press, 1995. 579 p.

GIBBONS, R. **Game theory for applied economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992. 267 p.

GIBBONS, R. An introduction to applicable game theory. **Journal of Economic Perspectives**, v. 11, n. 1, p. 127-149, 1997.

KREPS, D.M. **A course in microeconomic theory**. New York: Harvester Wheatsheaf, 1990. 839 p.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.D.; GREEN, J.R. **Microeconomic theory**. New York: Oxford University Press, 1995. 981 p.

NASH, J.F. The bargaining problem. **Econometrica**, v. 18, p. 155-162, 1950.

NASH, J.F. Two-person cooperative games. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 128-140, 1953.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Games and economic behavior**. New York: John Wiley & Sons, 1944. 641 p.

RASMUSEN, E. **Games and information**: an introduction to game theory. Cambridge: Blackwell Publishers, 1993. 352 p.

WALKER, P. **An outline of the history of game theory**. Canterbury: University of Canterbury, Department of Economics, 1995. (Working Papers Series, 9504).

18.7. Apêndice

Gabarito dos exercícios propostos

Exercício 4

$$p_i = \frac{(a-c)}{(n+1)}; \Pi_i^* = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2, \ \lim_{n\to\infty} \Pi_i^* = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2 = 0$$

Exercício 5

Caso 1): n = par (número par de firmas)

$$p_i = \frac{-(a+c)\left[\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}(2+b_j)\right]}{(-2)^n + (n-1)b_1 \ldots b_n - \left[\frac{n}{2}b_1 \ldots b_n + (-2)^2\binom{b_1 \ldots b_n}{(n-2)}_{i,\frac{n}{2}+i-1}\right]_{i=1,\ldots,\frac{n}{2}}}$$

Caso 2): n = ímpar (número ímpar de firmas)

$$p_i = \frac{-(a+c)\left[(-2)^{n-1} + \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(b_j)\right]}{(-2)^n + (n-1)b_1 \ldots b_n - \left[(-2)\binom{b_1 \ldots b_n}{(n-2)}\right]}$$

Exercício 6

Dividindo o círculo de localização em duas metades, tem-se n/2 firmas na primeira parte e as demais, na outra parte. Cada firma dista de outra diametralmente oposta em uma extensão de tamanho r, sendo o centro, onde se localiza o mercado consumidor, marcado com a letra h. Logo, a metade delas dista h do mercado consumidor, e a outra parte, (r – h).

Designando a primeira metade com o subscrito i, i=1,...,m; a segunda, com j, j = m+1, ..., z.

Os preços finais serão:

$$p_i + th = p_j + t(r - h) = c + tr$$

Exercício 9 – Conluio[3]

Na ausência de conluio entre as firmas, os resultados serão: preço para cada firma = ((a-c)^2)/3 e lucro de cada firma = ((a-c)/3)^2.

Havendo conluio: preço = (a-c)/2, e o lucro individual será = ((a-c)/2)^2/2.

Valores atribuídos a = 10 e c = 3.

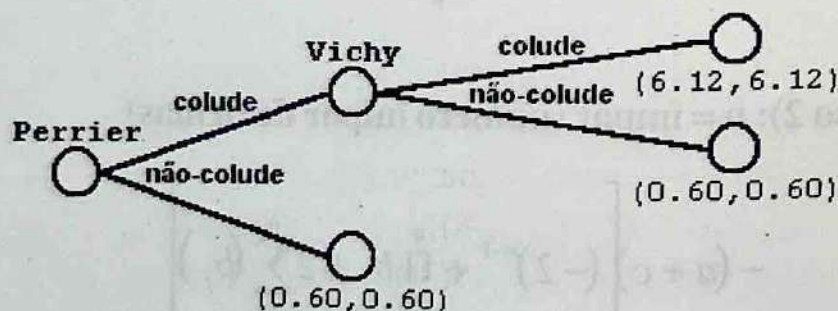



Figura 18.1A - Conluio entre a Perrier e a Vichy Celéstins

[3] Figura desenhada no programa GAMBIT.

Exercício 10 – Fusão TAM e VARIG

Tomando-se os seguintes valores:

a = 600; cMg Gol = 0,25; cMg TAM = 0,53; e cMg VARIG = 0,53.

Na ausência de fusão: o lucro da VARIG e TAM será de $2{,}24018 \times 10^4$.

Havendo fusão: $1{,}90894 \times 10^4$, para cada uma das duas.

Conclusão: não-fusão das empresas.

GOL
não-fusão
TAM
não-fusão
(2.24,2.24,2.24)
fusão
VARIG
não-fusão
(2.24,2.24,2.24)
fusão
(2.25,1.91,1.91)

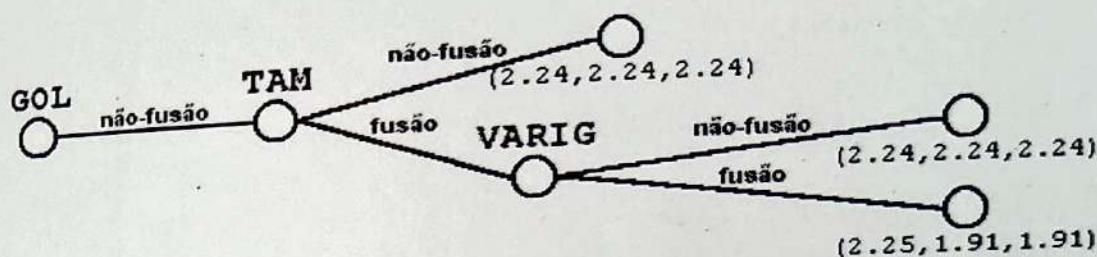



Figura 18.2A - Fusão entre a TAM e a VARIG

Exercício 11 – Liderança tecnológica

Solução: o jogo consiste em achar uma solução para a definição da liderança tecnológica ou não no setor de eletroeletrônica. Os elementos do jogo são disponibilizados como segue.

Tomando-se os casos:

1) Nenhuma firma investe em tecnologia: produção = 3/2, lucro ótimo = 11,25.
2) A Siemens investe em tecnologia: produção (Siemens = $12/(5\beta + 8)$, TAG Heuer = $(9\beta + 12)/(5\beta + 8)$); e lucro ótimo (Siemens = $144(3\beta + 5)/(5\beta + 8)^2$, TAG Heuer = $45(3\beta + 4)/(5\beta + 8)^2$).
3) A Siemens exerce liderança tecnológica para um $\beta \in [0, 0{,}0209138)$: produção (Siemens = $36/(15\beta + 23$, TAG Heuer = $1.8(15\beta + 19)/(15\beta + 23)$); e lucro ótimo (Siemens = $259.2/(15\beta + 23)$, TAG Heuer = $16{,}2\,(15\beta + 19)^2/(15\beta + 2)^2$).